



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$   
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$   
 $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$

Найдите значение выражения  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ .

Посмотрим на разложение исх на простое умножение:

$$a = 2^x \cdot 7^n \dots; b = 2^y \cdot 7^m \dots; c = 2^z \cdot 7^k \dots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ab = 2^{x+y} \cdot 7^{n+m} \dots; bc = 2^{y+z} \cdot 7^{m+k} \dots; ac = 2^{x+z} \cdot 7^{n+k} \dots$$

Уч. условие:  $x+y \geq 15$  (тк.  $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$ );  $y+z \geq 17$ ;  $x+z \geq 23$ . Тогда (суммируем)

$$2x+2y+2z \geq 55 \Rightarrow x+y+z \geq 27,5 \text{ (но } x+y+z - \text{ целое)} \Rightarrow x+y+z \geq 28$$

Прич. заметим, что  $n+k \geq 39$  (тк.  $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$ )  $\Rightarrow n+m+k \geq 39$

$$(a = 2^x \cdot 7^n \cdot a_1; b = 2^y \cdot 7^m \cdot b_1; c = 2^z \cdot 7^k \cdot c_1.)$$

$$ab \cdot c = 2^{x+y+z} \cdot 7^{n+m+k} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$$

$$\text{При этом } a_1 \geq 1; b_1 \geq 1; c_1 \geq 1 \Rightarrow a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \geq 1 \Rightarrow ab \cdot c \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Пример:  $a = 2^{10} \cdot 7^{11}; b = 2^5 \cdot 7^8; c = 2^{13} \cdot 7^{28} \Rightarrow ab = 2^{15} \cdot 7^{19}; bc = 2^{18} \cdot 7^{28}; ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{19}; bc: 2^{18} \cdot 7^{28}; ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ч.в.з.

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.  $\frac{a}{b}$  - несократима  $\rightarrow (a; b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$  можно сократить на  $m \Rightarrow a+b : m$  и  $a^2-7ab+b^2 : m$

$$\frac{a^2+2ab+b^2 : m}{(a^2-7ab+b^2) : m} \rightarrow \frac{(a+b)^2 : m}{(a^2-7ab+b^2) : m}$$

$$gab : m$$

Предположим, что  $a$  и  $m$  делятся на какое-то  $p$ .

$\Rightarrow (a; m) \neq 1$ . Тогда  $b = mk - a$  также делится на это  $p$ . Но это значит,

что  $(a; b) \neq 1 \Rightarrow$  не должны оба делиться на какое-то число. Тогда

получаем  $(a; m) = 1$ . Аналогично и  $(b; m) = 1$ . Но  $gab : m$ , при этом

$$(a; m) = 1 \wedge (b; m) = 1 \Rightarrow g : m \Rightarrow m \leq g$$

Пример где  $m=9$ :  $a=1$ ;  $b=8$

$$\frac{1}{8} \text{ несокр.}; \frac{1+8}{1-7 \cdot 8 + 8^2} = \frac{9}{1-56+64} = \frac{9}{9} - \text{сократить можно и числа.}$$

и получим на  $m=9$

Ответ:  $m=9$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

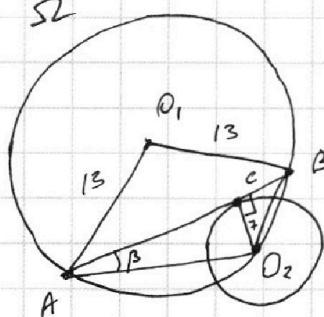
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



$$\angle O_2CB = 90^\circ, \text{ тк } AB \text{ кас. } O_2$$

Оп.  $\Delta 2$  - это опис. окр - тв  $\Delta AO_2B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left( R = \frac{a}{2 \sin \alpha} \right) \quad 13 = \frac{AB}{2 \sin \alpha}$$

$$\angle A O_2 B = \alpha \\ AC = 13x, CB = 7x$$

$$13 = \frac{24x}{2 \sin \alpha}$$

$$\angle BAO_2 = \beta$$

$$\sin \beta = \frac{CO_2}{AO_2} = \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}}$$

$$BO_2 = \sqrt{CB^2 + CO_2^2} = \sqrt{49x^2 + 49} = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

$$13 = R = \frac{BO_2}{2 \sin \beta} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2 \cdot \frac{7}{\sqrt{289x^2 + 49}}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{289x^2 + 49}}{7}$$

$$13 = \frac{\sqrt{x^2 + 1} \sqrt{289x^2 + 49}}{2} \quad t = x^2$$

$$26 = \sqrt{t+1} \sqrt{289t+49}$$

$$676 = 289t^2 + 289t + 49t + 49$$

$$289t^2 + 338t + 627 = 0$$

$$(t-1)(289t+627) = 0$$

$$\begin{cases} t=1 & t=x^2, x>0 \Rightarrow x=1 \\ t=-\frac{627}{289} < 0 & \end{cases}$$

$$AB = AC + CB = 13x + 7x = 24x$$

$$AB = 24$$

Ответ:  $AB = 24$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$Y. \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Переоделим:

$$a = 3x^2 - 6x + 2$$

$$b = 3x^2 + 3x + 1 \implies \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$a - b = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\textcircled{1} \quad \left[ \begin{array}{l} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{array} \right]$$

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{a} = \sqrt{b} \implies a = b$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 = 9x$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\text{Проверим: } \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\cancel{\frac{1}{27}} + 1 \frac{1}{3}} - \sqrt{\cancel{\frac{1}{27}} + 1 \frac{1}{3}} = 0$$

$$\text{т.е. } x = \frac{1}{9} \text{ подг.}$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

$$4. \ 69x^2 - 12x - 4 = 0$$

~~$x^2 = 12x + 4$~~

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36+276}}{69} = \frac{6 \pm \sqrt{312}}{69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{9}; x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

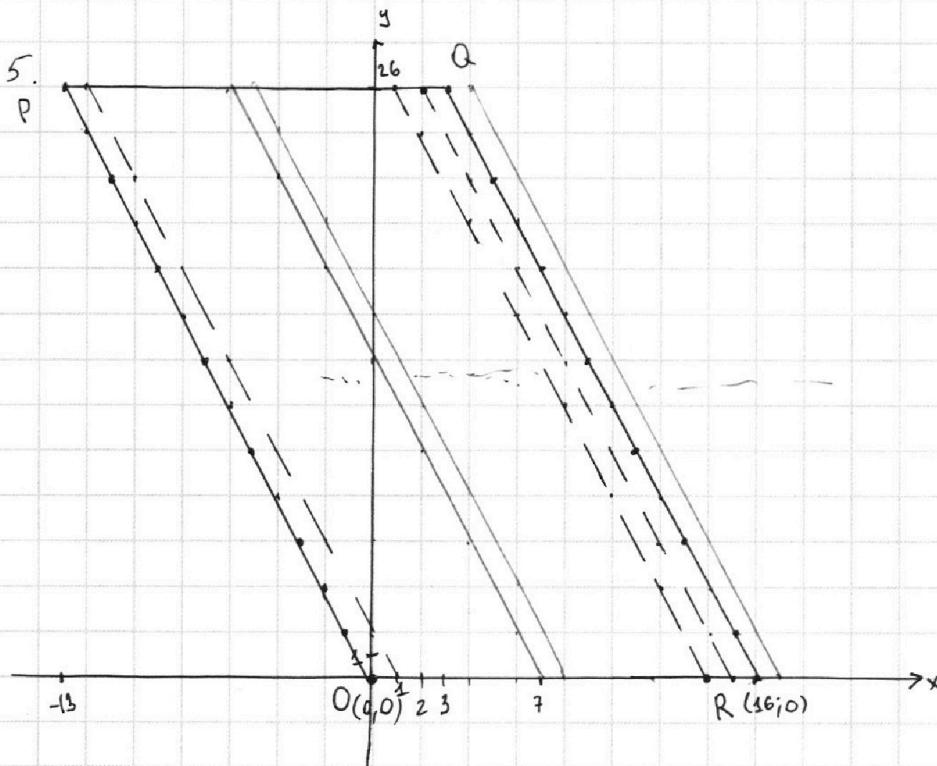
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заменим, что, если нам дана  $(.)A(x_i, y_i)$ , то  $B$  может лежать на

прямой  $2x_2+y_2-(14+2x_1+y_1)=0$ . Так же заметим, что  $2x_1+y_1=\text{const}$  это

также какая-то прямая. Получаем, если мы возьмем любую точку на

прямой  $2x_2+y_2-(14+\text{const})=0$ . Так же эти прямые параллельны, тк

$k_1=-\frac{2}{1}$  и  $k_2=-\frac{2}{1} \Rightarrow k_1=k_2$ . Что еще приятнее, эти прямые будут

параллельных сторонам нашего параллелограмма PO и QR

(ур-е прямой, содержится  $PO: \frac{x-0}{0+13} = \frac{y-0}{0-26} \Rightarrow -2x-y=2x+y=0 \quad k=-\frac{2}{1} \Rightarrow$  паралл.,  
а значит параллельно и QR, тк  $PO \parallel QR$ )

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим каждую мультируную линию (см. рис.) — это прямая, параллельная  
сторонам картали. и проходящая через точки с цел. коорд. внутри него (сторона  
параллелограмма тоже одна или двойная). Будем рассматривать  
“слева направо” — первая будет РО, последней QR. Будем смотреть  
на этих прямых точку А в точках с цел. координатами. Куда должна  
быть поставлена точка А на прямую, будем получаться однозначно,  
т.к. у этой прямой  $k$  (угл. коэффиц.) такой же, как у  $14+2x_1+y_1$ .

Д-бо: нумер. прямая:  $2x_1+y_1+c_1=0$

$$14+2x_1+y_1 = 14 - c_1 - y_1 + y_1 = 14 - c_1 \text{ — константа}$$

Тогда для каждой точки ее угл. прямой ей соответствует  
прямая  $2x_2+y_2=\text{const} \Rightarrow$  любая прямая (мультирующая) соответствует другой  
прямой. Осталось рассмотреть, какие из них лежат ~~внутри параллелограмма~~.  
Рассмотрим первую прямую (точка доставки может лежать ~~внутри~~ на ней):

$$14+2 \cdot 0+0=14. \text{ Вторая: } 14+2 \cdot 1+0=16. \text{ Третья: } 14+2 \cdot 2+0=18. \text{ Последняя: } 14+2 \cdot 6+0=$$
$$= 46.$$

Тогда первой будет соответствовать прямая  $2x_2+y_2=14$ . Второй:  $2x_2+y_2=16$ .

Третьей:  $2x_2+y_2=18$ . Последней:  $2x_2+y_2=46$ . Я нарисовала их синим  
цветом на картинке. Заметим, что после прямой  $2x_2+y_2=32$  все прямые  
уже не лежат ~~внутри~~ параллелограмма (Ей соответствует 10 мультирующих  
линий)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда у нас всего 10 пар прямых, на которых может  
 $(13+1)$   
лежать A и B. Всё вместе на каждой прямой у нас всего 14 точек  
с условиями подделивши. Из одной пары соответствующих прямых  
у нас всего получается  $14 \cdot 14 = 196$  пар точек. И таких пар  
соответствующих прямых у нас всего  $10 \Rightarrow$  в сумме у нас  $196 \cdot 10 =$   
 $= 1960$  пар таких точек

Отв: 1960.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

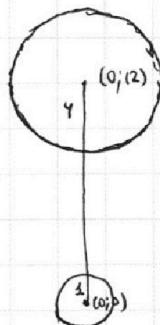
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.  $\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$

ур-е окр-ти  
о центром  $(0,0)$  и  $r=1$

ур-е окр-ти  
о центром  $(0,12)$  и  $r=4$



если точка находится внутри окр., то  
 $x^2+y^2-1 < 0$ , если вне окр. то  
выше

если точка находится внутри окр., то

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r^2 < 0$$

$$\text{на окр-ти: } (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r^2 = 0$$

$$\text{Вн: } (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r^2 > 0$$

При этом  $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \Rightarrow$

точка должна находиться вне одной из окр-ти и внутри (или на другой) (первое условие необяз. при условии 2, тк. окр-ти не имеют общих точек).

$ax+y-8b=0$  — прямая. Заметим, что, если прямая имеет с окр.

$\geq 2$  точек, то имеет беск. число точек  $\Rightarrow$  нам не подх.

$\Rightarrow$  прямая может только касаться окружностей (тогда имеет 1 общую точку). А нам подходит система синых 2 решений  $\Rightarrow$  прямая должна касаться 2 окр-ти.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

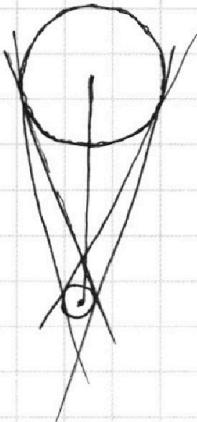
7

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### 6. Продолжение:



Тогда наше уравнение - нас. в 2 ур-ки

$$\begin{cases} ax_0 + y_0 - 8b = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ x_0^2 + (y_0 - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

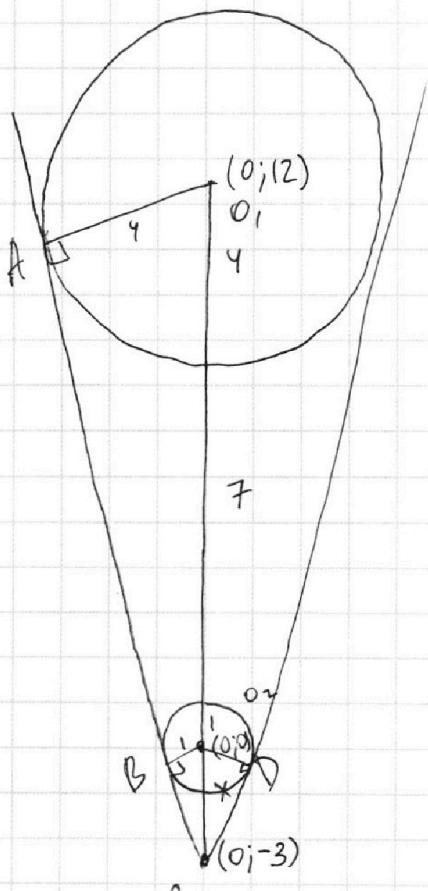
Система из 3 ур-к с 3 неизвестными -  
осталось всего лишь решить её

$$\underbrace{x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 144 = 16}_1$$

$$-2y_0 + 145 = 16$$

$$2y_0 = 129$$

$$y_0 = \frac{129}{24}$$



$$\frac{12+x}{4} = \frac{x}{1}$$

$$12+x=4x \Rightarrow x=3$$

$$a \cdot 0 - 3 - 8b = 0$$

$$b = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{ax+y-\frac{3}{8}}{8} = 0$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 1$$

$$ax_0 + \sqrt{1-x_0^2} = \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{1-x_0^2} = \sqrt{\frac{9}{64} + x_0^2}$$

ABC P222-12

$$\begin{aligned} O_2K &= \sqrt{144 - 9} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15} \\ AB &= \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

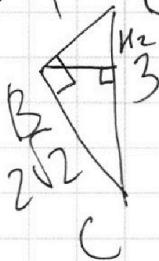
- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение

6. 1  $O_2$



$$K_2 = \frac{2\sqrt{2} \cdot 1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$OK_2 = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$$

координаты  $B - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

$$a \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \frac{1}{3} - \frac{3}{8} = 0$$

$$a \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{8+9}{24}$$

$$a = \frac{\frac{17}{24}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$a = -\frac{17 \cdot 3}{8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{a = -\frac{17}{16\sqrt{2}} \quad b = -\frac{3}{8}}$$

координаты  $D - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

$$a \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{3}{8} = 0$$

$$\boxed{a = -\frac{17}{16\sqrt{2}} \quad b = -\frac{3}{8}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

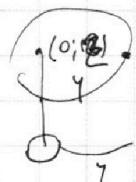
7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + (y-12)^2 = r^2$$

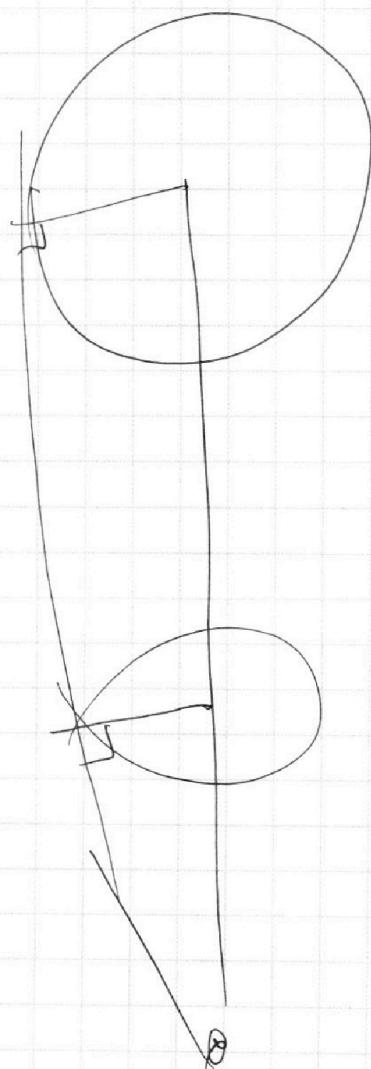
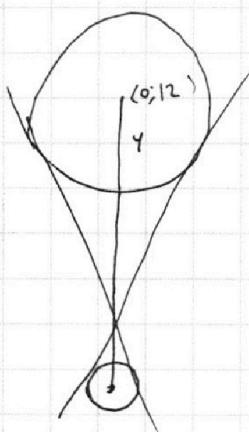


$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2$$

$$16 =$$

$$16 + 0 = 16$$

бесконечн.:  $\leq 0$   
бескн.:  $\geq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

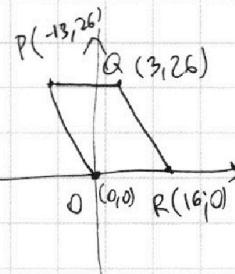
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-2x_1 - y_1 + 2x_2 + y_2 = 14$$
$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$kx_1 + y_1 + 2x_2$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$0,0$$

$$7,0$$

$$0,-14$$

$$2x_2 + y_2 = 14$$

$$7,0$$

$$0,14$$

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{-26}$$
$$-2x = y$$
$$2xy = 0$$

17

$$\begin{array}{ll} 14 & 1 \\ 16 & 2 \\ 18 & 3 \\ 20 & 4 \\ 22 & 5 \\ 24 & 6 \\ 26 & 7 \\ 28 & 8 \\ 30 & 9 \\ 32 & 10 \\ 34 & \\ 36 & \\ 38 & \\ 40 & \\ 42 & \\ 44 & \\ 46 & \\ 48 & \\ 50 & \end{array}$$

$$\frac{x-16}{13} = \frac{y}{-26}$$
$$-2x + 32 = y$$
$$2xy - 32 = 0$$

$$\begin{array}{ll} 16 & \\ 14, 16, \dots, 46 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 14, 32, 0 \\ 14, 46 \\ 14, 6, 26 \\ 76 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 14 - 2 + 2 \\ 16 - \dots \end{array}$$

$$2x_2 + y_2 = 14$$

$$14 \cdot k = -2$$

$$ax + by + c = 0$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$by = -ax - c$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & & & & \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{13}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{56} \cdot 7^{68}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{37}$$

$$\begin{array}{c} 2^{28} \cdot 7^{37} \\ \boxed{2^{28} \cdot 7^{39}} \end{array}$$

$$2^{15} \cdot 7^{11} \quad 2$$

$$\begin{aligned} a &= 7^{18} \cdot 2^{15} \\ b &= 2^9 \\ c &= 7^{21} \cdot 2^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b+c &\geq 15 \\ b+c &\geq 17 \\ a+c &\geq 23 \\ a+b+c &\geq 28 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} 10 \\ 5 \\ 13 \end{array}$$

$$\frac{a}{b} \text{ несупр. } (a/b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$1-1$$

$$a+b:m \quad a^2 + 2ab + b^2:m$$

$$a^2 - 7ab + b^2:m$$

$$a+b=mk$$

$$9ab:m$$

$$9a(mk-a):m$$

$$9(mk-1):m$$

$$m=9$$

$$\begin{array}{c} (20-3)(20) \\ 400-120 \end{array}$$

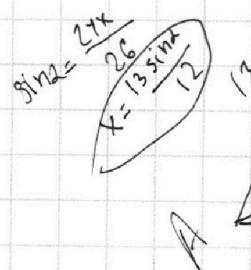
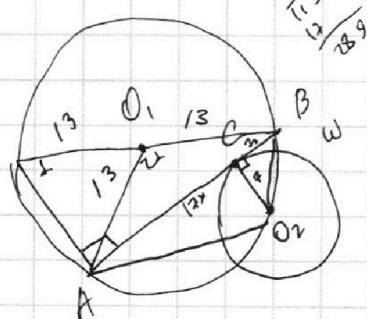
$$\begin{array}{c} 24 \\ 96 \\ 48 \\ 576 \\ 624 \\ 45 \\ 62 \end{array}$$

$$780+80+16$$

$$560+16$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 285 \\ 1 \\ 45 \\ 33 \end{array}$$

52



O<sub>2</sub>A

$$\sqrt{289x^2 + 45}$$

O<sub>2</sub>B

$$(24x)^2 = 298x^2 + 45 + 45x^2 + 45 + 2 \cdot \sqrt{298x^2 + 45} \cos 2x$$

$$576x^2 = 347x^2 + 90 + 2\sqrt{298x^2 + 45} \cos 2x$$

$$229x^2 - 98 = 2\sqrt{298x^2 + 45} \cos 2x$$

O<sub>1</sub> 13

$$\begin{aligned} \frac{24x}{2 \sin x} &= 13 \\ \frac{12x}{\sin x} &= 13 \\ 12x &= 13 \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} 26 \\ 726 \\ 152 \\ 62 \end{array}$$

$$12x = 13 \sin x$$

$$520+120+16$$

$$640+16$$

