



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Объем: $2^{26} \cdot 7^{37}$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$

$\min abc = ?$

1) Заметим, что т.к. $ac: 7^{37}$, то и $abc: 7^{37}$

2) $ab \cdot ac \cdot bc = (abc)^2: 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37} = 2^{51} \cdot 7^{64}$

Отсюда $abc: 2^{26}$, если $abc \neq 2^{26}$, то ст. входящих 2-ки $a^2 b^2 c^2$ не больше 50.

Значит $abc: 2^{26} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{10}$ $b = 2^5$ $c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

Тогда $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{27}$

$ac = 2^{21} \cdot 7^{37}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$. Все сошлось.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

Ответ: 8

$(a; b) = \text{НОД}(a; b)$
выб., что $(a; b) = (a; b + a \cdot k)$ - трив. св-во НОД

т.к. $\frac{a}{8}$ - несократимая, то $(a; b) = 1$. Итого

$(a; a+b) = 1$ и $(b; a+b) = 1$, тогда $(ab; a+b) = 1$

Заметим, что если $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$ сокр. на m , то

$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = m^2 \cdot \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = (a+b)^2 - 4ab$$

$$(a+b; (a-b)^2 - 4ab) = (a+b; -(a+b)^2 + (a-b)^2 - 4ab) =$$

$$= (a+b; -a^2 - b^2 - 2ab + a^2 + b^2 - 2ab - 4ab) =$$

$$= (a+b; 8ab)$$

Выше мы доказали, что $(a+b; ab) = 1$.

Поэтому $(a+b; 8ab) \leq 8$. То есть $m \leq 8$.

$$(a+b; 8)$$

Пример:

$$a=6 \quad b=2$$

$$\frac{6+2}{36 - 6 \cdot 6 \cdot 2 + 2^2} = \frac{8}{40 - 72} = \frac{8}{32} \quad \text{— сократимо на 8.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

Данными образом разделим левую часть на $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$

Получим:

$$\frac{2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

$$\frac{-7x+2}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

Проверка: $x=3,5$ - не подходит \Rightarrow можно делить на $2-7x$

$$\frac{-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 1$$

$$-1 = \underbrace{\sqrt{2x^2-5x+3}}_0 + \underbrace{\sqrt{2x^2+2x+1}}_0 \quad (?) \quad \text{Значит нет решения.}$$

При делении на $2-7x$ область определ. уменьшилась на $\{3,5\}$,

но $3,5$ - не подходит, т.к. можно подставить и не сойдется, а

при делении на $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$ область определения не уменьшилась, т.к.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

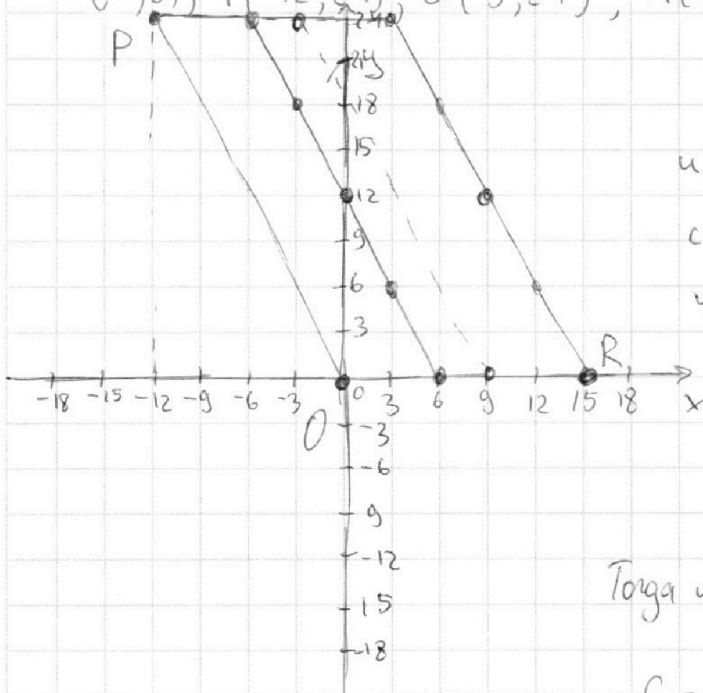
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5.

Ответ: 1690 пар.

$O(0;0); P(-12;24); Q(3;24); R(15;0)$

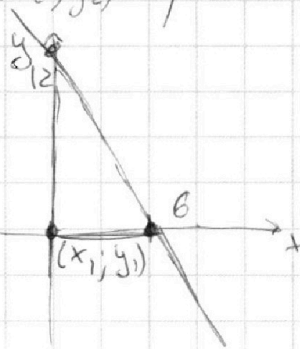


Пусть мы выбрали $(\cdot)(x_1; y_1)$
и хотим найти, какие $(x_2; y_2)$
с целыми коорд. удовлетворяют
условию $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

Запишем $x_1; y_1$, НУО: $x_1 = 0$
 $y_1 = 0$

$$2x_2 + y_2 = 12 \quad y_2 = 12 - 2x_2$$

Тогда мы-во $(\cdot)(x_2; y_2)$ - прямая:



Тогда заметим, что для любой целой
точки на PO такая прямая совпадает,
т.е. $\forall (\cdot)$ целой $\in PO$ кол-во целых,
удовлетворяющих условию одинаково.

Аналогично \forall целых $(\cdot) \in (1;0); (-11;24)$ кол-во целых равно
и равно кол-вам для \forall целых на PO , так как параллельный
перенос. Заметим, что для точек \in параллелограмме $\#$
 $OPQR$, правее $(9;0); (-3;24)$ нет точек, удовлетворяющих условию
вино (очевидно из картинки). Итого $\forall (\cdot)$ целой в параллелогра-
мме $P, O, (9;0); (-3;24)$ количество подходящих в параллело-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 (продолжение).

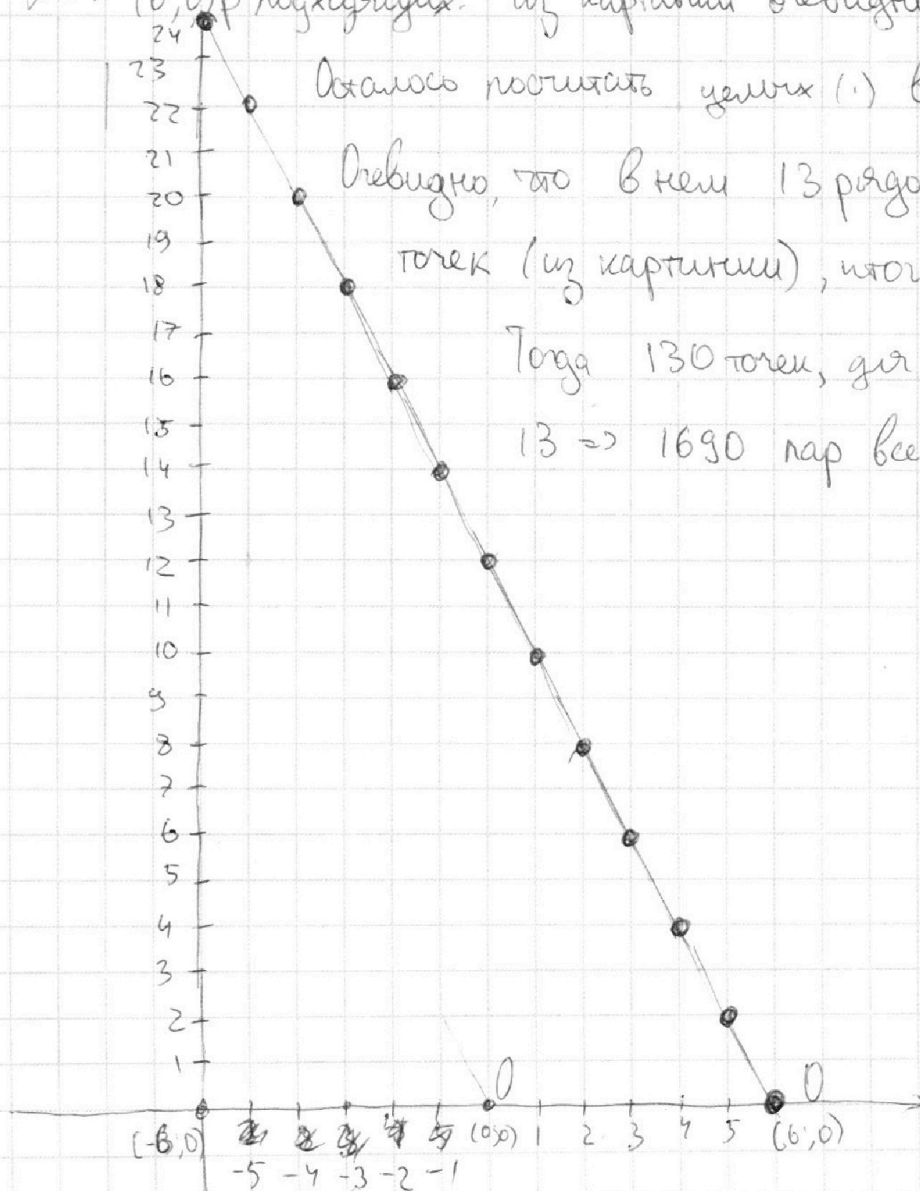
границе $OPQR$ одинаково и подходящие есть только у
этих точек. \Rightarrow достаточно посчитать кол-во подходящих
для $(\cdot) (0;0)$ и умножить это на кол-во точек (\cdot) в
параллельно границе $OP(9;0)(-3;24)$.

Для $(0;0)P$ подходящих: из картинки очевидно, что их 13.

Осталось посчитать точек (\cdot) в $OP(9;0)(-3;24)$,

Очевидно, что в нем 13 рядов по 10 точек
точек (из картинки), итого 130.

Тогда 130 точек, для каждой подходит
13 \Rightarrow 1690 пар всего.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 < 0 & (2) \\ (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

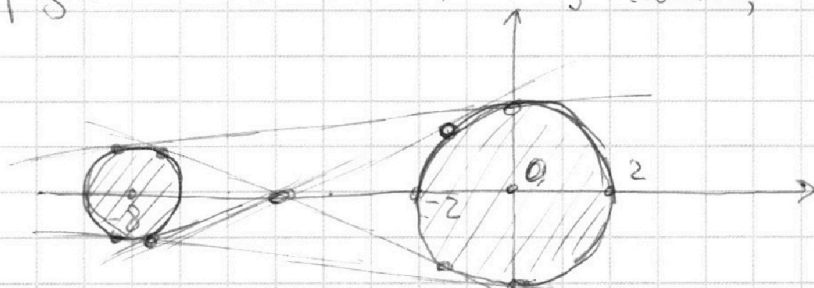
Посмотрим на (1) $(x; y)$ удовлет-

воряющие (2).

Заметим, что $x^2 + y^2 - 4 = 0$ - оир. радиуса 2 с центром в $(0; 0)$

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$ - оир. радиуса 1 с центром в $(-8; 0)$.

Окружности разделим м-во на 3 части, висящей



одинаковые знаки (т.к. знак ме-

няется при переходе через окружность). Тогда заметим,

что выражение отриц. внутри оир. Тогда мн-во ~~(1)~~ удовлет-

(2) это 2 круга. Заметим, что (1) - прямая. Прямая имеет

2 общие точки с 2 кругами тогда и только тогда, когда

она - общая касательная. Осталось посчитать ~~2~~ общие

касательные.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

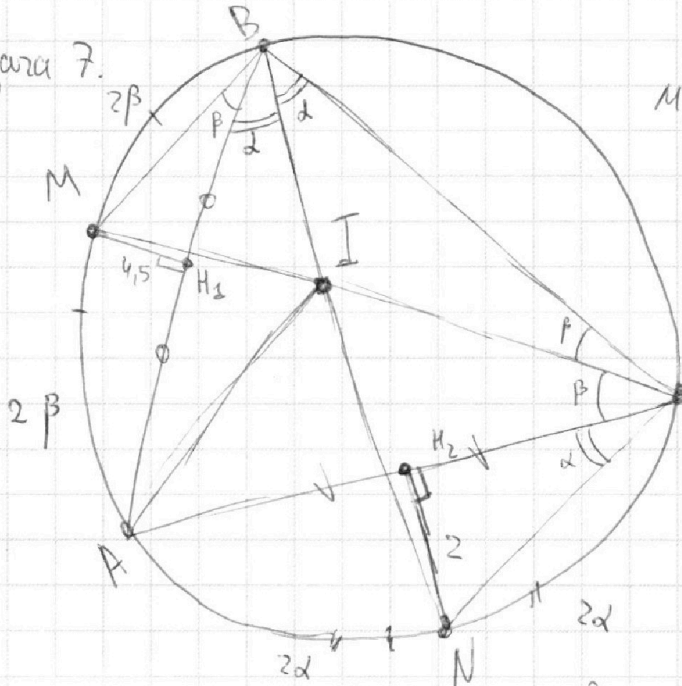
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



$$MH_1 = 4,5$$

$$NH_2 = 2$$

Заметим, что B, I, N -
на одной прямой, т.к.

BN - диаметр $\angle ABC$,
аналогично C, I, M - на
одной прямой.

$$BH_1 = \frac{MH_1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{4,5}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$\text{Значит } BA = 2 \cdot BH_1 = \frac{9}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$AC = 2 \cdot CH_2 = 2 \cdot \frac{NH_2}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{\operatorname{tg} \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = ((a-3b)^2 - 8b^2; a+b)$$

$$((a-b)^2 - 4ab; a+b) = m$$

$$AC:BC=7$$

$$((a-b)^2 - (a+b)^2 - 4ab; a+b) = m$$

$$((a^2 + b^2 - 2ab - a^2 - b^2 - 2ab - 4ab; a+b) = m$$

$$(-8ab; a+b) = m$$

$$7x^2 = 25 - y^2$$

$$(8ab; a+b) = m$$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (a+b, a) = 1 \text{ и } (a+b, b) = 1$$

$$(a+b, ab) = 1 \Rightarrow (8ab, a+b) = m$$

$$\max = 8$$

$$(8, a+b) \leq 8$$

$$a+b$$

$$\frac{5+3}{25 - 6 \cdot 5 + 9} = \frac{8}{34 - 30} = 2$$

$$6+2$$

$$36 - 6 \cdot 6 + 4$$

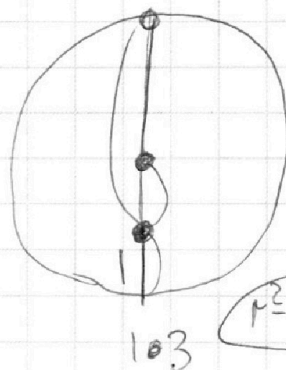
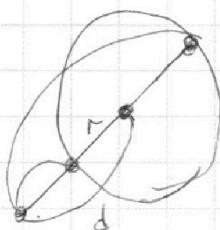
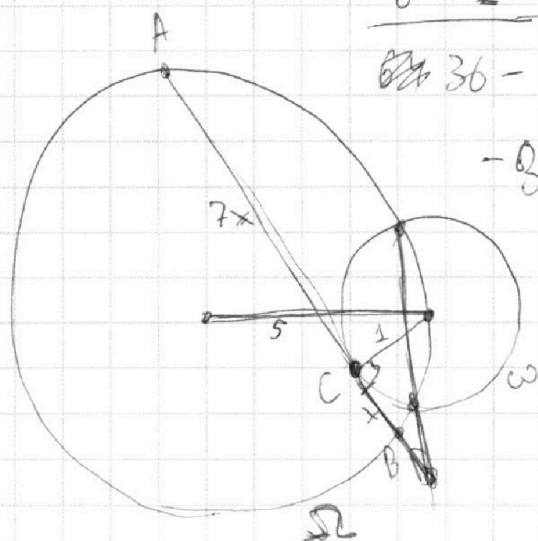
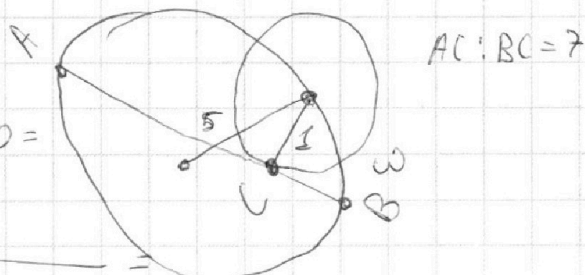
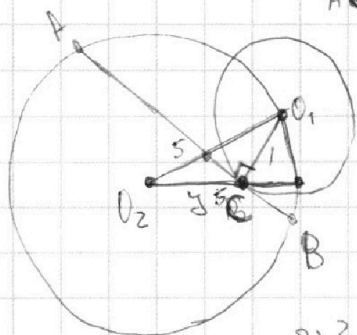
$$-36 + 4 = -32$$

$$R_\omega = 1$$

$$R_\Omega = 5$$

$$(d-r)(d+r) = \sqrt{d^2 - r^2}$$

$$r^2 = d^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{14} 7^{10}$$

$$bc: 2^{12} 7^{17}$$

$\frac{a}{b}$ - несократима

$$ac: 2^{20} 7^{37}$$

$abc \min$

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$4^7 b^7 c^2: 2^{53} 7^{64}$$

$$2^{36+17} = 2^{53}$$

$$\max m: a+b: m$$

$$a^2-6ab+b^2: m$$

$$abc: 2^{26} 7^{32}$$

54

51 (26)

$$54:2=27$$

$$a^2-6ab+b^2 = (a-b)^2 - 4ab$$

$$a_2 + b_2 \geq 16$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$\Rightarrow c_2 - a_2 = 1 \Rightarrow c_2 = a_2 + 1$$

$$(a-b, a) = 1$$

$$(a-b, b) = 1$$

$$a_2 + b_2 \geq 14$$

$$(a-b, ab) = 1$$

$$a_2 + c_2 \geq 20 \Rightarrow 2a_2 + 1 = 20$$

$$+ a_2 + c_2 \geq 20$$

$$a_7 + b_7 = 10$$

$$a_2 = 10$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$a_7 + c_7 = 37$$

$$b_2 = 7$$

$$2 \Sigma \geq 51$$

$$b_7 + c_7 = 17$$

$$\Sigma \geq 26 \quad 31$$

$$c_7 - a_7 = 7 \Rightarrow c_7 = a_7 + 7$$

$$2a_7 + 7 = 37$$

$$a_7 = 15$$

$$c_7 = 22$$

$$a + c = 37$$

$$c_2 = a_2 + 3$$

$$a \geq 10$$

$$2a_2 + 3 = 20$$

$$b \geq 17$$

$$14 + 12$$

$$a_2 = 9$$

$$b_2 = 5$$

$$c_2 = 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 = 4x^4 - 8x^3 - 2x^2 + x + 3$$

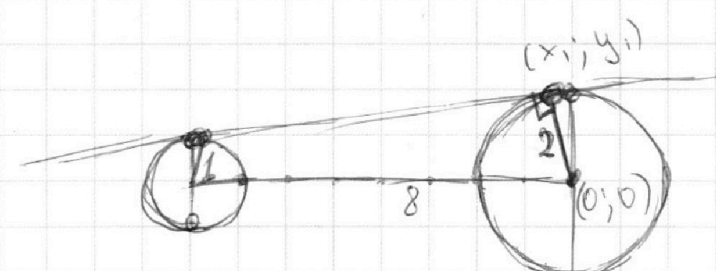
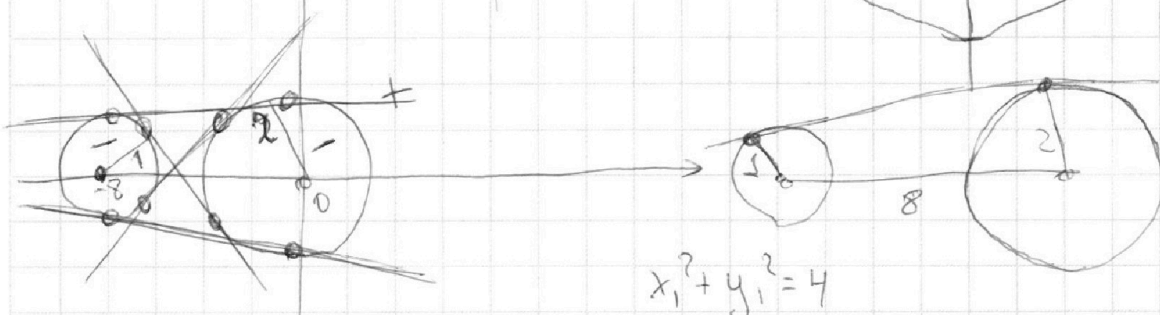
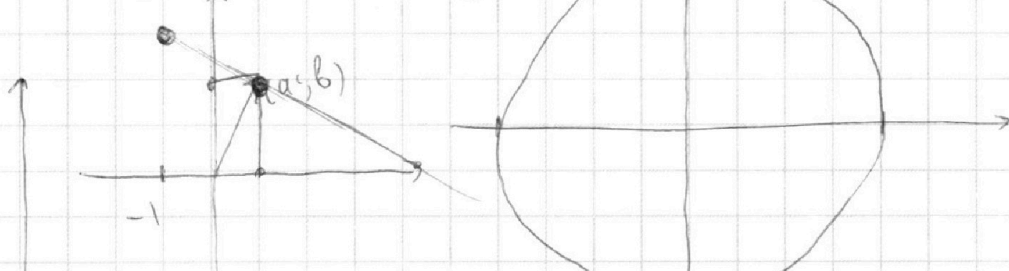
$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 7x = 2 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\begin{array}{r}
 3,5 \\
 3,5 \\
 + 3,5 \\
 \hline
 10,5 \\
 12,25 \\
 24,5 - 5 \cdot 3,5 + 3 = \\
 = 2 + 3 = 10 \\
 17,5
 \end{array}$$

$$\begin{cases}
 ax - y + 10b = 0 \\
 ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0
 \end{cases}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1 \quad ax + by + c$$

$$\begin{array}{l}
 x + 2y + 1 = 0 \\
 1 + 2 \cdot 2 - 1 \\
 \sqrt{10} \\
 24,5 + 7 + 1 =
 \end{array}$$



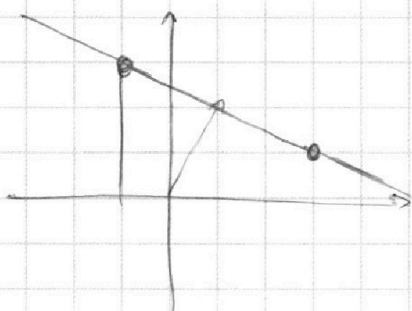
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(1; 2)

13

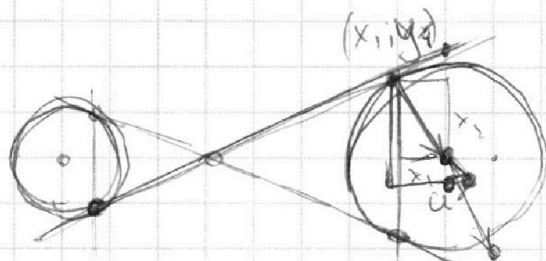
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-2}$$

$$x+1 = -2y+6$$

$$x+2y-5=0$$

$ax-y+10b=0$ - ось абсцисс
касательная.



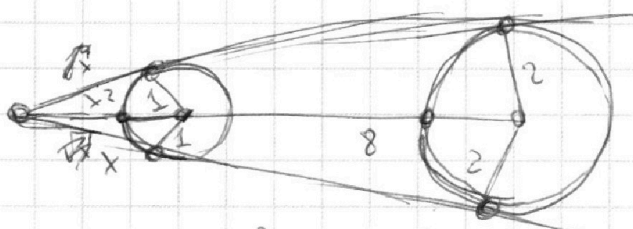
$(-x_1; -y_1)$

$$-x_1x - y_1y + c = 0$$

$$-x_1x - y_1y + c = 0$$

$$x_1x + y_1y + c = 0$$

$$\begin{cases} x_1x + y_1y + c = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 = 2 \end{cases}$$



$$x^2+6+2-2x^2+12=(x+8)^2$$

(-1)

$$x, x+y, y+c = (x+8)^2+y^2-1 \quad (a, -1) \text{ - нормаль}$$

$$ax-y+10b = x^2+y^2-4$$

$$ax-y+10b = (x+8)^2+y^2-1 = x^2+16x+64+y^2-1$$

$$ax - x^2 + 10b + 4 = y^2 + y$$

$$ax - x^2 + (a-16)x - x^2 + 10b - 63 = y^2 + y$$

$$(a-16)x - x^2 + 10b - 63 = ax - x^2 + 10b + 4$$

$$-16x = 69$$

$$x = -\frac{69}{16}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-2x$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-2x \\ & \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} + 2-2x \\ & \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-2x + \sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2+2x+1} \\ & \sqrt{2x^2-5x+3} = \frac{-7x+2}{\sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-2x \end{aligned}$$

$$D = 4 - 12 < 0$$

$$-\frac{2}{4} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \quad 25 - 24 = 1$$

$$2x^2 + 1$$

$$\frac{5 \pm 1}{4} = 1$$

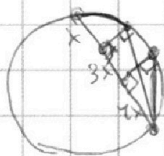
$$= 1,5$$

$$x \in (1; 1,5)$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + 7x = 2 + \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 49x^2 + 2 \cdot 7x \cdot \sqrt{2x^2-5x+3} = 4 + 2x^2 + 2x + 1 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$51x^2 - 5x + 3 + 14x \sqrt{2x^2-5x+3} = 2x^2 + 2x + 5 + 4 \sqrt{2x^2+2x+1}$$



$$2x^2 + 2x + 1 = \sqrt{(x+1)^2 + x^2}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x-a)^2 + (x-b)^2$$

$$\sqrt{3}$$

$$2$$

$$2$$

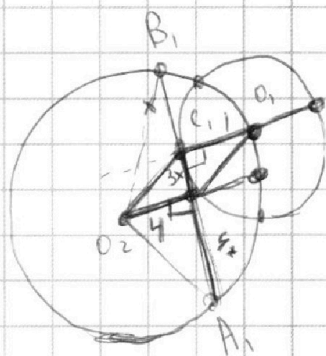
$$8 + 4 + 1$$

$$2 - 2 + 1$$

$$2(a+b) = 5 \quad a^2 + b^2 = 3$$

$$1 \quad 2 - 5 + 3$$

$$2 + 2 + 1 = 5$$



$$-1 \quad 2x^2$$

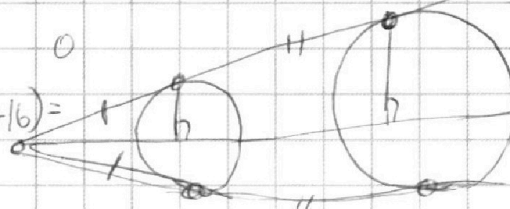
$$7x^2 = 5^2 - (9x^2 + 16) = 1$$

$$2 - 2 + 1$$

$$2 + 5 + 3 = 10$$

$$9x^2 = 25 - 16 - 9x^2$$

$$16x^2 = 9$$



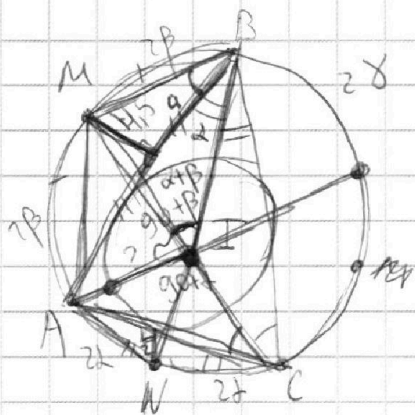
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

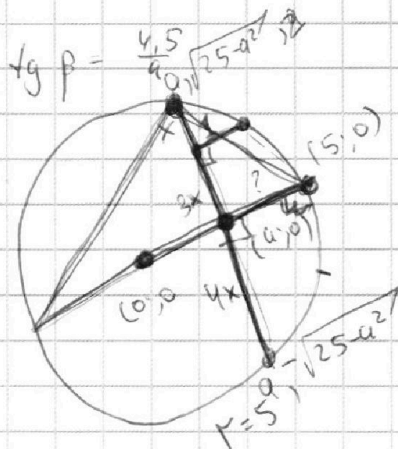


$$4\beta + 2\alpha$$

$$a = \frac{4,5}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$AB = \frac{9}{\operatorname{tg} \beta}$$

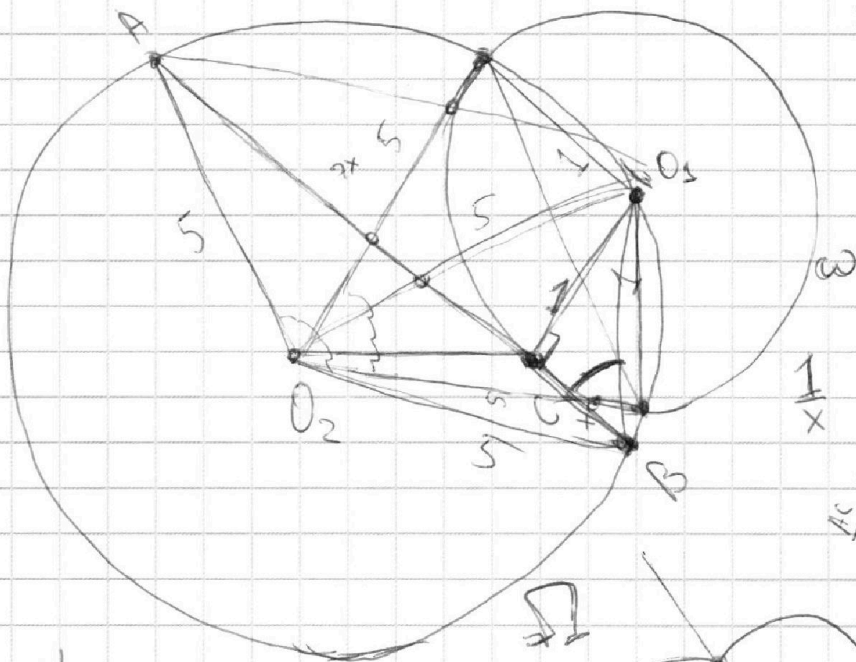
$$AC = \frac{4}{\operatorname{tg} \alpha}$$



$$AB = ? \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$5^2 - a^2 + y^2 = 25$$

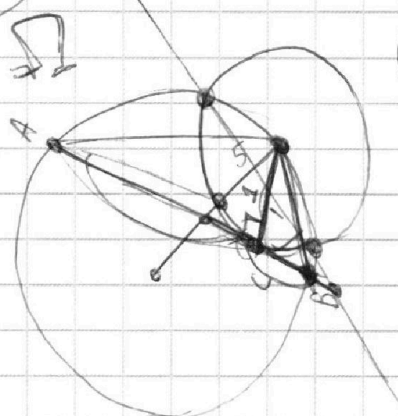
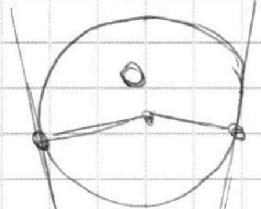
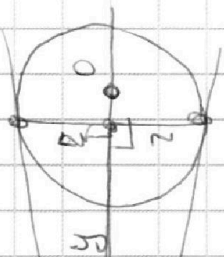
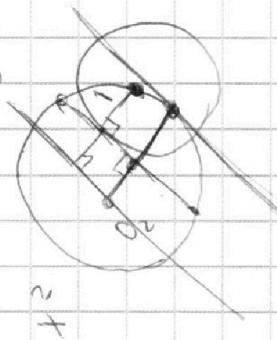
$$y = \pm \sqrt{25 - a^2}$$



$$\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{7x}$$

$$\frac{AC}{CB} = 7$$



$$x^2$$

$$\sqrt{2+x}$$

