



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Задумали, что м.к. $ab : 2^{14}7^{10}$, $bc : 2^{17}7^{17}$, $ac : 2^{20}7^{32}$, то
 $ab = \text{минимум } 2^{14}7^{10}$, $bc = \text{минимум } 2^{17}7^{17}$, $ac = \text{минимум } 2^{20}7^{32}$.

Проверка $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = \text{минимум } 2^{(14+17+20)}7^{(10+17+32)} = 2^{51}7^{64}$

Однако задумали, что м.к. $a^2 b^2 c^2 - \text{квадрат } abc$, степени простых делителей должны быть четными. Значит 2 входит не в 51 степени, а в 52 . При этом в abc минимум должно входить 7^{37} , так как $abc : ac$.

Значит, abc минимум = $2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример:

$$a = 2^3 \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{12}7^{27}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{27}$$

$$ac = 2^{24} \cdot 7^{37}$$

Получаем

$$\text{Ответ: } 2^{26}7^{37}$$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

Если $a+b : m$, то и $8ab : m$. Нужно найти макс. m .

m не имеет общих делителей с a или b , иначе $a+b : m$, т.е. второе число делится на делитель первого (т.е. если m и a делятся на некоторое p , то $a+b : m$, то есть $: p$. Значит $b : p$, т.к. $a : p$, чего не может быть по условию)

$8ab : m$. Тут эти же ab и m не имеют общих делителей, а значит $8 : m$.

Из этого следует, что максимальное $m = 8$.

Пример: $a = 1 \quad b = 7$

$$\frac{1+7}{1^2-6 \cdot 1 \cdot 7 + 49} = \frac{1+7}{1-42+49} = \frac{1+7}{8} = \frac{8}{8} \text{ можно сократить на } 8.$$

Ответ: $m = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

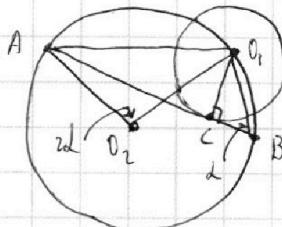


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3)



Обозначим CB за x, тогда AC = 7x.
 $\angle O_1CB = 90^\circ$, $O_1B^2 = x^2 + 1^2$ (^{по касательной})
 $O_1C^2 = 49x^2 + 1$ (аналогично)

Допустим, $\angle ABO_1 = 2d$, тогда $\angle ACO_1 = 2d$,
т.к. т. центральный

Запишем т. косинусов для $\triangle AD_1O_1$.

$$5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 2d = 49x^2 + 1$$

$$\frac{50 - 49x^2 - 1}{50} = \cos 2d \quad (\cos 2d = 1 - 2 \sin^2 d) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{O_1C}{O_1B}\right)^2 = \\ = 1 - 2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{50 - 49x^2 - 1}{50} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \quad 1 - \frac{49x^2 + 1}{50} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$\frac{49x^2 + 1}{50} = \frac{2}{x^2 + 1} \quad 49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \quad \text{Решив это уравнение получаем } x = 1 \text{ и } x = -1$$

$$(x+1)(x-1)(49x^2+99) = 0 \quad 49x^4 + 99 > 0, \text{ нет корней}$$

$$x = -1 \text{ не подходит, т.к. } < 0. \quad x = 1$$

Оконч.: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Заметим, что $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ и $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$, иначе под корнем отрицательно.
Давайте постараемся, чтобы каких x это было возможно.

$$2x^2 - 5x + 3 > 0 \quad D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 \quad \frac{5 \pm 1}{4} \leq \frac{3}{2} \quad (2x-3)(x-1) \geq 0$$

$$x \in (-\infty, 1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$$

$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$ всегда, т.к. $D < 0$ (4-8) и квадратичный член ≥ 0 .

Теперь будем обе стороны равенства в квадрат.

$$\underbrace{2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}_{4x^2 - 3x + 4} = \underbrace{(2 - 7x)^2}_{49x^2 - 28x + 4}$$

$$\underbrace{-2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}_{\text{если } x \in [-\infty, 1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)} = 45x^2 - 25x \quad 45x^2 - 25x \leq 0 \quad x(45x - 25) \leq 0$$

$$x \in [0; \frac{5}{9}]$$

x одновременно $\in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$ и $x \in [0, \frac{5}{9}]$

Значит, $x \in [0; \frac{5}{9}]$

Теперь давайте посмотрим, когда и что больше из $2x^2 - 5x + 3$ и $2x^2 + 2x + 1$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 1 &\geq 2x^2 - 5x + 3 & 7x &\geq 2 & x &\geq \frac{2}{7} \\ 2x^2 + 2x + 1 &\leq 2x^2 - 5x + 3 & 7x &\leq 2 & x &\leq \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Т.е. при $x \in [0, \frac{2}{7}]$ первое. Заметим, что при $(\frac{2}{7})$ слева и справа о мы нашли один ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) $\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$

$$y = ax + 10b$$

$$(I) x^2 + a^2 x^2 + 20axb + 100b^2 - 4 \leftarrow x^2 + y^2 - 4$$

$$(II) x^2 + 16x + 64 + a^2 x^2 + 20axb + 100b^2 - 1 \leftarrow (x+8)^2 + y^2 - 1$$

Допустим, $y = x^2 + y^2 - 4$ корни x_1, x_2 . Допустим, $y = (I)$ корни x_1, x_2 , $y = (II)$ корни x_3, x_4 .
 $(x_1 \leq x_2)$ $(x_3 \leq x_4)$

Тогда решения равенства являются

$$\left[((-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)) \cap [x_3; x_4] \right] \quad (III)$$

$$\left[((-\infty; x_3] \cup [x_4; +\infty)) \cap [x_1; x_2] \right] \quad (IV)$$

При этом по условию должно быть ровно два решения. Если $x_1 = x_2$ или $x_3 = x_4$, то решения максимум одно, значит $x_1 \neq x_2$, $x_3 \neq x_4$. Если $x_1 < x_3$, то из IV следует, что решения больше 2, если $x_1 > x_3$, то из III следует, что решений больше 2. Значит $x_1 = x_3$, аналогично $x_2 = x_4$.

Таким образом, необходимо, чтобы $y = I$ и II были одинарные пары корней. Однако напишем теорему Виетта:

$$\frac{100b^2 - 4}{a^2 + 1} = \frac{100b^2 + 64 - 1}{a^2 + 1} \quad 100b^2 - 4 = 100b^2 + 63 \quad -4 = 63 \quad \text{Противоречие}$$

$-4 \neq 63$, а значит произведение корней I и II не равно, а значит и сами корни не совпадают.

Таким образом, ответ: таких a не существует



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



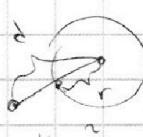
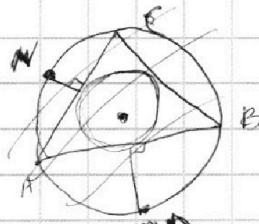
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & \end{array}$$



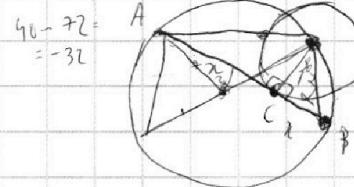
$$\frac{d^2 - r^2}{4r} = \frac{4 \times 12}{4 \times 4 - 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 + 36 \cdot 4}$$

$$\frac{1+7}{1-6 \cdot 7 + 49} = \frac{8}{-34}$$

$$3 \times 5$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 6 & 5 & 6 & 9 & 4 & 1 \end{array}$$

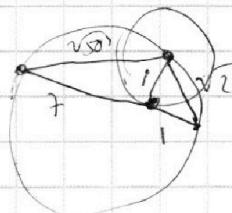
$$\frac{2+6}{4-6 \cdot 2 \cdot 6 + 36}$$



$$\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$(a+b)^2 - 8ab \stackrel{a \neq b}{\uparrow \uparrow} \text{by np.}$$

8



$$\frac{1+7}{1-6 \cdot 7 + 49}$$

$$x^2 = (\sqrt{n^2 + 1})^2 - 1$$

$$n^2 + 1 = \sqrt{n^2 + 1}$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = x^2 + 1$$

$$x^4 + x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 1) = 0$$

$$25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos 2d = 49n^2 + 1$$

$$50 - 50 \cos 2d = 49n^2 + 1$$

$$\cos 2d = \sin^2 d - \cos^2 d$$

$$\cos 60 = -\sin^2 30 + \cos^2 30$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2d = \cos^2 d - \sin^2 d$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2d = 1 - 2 \sin^2 d$$

$$400 - 4 = 396 \quad 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$49n^4 + 50n^2 - 99 = 0$$

$$2 = 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49$$

15

$$\frac{49n^4 + 50n^2 - 99}{-49n^2 - 49n^2} \mid x^2 - 1$$

нед

$$(x+1)(x-1)(49x^2 + 99) = 0$$

$$49x^2 + 99 = 0$$

$$x^2 = -\frac{99}{49} \quad X$$

(x-1)

х22

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

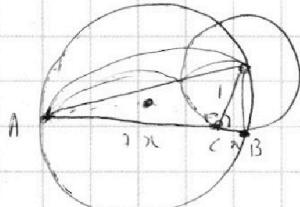


- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$\sqrt{49x^2 + 1} \cdot (\sqrt{49x^2 + 1} - 1)$$

$$49x^2 + 1 - \sqrt{49x^2 + 1} = 49x^2$$

$$1 = 49x^2 + 1$$

$$x = 0$$

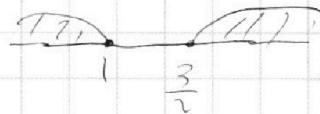
$$x^2 + 1 - \sqrt{x^2 + 1} = x^2$$

$$1 = x^2 + 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

(42) $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$ $2x^2 - 2x - 4 = 25 - 24 = 1$ $\frac{5 \pm 1}{4} = \frac{3}{2}$

$$(2x - 3)(x - 1)$$

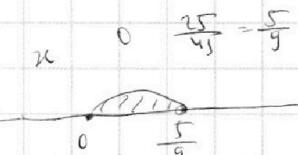


$$2x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$45x^2 - 25x \leq 0$$

$$x(45x - 25) \leq 0$$



Реш

$[0, 1]$

$$\frac{5}{9} < \frac{3}{2}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 2x^2 - 5x + 3$$

$$7x \geq 2$$

$$x \geq \frac{2}{7}$$

$$x \leq \frac{2}{7}$$

$$\frac{2}{7} < \frac{5}{9}$$

$$\frac{2}{7} < \frac{5}{9}$$

$$\frac{2}{7} < \frac{5}{9}$$

$[0, \frac{2}{7}] \quad (\frac{2}{7}, 1]$

↓

Реш
 $2 - 7x > 0$

$$2 - 7x < 0$$

Нем решений? Есмб. $\frac{2}{7}$

$[0, \frac{2}{7}] \quad I \downarrow \quad 2 - 7x \downarrow$

$[0, \frac{2}{7}) \quad II \uparrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 \quad D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 45x^2 - 28x + 4$$

$$4x^2 - 3x + 4$$

$$-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 45x^2 - 25x$$

$$4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (45x^2 - 25x)^2$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3) = 45^2x^4 - 50 \cdot 45x^3 + 625x^2$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2250 \end{array}$$

$$16x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 40x^3 - 40x^2 - 20x + 24x^2 + 24x + 12 = 45^2x^4 - 50 \cdot 45x^3 + 625x^2$$

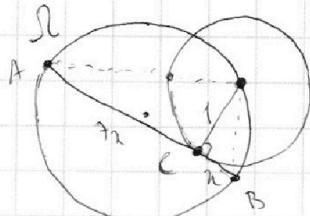
$$16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 45^2x^4 - 2250x^3 + 625x^2$$

$$(2025 - 16)x^4 - (2250 - 24)x^3 + (625 + 8)x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$2009x^4 - 2216x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$2009 - 2216 + 633 - 4 - 12$$

$$8(4018 - 2216) + 633 \cdot 4 - 8 - 12 = 0$$



$$AC : CB = 7$$

$$\sqrt{49x^2 + 1} \cdot (\sqrt{45x^2 + 1} - 1)$$

$$49x^2 + 1 - \sqrt{45x^2 + 1} = 49x^2$$

$$1 - \sqrt{45x^2 + 1} = 49x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$ab : 2^{14} 7^{10}$$

$$ab = 2^{14} 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} 7^{17}$$

$$bc = 2^{17} 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} 7^{37}$$

$$\cancel{a} : ac = 2^{20} 7^{37}$$

$$\frac{a}{b} = 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$a^2 = 2^{17} 7^{30}$$

$$a^2 = 2^{18} 7^{30}$$

$$a = 2^9 7^{15}$$

$$b = 2^5 7$$

$$abc = 2^{28} 7^{32}$$

$$2) \quad \frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a-b)^2 - 4ab}$$

$$a^2 - 6ab + b^2$$

$$S = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2$$

$$6b \pm \sqrt{32} b = \frac{6b \pm 4\sqrt{2} b}{2} = 3b \mp 2\sqrt{2}b$$

$$\frac{1}{a-6b \mp 2\sqrt{2}b} + \frac{1}{a^2 b - 6ab + b^2}$$

$$\frac{1}{1-6b/a + b^2/a^2} + \frac{1}{a^2/b - 6a/b + 1}$$

$$\frac{1}{a} +$$

$$\frac{1 + b/a}{a - b/a + b^2/a^2}$$

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{b}{a}}{1 - 6b/a + \frac{b^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{a}(\frac{b}{a} + 1)}{(\frac{b}{a} - 3 - 2\sqrt{2})(\frac{b}{a} - 3 + 2\sqrt{2})}$$

$$36 - 4 = 32$$

$$n^2 - 6n + 1$$

$$S = 36 - 4 \cdot 1 = 32$$

$$\frac{b \pm 4\sqrt{2}}{2} - 3 = 2\sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$k_1 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$k_2 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$k_3 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$k_1 k_2 k_3 2^{51} \cdot 7^{64} = a^2 b^2 c^2$$

$$\cancel{2^{52} \cdot 7^{64}} = a^2 b^2 c^2$$

$$\cancel{abc} = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$2^{26} \cdot 7^{38} - abc$$

$$ac \quad b = 7 \cdot 2^6$$

$$c = 7^{28} \cdot 2^2$$

$$a = 7^{11} \cdot 2^3$$

$$abc = 2^x \cdot 7^y$$

$$a^2 b^2 c^2 \min 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$2^{52} \cdot 7^{74}$$

$$37 \cdot 2 = 74$$

$$2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{27}$$

$$b = 2^{16} \cdot 7^{37}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{10}$$

$$18 + 9 = 27$$

$$c =$$

$$\begin{aligned} b &= 2^5 \\ a &= 2^9 \cdot 7^{10} \\ c &= 2^{12} \cdot 7^{27} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 \\ - 2005x^4 - 3444x^3 \\ \hline 1218x^3 + 633x^2 - 4x - 12 \\ - 1218x^3 - 1988x^2 \\ \hline 2621x^2 - 4x - 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7x - 11 \\ \hline 287x^3 + 174x^2 + 37 \\ - 287x^3 - 174x^2 - 37 \\ \hline 1218 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 12 \\ \hline 12 \\ 11 \\ \hline 132 \\ - 132 \\ \hline 0 \\ \begin{array}{r} 15 \\ + 14 \\ \hline 29 \\ 28 \\ \hline 1 \\ + 1 \\ \hline 2 \end{array} \\ \begin{array}{r} 24 \\ + 24 \\ \hline 48 \\ 17 \\ \hline 63 \\ 3 \\ \hline 633 \\ 2821 \end{array} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик
0 (0;0)

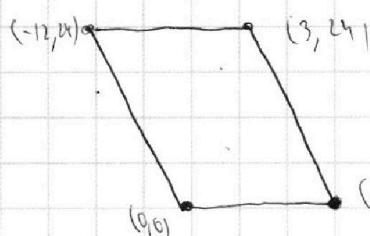
P (-12; 24)

Q (3, 24)

R (15; 0)

A ($x_1; y_1$) B ($x_2; y_2$)

x_1



$$0 < x < 15 \quad 0 < y < 24$$

$$2 \cdot 15 - 0 + 24 - 0 = 42$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$(12 - 2x_2 + 2x_1) \quad (12 - 2x_2 + 2x_1) \quad (12 - 2x_2 + 2x_1)$$

$$12x - 2x^2 + 2x_1 - 12x_1 + 2x_1x_2 - 2x_1^2 = yx_2 - yx_1 - y_2x_2 + y_1x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - y + ab = 0 \\ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ((x+8)^2 - y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \\ \end{array} \right.$$

$$y = ax + ab$$

$$x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 4$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(20ab) + 100b^2 - 4$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(16 + 20ab) + 100b^2 + 63$$

$$\Delta = 20^2 a^2 b^2 - 400b^2 \times 4 (100b^2 - 4)(a^2 + 1)$$

$$Q = -(16 + 20ab)^2 - 4 (100b^2 + 63)(a^2 + 1)$$

$$-20ab \pm \sqrt{20^2 a^2 b^2 - 4(100b^2 - 4)(a^2 + 1)}$$

$$\frac{100b^2 - 4}{a^2 + 1} = \frac{(100b^2 + 63)(a^2 + 1)}{a^2 + 1} \quad 100b^2 - 4 = 100b^2 + 63$$

