



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $ab: 2^{15} 7^{11}$   
 $bc: 2^{17} 7^{18}$   
 $ac: 2^{23} 7^{39}$

~~Итак, пусть  $a = 2^x \cdot 7^n$ ,  $b = 2^y \cdot 7^m$ ,  $c = 2^z \cdot 7^k$ .~~

Посмотрим на разложения их на простые множители:

$$a = 2^x \cdot 7^n \dots; b = 2^y \cdot 7^m \dots; c = 2^z \cdot 7^k \dots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \cdot b = 2^{x+y} \cdot 7^{n+m} \dots; b \cdot c = 2^{y+z} \cdot 7^{m+k} \dots; a \cdot c = 2^{x+z} \cdot 7^{n+k} \dots$$

Из условия:  $x+y \geq 15$  (тк.  $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$ );  $y+z \geq 17$ ;  $x+z \geq 23$ . Тогда (суммируем)

$$2x+2y+2z \geq 55 \Rightarrow x+y+z \geq 27,5 \text{ (но } x+y+z \text{ - целое)} \Rightarrow \underline{x+y+z \geq 28}$$

Также заметим, что  $n+k \geq 39$  (тк.  $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$ )  $\Rightarrow \underline{n+m+k \geq 39}$

( $a = 2^x \cdot 7^n \cdot a_1$ ;  $b = 2^y \cdot 7^m \cdot b_1$ ;  $c = 2^z \cdot 7^k \cdot c_1$ .)

$$a \cdot b \cdot c = 2^{x+y+z} \cdot 7^{n+m+k} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$$

При этом  $a_1 \geq 1$ ;  $b_1 \geq 1$ ;  $c_1 \geq 1 \Rightarrow \underline{a \cdot b \cdot c \geq 2^{28} \cdot 7^{39}}$

Пример:  $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$ ;  $b = 2^5$ ;  $c = 2^{13} \cdot 7^{28} \Rightarrow ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$ ;  $bc = 2^{18} \cdot 7^{28}$ ;  $c = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$$ab: 2^{15} 7^{11}; bc: 2^{18} 7^{28}; ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$abc = \underline{2^{28} \cdot 7^{39}}$$

ч.т.д.

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.  $\frac{a}{b}$  - несократима  $\rightarrow (a; b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$  можно сократить на  $m \Rightarrow a+b:m$  и  $a^2-7ab+b^2:m$   
 $\Downarrow$   
 $a^2+2ab+b^2:m \rightarrow (a^2+2ab+b^2) - (a^2-7ab+b^2):m$   
 $\Downarrow$   
 $9ab:m$

Предположим,  $a+b=mk \Rightarrow b=mk-a \Rightarrow 9a(mk-a):m$

Предположим, что  $a$  и  $m$  ~~не взаимно просты~~ делятся на какое-то  $p$ .

$\Rightarrow (a; m) \neq 1$ . Тогда  $b = \frac{mk-a}{p}$  также делится на это  $p$ . Но мы знаем,

что  $(a; b) = 1 \Rightarrow$  не должно оба делиться на какое-то число. Тогда

получается  $(a; m) = 1$ . Аналогично и  $(b; m) = 1$ . Но  $9ab:m$ , при этом

$(a; m) = 1$  и  $(b; m) = 1 \Rightarrow 9:m \Rightarrow m \leq 9$

Пример для  $m=9$ :  $a=1; b=8$

$\frac{1}{8}$  несокр.;  $\frac{1+8}{1-7 \cdot 8+8^2} = \frac{9}{1-56+64} = \frac{9}{9}$  - сократить можно и числ.

и знамен. на  $m=9$

Ответ:  $m=9$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

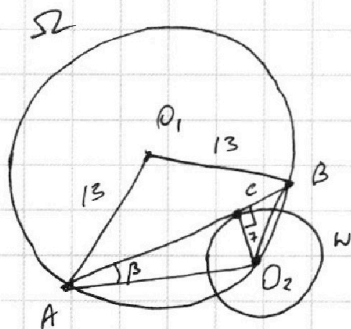
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



$\angle O_2CB = 90^\circ$ , тк AB кас.  $\Omega$

Окр.  $\Omega$  — это опис. окр-ть  $\triangle AO_2B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left( R = \frac{a}{2 \sin \alpha} \right) \quad 13 = \frac{AB}{2 \sin \alpha}$$

$$\Downarrow \quad 13 = \frac{24x}{2 \sin \alpha}$$

$\angle AO_2B = \alpha$   
 $AC = 17x; CB = 7x$

$\angle BAO_2 = \beta$

$$\sin \beta = \frac{CO_2}{AO_2} = \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}}$$

$$BO_2 = \sqrt{CB^2 + CO_2^2} = \sqrt{49x^2 + 49} = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$$13 = R = \frac{BO_2}{2 \sin \beta} = \frac{7\sqrt{x^2 + 1}}{2 \cdot \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{289x^2 + 49}}{2}$$

$$13 = \frac{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{289x^2 + 49}}{2} \quad t = x^2$$

$$26 = \sqrt{t+1} \sqrt{289t+49}$$

$$676 = 289t^2 + 289t + 49t + 49$$

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$(t-1)(289t+627) = 0$$

$$\begin{matrix} t=x^2 \\ \vee \\ 0 \end{matrix} \begin{cases} t=1 & t=x^2, x>0 \Rightarrow \underline{x=1} \\ t=-\frac{627}{289} < 0 \end{cases}$$

$$AB = AC + CB = 17x + 7x = 24x$$

$$AB = 24$$

Ответ:  $AB = 24$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$У. \quad \sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

Переносим:

$$a = 3x^2 - 6x + 2$$

$$b = 3x^2 + 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$a - b = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \\ \textcircled{2} \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 = 9x$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\text{Проверяем: } \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3}} = 0$$

т.е.  $x = \frac{1}{9}$  кор.

$$\textcircled{2} \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = 1 - \sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$\cancel{3x^2-6x+2} = 1 + \cancel{3x^2+3x+1} - 2\sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2+3x+1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

$$4. 69x^2 - 12x - 4 = 0$$

~~$x = \frac{1}{3}$~~

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 276}}{69} = \frac{6 \pm \sqrt{312}}{69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{3}; x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

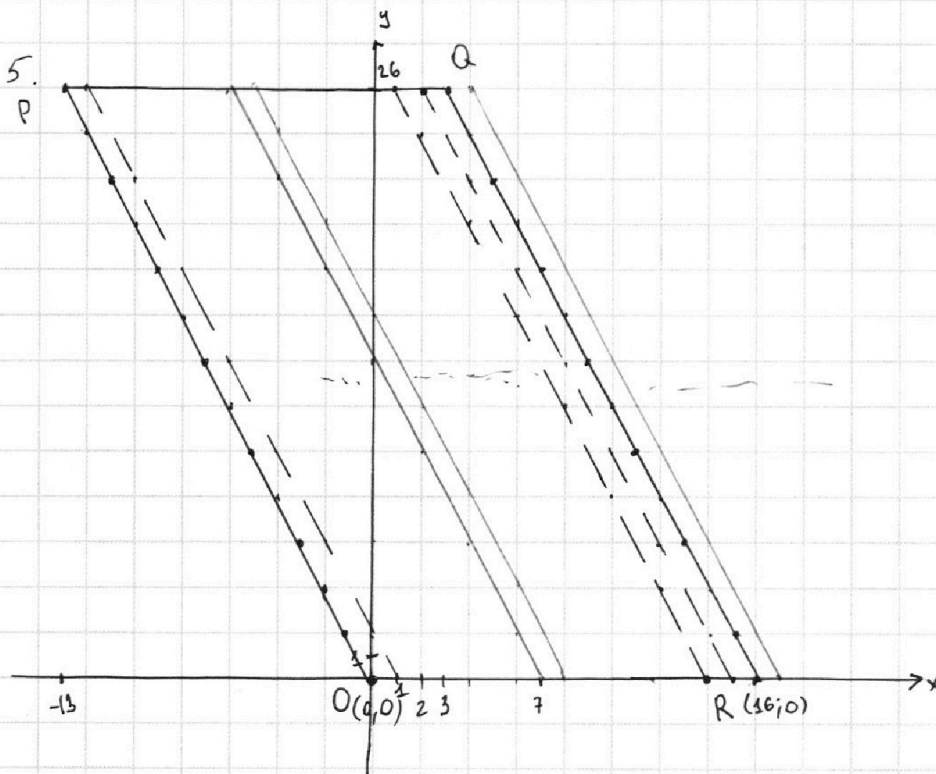
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \rightarrow 2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

Заметим, что, если нам дана точка  $A(x_1, y_1)$ , то  $B$  может лежать на прямой  $2x_2 + y_2 - (14 + 2x_1 + y_1) = 0$ . Также заметим, что  $2x_1 + y_1 = \text{const}$  это также какая-то прямая. Получается, если мы возьмем любую точку на прямой  $2x_1 + y_1 = \text{const}$ , то ей будет подходить любая точка на прямой  $2x_2 + y_2 - (14 + \text{const}) = 0$ . Также эти прямые параллельные, так  $k_1 = -\frac{2}{1}$  и  $k_2 = -\frac{2}{1} \Rightarrow k_1 = k_2$ . Что ещё заметнее, эти прямые будут параллельные сторонами нашего параллелограмма  $PO$  и  $QR$  (уравнение прямой, содержащей  $PO$ :  $\frac{x-0}{0+13} = \frac{y-0}{26-0} \Rightarrow -2x+y=2x+y=0$   $k = -\frac{2}{1} \Rightarrow$  паралл., а значит параллельно и  $QR$ , так  $PO \parallel QR$ )

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим каждую пунктирную линию (см. рис.) — это прямые, паралл. сторонам паралл. и проходящие через точки с цел. коор. внутри него (сторона параллелограмма также ~~яко~~ или являются). Будем рассматривать "слева направо" — первой будет  $PQ$ , последней  $QR$ . Будем ставить на этих прямых точки  $A$  в точках с цел. координатами. Куда бы мы ни поставили точку  $A$  на прямую  $14+2x_1+y_1$ , будет получаться одинаково, т.к. у этой прямой  $k$  (угл. коэффициент) такой же, как у  $14+2x_1+y_1$ .

2-во: пункт. прямая:  $2x_1+y_1+c_1=0$

$$14+2x_1+y_1=14-c_1-y_1+y_1=14-c_1, \text{ — константа}$$

Тогда для каждой точки на пункт. прямой ей соответствует прямая  $2x_2+y_2=\text{const} \Rightarrow$  любой прямой (пунктирной) соответствует другая прямая. Осталось рассмотреть, какие из них лежат внутри параллелограмма. Рассмотрим первую <sup>пунктирную</sup> прямую (для этого достаточно подставить любую точку на неё):

$$14+2 \cdot 0+0=14. \text{ Второй: } 14+2 \cdot 1+0=16. \text{ Третьей: } 14+2 \cdot 2+0=18. \text{ — Последней: } 14+2 \cdot 6+0=26.$$

Тогда первой будет соответствовать прямая  $2x_2+y_2=14$ . Второй:  $2x_2+y_2=16$ .

Третьей:  $2x_2+y_2=18$ . — Последней:  $2x_2+y_2=26$ . Я нарисовала их синим цветом на картинке. Заметим, что после прямой  $2x_2+y_2=32$  все прямые уже не лежат внутри параллелограмма (ей соответствует 10 пунктирных

линий)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда у нас всего 10 пар ~~матриц~~ прямых, на которых может  
лечь  $A$  и  $B$ . Вообще на каждой прямой у нас всего <sup>(13+1)</sup> 14 точек  
с целыми координатами. Из одной пары соответствующих прямых  
у нас всего получается  $14 \cdot 14 = 196$  пар точек. А таких пар  
соответствующих прямых у нас всего 10  $\Rightarrow$  в сумме у нас  $196 \cdot 10 =$   
 $= 1960$  пар таких точек

Ответ: 1960.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

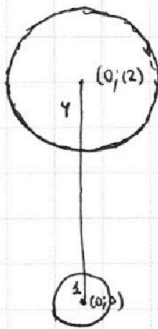
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

↓  
ур-е окруж-ти  
с центром  $(0;0)$  и  $r=1$

↓  
ур-е окруж-ти  
с центром  $(0;12)$  и  $r=4$



если точка находится <sup>внутри</sup> первой ~~окр-ти~~, то  $x^2+y^2-1 < 0$ , если <sup>внутри</sup> второй ~~окр-ти~~, то  $x^2+(y-12)^2-16 < 0$

Если точка находится <sup>внутри</sup> окр-ти, то

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r^2 < 0$$

на окр-ти:  $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r^2 = 0$

вне:  $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r^2 > 0$

$$\text{При этом } (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \Rightarrow$$

точка должна находиться вне одной из окр-тей и внутри (или на) другой (первое условие необяз. при условии 2, тк. окр-ти не имеют общих точек).

$ax+y-8b=0$  — прямая. Заметим, что, если прямая имеет с окр.

$\geq 2$  точки, то имеет беск. число точек  $\Rightarrow$  нам не подх.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  какая прямая может только касаться окружностей (тогда имеет

1 общую точку. А нам надо, чтобы система имела 2

решения  $\Rightarrow$  прямая должна касаться 2 окр-тей).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

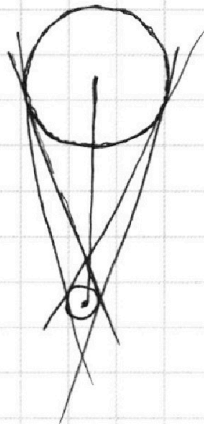
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6. Продолжение:



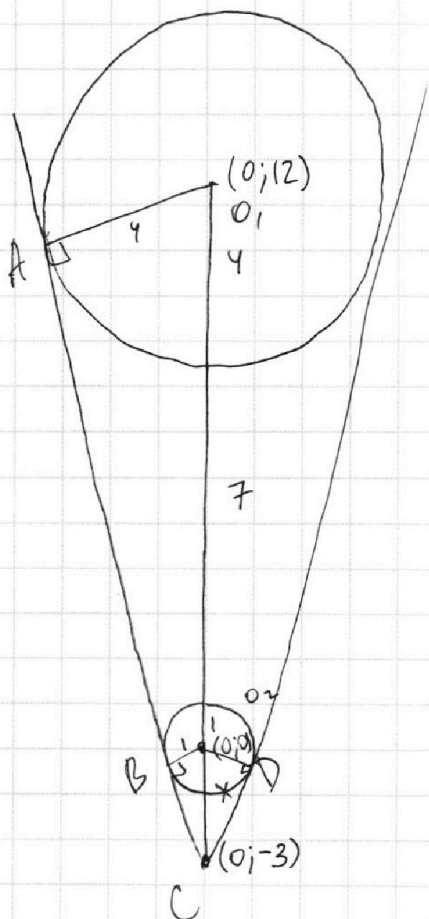
Тогда найди уравнение кас. и 2 окруж.

$$\begin{cases} ax_0 + y_0 - 8b = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ x_0^2 + (y_0 - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

система из 3 ур-й с 3 неизвестными - осталось всего лишь решить её!

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 - 24y_0 + 144 &= 16 \\ -24y_0 + 144 &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24y_0 &= 129 \\ y_0 &= \frac{129}{24} \end{aligned}$$



$$\frac{12+x}{4} = \frac{x}{1}$$

$$12+x=4x \Rightarrow x=3$$

$$a \cdot 0 - 3 - 8b = 0$$

$$b = -\frac{3}{8}$$

$$ax + y - \frac{3}{8} = 0$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 1$$

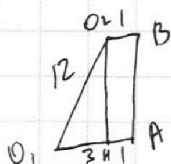
$$ax_0 + \sqrt{1-x_0^2} = \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{1-x_0^2} = \frac{3}{8ax_0}$$

ABC - 2222-10

$$O_2H = \sqrt{144-9} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}$$

$$\overset{AB}{BC} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$$





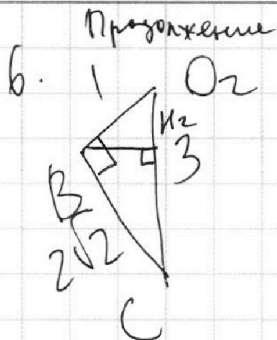
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$H_2 = \frac{2\sqrt{2} \cdot 1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$OK_2 = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{координаты } B = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

$$a \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{1}{3} - \frac{3}{8} = 0$$

$$a \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{8+9}{24}$$

$$a = \frac{\frac{17}{24}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$a = \frac{17 \cdot 3}{80\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{17}{16\sqrt{2}} \quad b = -\frac{3}{8}$$

$$\text{координаты } D = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

$$a \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{3}{8} = 0$$

$$a = \frac{17}{16\sqrt{2}} \quad b = -\frac{3}{8}$$



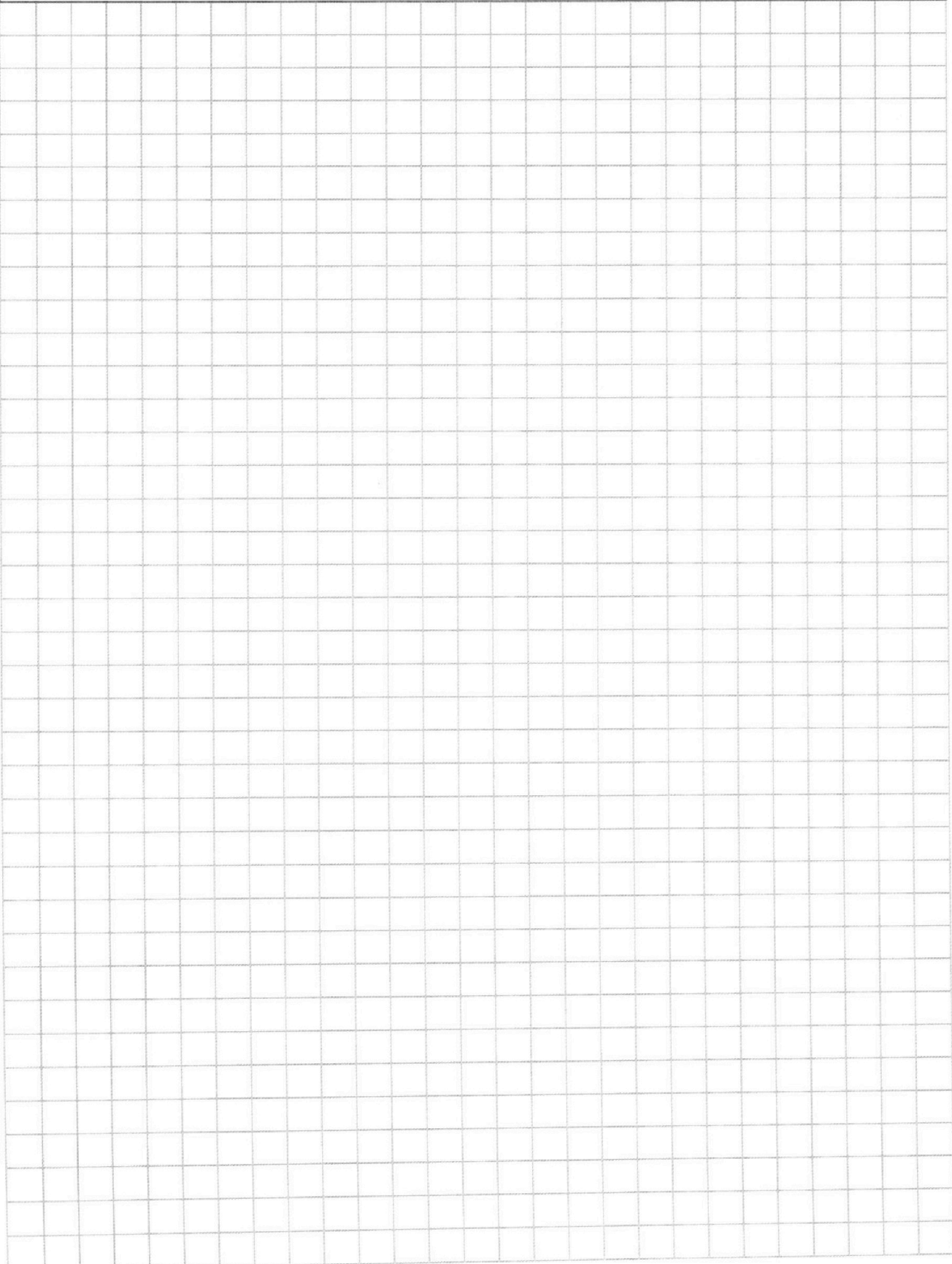
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

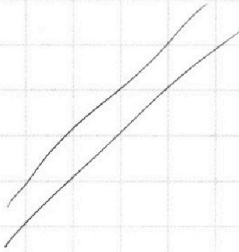


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(0; 2)$

$$x^2 + (y-2)^2 = 16$$



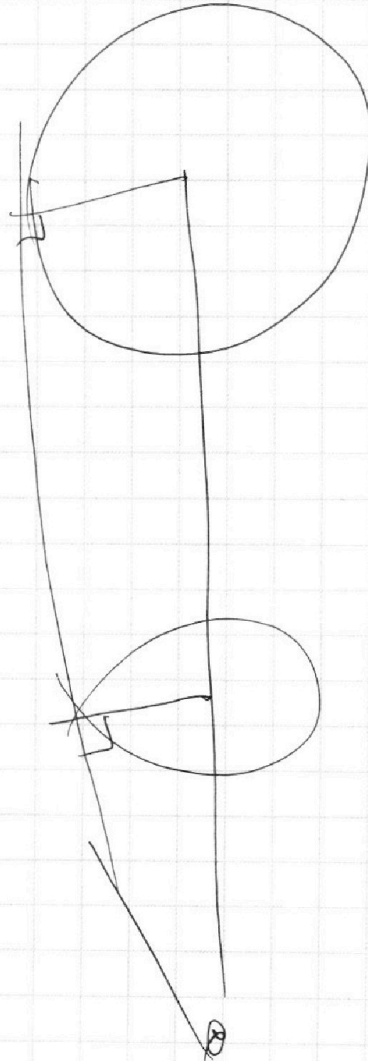
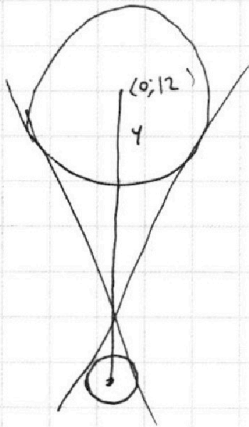
$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2$$



$$16 =$$

$$16 + 0 = 16$$

Круги:  $\leq 0$   
Вне:  $\geq 0$



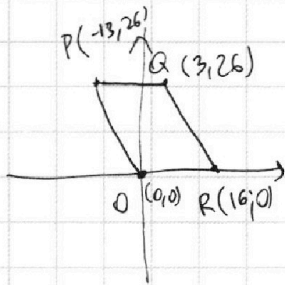
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

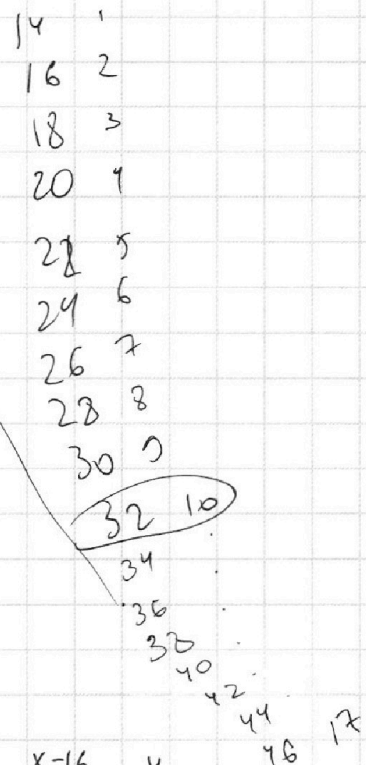
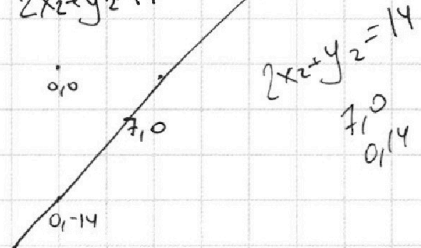


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-2x_1 - y_1 + 2x_2 + y_2 = 14$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$



$$\frac{x}{13} = \frac{y}{-26}$$

$$-2x = y$$

$$2x + y = 0$$

$$\frac{x-16}{13} = \frac{y}{-26}$$

$$-2x + 32 = y$$

$$2x + y - 32 = 0$$

$$14 - 2 + 2$$

$$14, 16, \dots, 96$$

$$14 + 32 = 46$$

$$14 + 6 + 26 = 46$$

$$2x_2 + y_2 = 14$$

$$k = -\frac{2}{1}$$

$$ax + by + c = 0$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$by = -ax - c$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$   
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{12}$   
 $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a^2 b^2 c^2: 2^{55} \cdot 7^{63}$

$abc: 2^{23} \cdot 7^{39}$

$2^{23} \cdot 7^{39}$

$2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2$

$a = 7^{18} \cdot 2^{15}$   
 $b = 2^9$   
 $c = 7^{21} \cdot 2^8$

$a+b \geq 15$   
 $b+c \geq 17$   
 $a+c \geq 23$

$2(a+b+c) \geq 55$   
 $a+b+c \geq 28$

$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$

$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$   
 $b = 2^5$   
 $c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

$\frac{8}{1} k = \frac{a}{2 \sin \alpha}$

$\frac{a}{b}$  несопр.  $(a/b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$

$\frac{5+4}{25-7 \cdot 20+16}$

$\frac{1+8}{1-7 \cdot 8+8^2}$

$= \frac{9}{1-56+64} = \frac{9}{9} = 1$   
 $m=9$

1-1

$a+b: m$

$a^2 + 2ab + b^2: m$

$a^2 - 7ab + b^2: m$

$9ab: m$

$a+b: mk$

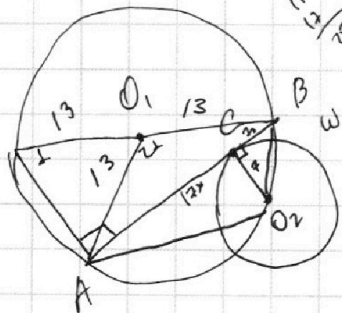
$9a(mk-a): m$

$9(mk-a): m$   
 $9: m$

$\frac{24}{\times 24}$   
 $\frac{96}{+ 48}$   
 $\frac{576}{\dots}$

$780 + 80 + 16$   
 $560 + 16$

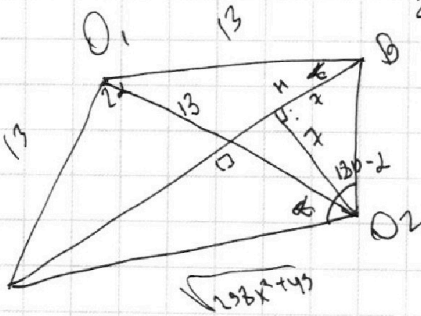
$\frac{11}{285}$   
 $\frac{45}{+ 338}$   
 $\frac{338}{\dots}$



$O_2 A$

$O_2 B$

$O_1$



$\sin \alpha = \frac{24x}{26}$   
 $x = \frac{13 \sin \alpha}{12}$

$\sqrt{289x^2 + 45}$

$\sqrt{45x^2 + 45}$

$(24x)^2 = 298x^2 + 49 + 45x^2 + 45 + 2 \cdot \sqrt{\dots} \cdot \sqrt{\dots} \cos \alpha$   
 $576x^2 = 347x^2 + 98 + 2\sqrt{\dots} \cos \alpha$   
 $229x^2 - 98 = 2\sqrt{\dots} \cos \alpha$

$\frac{24x}{25 \sin \alpha} = 13$

$\frac{12x}{\sin \alpha} = 13$

$\frac{26}{726}$   
 $\frac{156}{+ 52}$   
 $\frac{676}{\dots}$

$520 + 120 + 36$   
 $640 + 36$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$182 = \sqrt{49x^2 + 49} \cdot \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$13 \cdot 2 \cdot 7$$

$$26 = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{298x^2 + 49}$$

$$\begin{array}{r} 182 \\ \times 182 \\ \hline 364 \\ 1756 \\ + 182 \\ \hline 33124 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3329 \\ \times 49 \\ \hline 2601 \\ + 156 \\ \hline 14161 \end{array}$$

$$(50-1)(50+1) = 2500 - 100 + 1 = 2401$$

$$33124 = 33124x^4 + 33124x^2 + 2901x^2 + 2401$$

$$26 =$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (-9x)$$

$$\frac{9x+1}{x=1/9}$$

$$a=b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$3x^2 - 6x + 2 = a$$

$$1 - 9x = b$$

$$3x^2 + 3x + 1 = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b$$

$$a + a - b - 2\sqrt{a^2 - ab} = b^2$$

$$2a - b - b^2 = 2\sqrt{a^2 - ab}$$

$$4a^2$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ + 289 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$9x - 2 = -2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$81x^2 - 36x + 4 = 4(3x^2 - 6x + 2)$$

$$81x^2 - 36x + 4 = 12x^2 - 24x + 8$$

$$69x^2 - 12x - 4$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$

$$4(3x^2 + 3x + 1) = 81x^2$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} 276 \\ + 36 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 280 \\ - 4 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 104 \\ 52 \end{array}$$