МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A\left(x_1;y_1\right)$ и $B\left(x_2;y_2\right)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ \left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Обозначим за $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ - степень вхождения 2 в числа a, b, c соответственно. За $\alpha_7, \beta_7, \gamma_7$ - степень вхождения 7 в a, b, c соответственно. Тогда т.к.

$ab \vdots 2^{15}7^{11}$, $bc \vdots 2^{17}7^{18}$, $ac \vdots 2^{23}7^{39}$ и $a, b, c \neq 0$

$$\begin{cases} \alpha_2+\beta_2 \geqslant 15 \\ \beta_2+\gamma_2 \geqslant 17 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geqslant 23 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geqslant \frac{55}{2}$$ т.к. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \geqslant 0$ и $\in \mathbb{Z}$, то $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geqslant 28$

$$\begin{cases} \alpha_7+\beta_7 \geqslant 11 \\ \beta_7+\gamma_7 \geqslant 18 \\ \alpha_7+\gamma_7 \geqslant 39 \end{cases} \Rightarrow \alpha_7+\beta_7+\gamma_7 \geqslant 34$$ т.к. $\alpha_7, \beta_7, \gamma_7 \in \mathbb{Z}$ и $\geqslant 0$, то

$\alpha_7+\beta_7+\gamma_7 \geqslant 39$.

Тогда $abc \vdots 7^{\alpha_7+\beta_7+\gamma_7} \cdot 2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}$

т.к. $\alpha_7+\beta_7+\gamma_7 \geqslant 39$ и $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geqslant 28$ $\Rightarrow$ и 2 и 7 ~~взаимно~~ взаимнопросты

$abc \vdots$ ~~$2^{\alpha 24}$~~ $2^{28} \cdot 7^{39}$

Тогда т.к. $a, b, c \neq 0$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$

$abc \geqslant 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Покажем, что $\exists\, a, b, c$ такие что $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ и выполнены условия:

$b = 2^5$ $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$ $c = 2^{13} \cdot 7^{28}$. Легко видеть, что условия выполнены и $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$. Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Обозначим НОД чисел x и y за (x; y).

Тогда т.к. $\frac{a}{b}$ несократима и $\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \end{cases}$, то $(a; b) = 1$ (взаимопросты).

Перепишем $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$

Ясно, что наибольшее число на которое можно сократить дробь это $(a+b; (a+b)^2-9ab) = m$. Тогда $\begin{cases} a+b \vdots m \\ (a+b)^2-9ab \vdots m \end{cases} \Rightarrow$

$9ab \vdots m$ т.к. $a+b \vdots m \Rightarrow (a+b)^2 \vdots m$.

Но $a+b$ взаимопросто с a и b т.к. $(a; b) = 1$. Т.е. $(a+b; ab) = 1$, но $9ab \vdots m \Rightarrow 9 \vdots m$. Тогда $9 \geq m$.

Приведём пример когда можно сократить на 9 (т.е. достигается $\textcircled{=}$):

$a = 5$, $b = 4$. Тогда $(a; b) = 1$ – выполнено условие несократимость $\frac{a}{b}$ и

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{81-9\cdot 20} = \frac{1}{9-20} = -\frac{1}{13}$ – ~~несократима~~ несократима

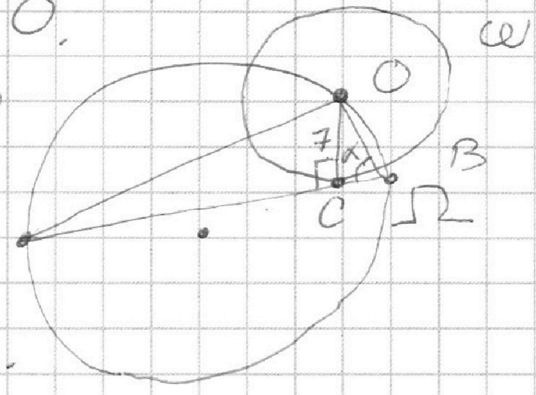
~~Итак~~ Итак, п-во достигается $\Rightarrow$ наибольшее $m = 9$.

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим центр ω за O.
Тогда т.к. AB касается ω в (.) C, то $OC \perp AB$. и OC – радиус ω $\Rightarrow OC = 7$.
Обозначим $\angle OBC = \alpha$.
Тогда $BC = 7 \cdot ctg\alpha$ т.к. $\triangle OCB$ – прямоуг
$\Rightarrow$ т.к. $\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$, то $AC = 17\, ctg\alpha$
Поскольку $\triangle AOB$ вписан в Ω, то
$R_\Omega = 13 = \frac{AO}{2\sin\alpha}$ (по Th sin) $\Rightarrow$
$AO = 26\sin\alpha$. Тогда т.к. $\triangle ACO$ – прямоуг, то по Th Пифр $AO^2 = AC^2 + OC^2$. т.е.

$$26^2\sin^2\alpha = 49 + 289\, ctg^2\alpha$$

Обозначив $t = \sin^2\alpha$, $t \in [0;1]$ получим

$$26^2t^2 = 49t + 289(1-t)$$

$$26^2t^2 + 240t - 289 = 0$$

~~$\frac{D}{4} = 14400 + 289 \cdot 26^2 = 14400 + ...$~~

~~Ясно что сумма корней отрицательна. Тогда по Th Виета $a + b =$~~

Решив квадратное уравнение находим $t = \sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{t}$ ($t \geq 0$). Выразим $ctg\alpha$ и подставляем в $AB = 24\, ctg\alpha$. получаем ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

$\exists\ a = 3x^2-6x+2$

$b = 3x^2+3x+1$ и из ОДЗ $\sqrt{\ }$ $a, b \geq 0$

Тогда можно переписать как:

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(1-\sqrt{a}-\sqrt{b}) = 0$

$\Leftrightarrow$

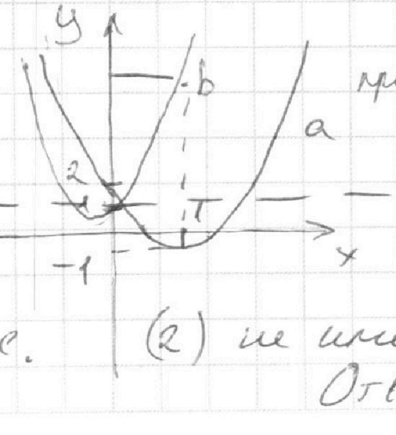
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0,\ b \geq 0 \\ a = b \end{cases} \quad (1) \\ \sqrt{a}+\sqrt{b} = 1 \quad (2) \end{array}\right.$

(1) $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow 3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1$

$9x = 1 \quad x = \frac{1}{9}$

Подставляя $x = \frac{1}{9}$ в $3x^2-6x+2$ и $3x^2+3x+1$ видим, что они ≥ 0 при $x = \frac{1}{9}$ т.е. удовлетворяют ОДЗ. Т.е. $x = \frac{1}{9}$ — единственный корень (1).

(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b} = 1$. Рассмотрим графики a и b:



Видим, что на всей ОДЗ (когда $a \geq 0, b \geq 0$) один из a или b ≥ 1 т.е. из $\sqrt{\ } \geq 1$

$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$ т.е.

*график восполнен приблизительно, a пересекает y в $(0;2)$, b пересекает y в $(0;1)$

(2) не имеет решений.

Ответ: $\{\frac{1}{9}\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда число пар $(a_i; b_i)$ будет равно кол-ву способов представить

$a_i = 2x_2 + y_2$ ~~для~~ $y_2 \in \mathbb{Z}$, $y_2 \geq 0$, $26 \geq y_2$

и ~~для~~ $x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \geq -13$, $16 \geq x_2$

и $b_i = 2x_1 + y_1$ $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_1 \geq -13$, $16 \geq x_1$

$y_1 \in \mathbb{Z}$, $y_1 \geq 0$, $26 \geq y_1$

~~Следовательно представить~~

a_i и b_i можно представить числом способов сколько целых (•) лежит на прямой $-2x = y$ при $0 \leq y \leq 26$ (для каждого следующего i оно получается сдвигом на 1 и их число не меняется)

Их 14. Тогда ~~общее~~ число пар $(a_i; b_i)$ будет равно $\frac{14 \cdot 14}{2} = 98$

Тогда общее число пар будет равно $98 \cdot 21 = 2058$.

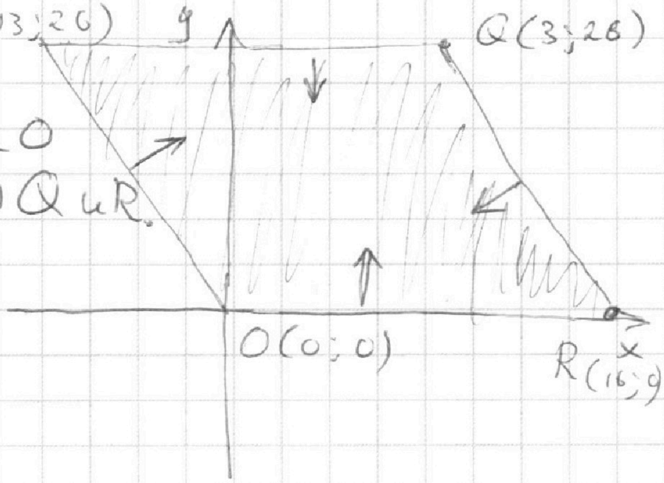
Ответ: 2058.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Запишем ур-е прямой PO по (·) P и O и прямой QR по (·) Q и R.

Получим:

$PO: -2x = y$

$QR: -2x + 34 = y$

$PQ: y = 26$

$OR: y = 0$

Если (·) $(x_0; y_0)$ лежит внутри PORQ, то её координаты удовлетворяют:

$$\begin{cases} y_0 \geq -2x_0 \\ y_0 \leq -2x_0 + 34 \\ y_0 \leq 26 \\ y_0 \geq 0 \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} 2x_0 + y_0 \geq 0 \\ 2x_0 + y_0 \leq 34 \\ y_0 \leq 26 \\ y_0 \geq 0 \end{cases}$$

Тогда если A и B – искомая пара (·), то

$$\begin{cases} 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14 \\ 34 \geq 2x_2 + y_2 \geq 0 \\ 34 \geq 2x_1 + y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $a = 2x_1 + y_1$, $b = 2x_2 + y_2$. Тогда

Нам подойдут пары для которых $(a; b)$:

$(0; 14), (1; 15) \ldots (20; 34)$ их 21.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

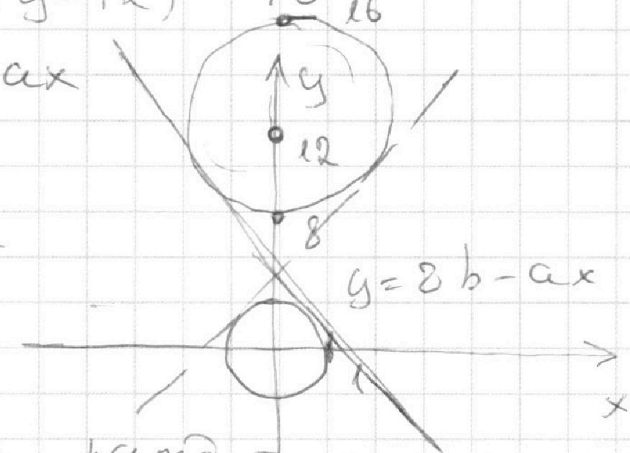
$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

σ — $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0$

~~x^2+y^2~~ Рассмотрим окружности

$x^2+y^2=1$ и $x^2+(y-12)^2=16$

и прямую $y = 8b - ax$



Система будет иметь ровно 2 решения для некоторого b если прямая $y=8b-ax$ будет касательной к каждой из окружностей.

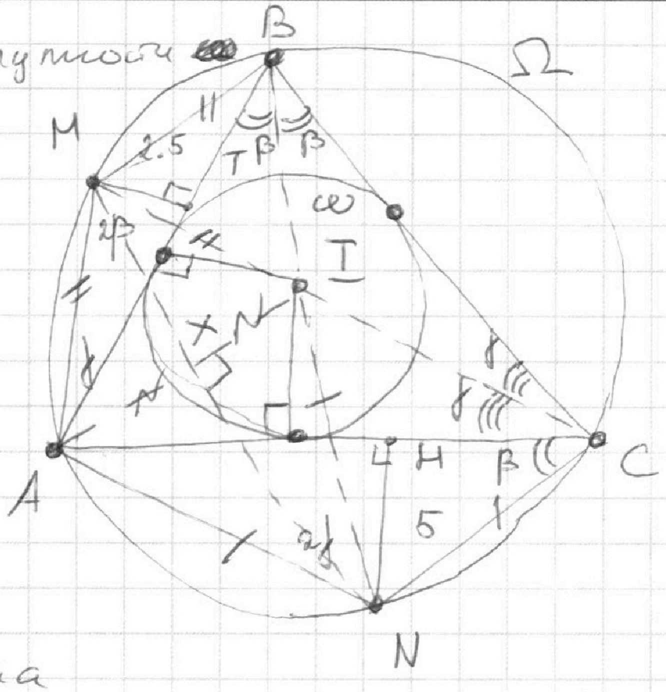
~~или будут~~

И т.к. прямая $y=8b-ax$ отличается только свободным членом она $\parallel$ касательным на рисунке.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Центр вписанной окружности ω – точка пересечения биссектрис. Тогда BI и CI и AI – биссектрисы △ABC.
Т.к. (·) N и M – середины дуг лежащих против вершин B и C, то они также лежат на соответствующих биссектрисах. ~~Т.к.~~ Тогда ~~ABC вписан в Ω, т.к. и AI обозначим~~ по лемме о трезубце $AN = IN = NC$ и $BM = MI = MA$. Обозначим $\beta = \frac{1}{2}\angle ABC$ и $\gamma = \frac{1}{2}\angle BCA$

Тогда т.к. ABCN вписан в Ω, то $\angle ACN = \beta = \angle CAN$ (равноб △ANC). Аналогично в △AMB $\angle MAB = \gamma = \angle MBA$.

$CN = 5/\sin\beta$ (т.к. △CHN – прямоуг.) =>

$AN = NI = NC = 5/\sin\beta$. Аналогично

$BM = MI = MA = \frac{2.5}{\sin\gamma}$. Тогда, если

$x = AI$, то из равнобедренного △ANI

$x = 2\sin\gamma \cdot 5/\sin\beta$. А из △AMI $x = 2\sin\beta \cdot \frac{2.5}{\sin\gamma}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда $10\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 5\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin^2\gamma = \frac{1}{2}\sin^2\beta$

$\Rightarrow \sin\gamma = \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$

~~$\frac{AI}{\sin\gamma} =$ Тогда $AN = \frac{5}{\sin\beta} = \frac{5}{\sqrt{2}\sin\gamma}$, а~~

~~$AM = \frac{5}{\sin\gamma} \Rightarrow AN = \frac{AM}{\sqrt{2}}$~~

Тогда $x = 10\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}\sin\gamma} = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow AI = \frac{10}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\frac{10}{\sqrt{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} y_1 \geq -2x_1 & 2x_1+y_1 \geq 0 & 3 \geq y_1 \geq 0 \\ y_1 \leq -2x_1+34 & 2x_1+y_1 \leq 34 & 3 \geq y_2 \geq 0 \\ y_2 \geq -2x_2 & 2x_2+y_2 \geq 0 & 16 \geq x \geq 0 \\ y_2 \leq -2x_2+34 & 2x_2+y_2 \leq 34 & \\ 2x_2-2x_1+y_2-y_1=14 & & \\ 2x_2+y_2=2x_1+y_1+14 & & \end{cases}$$

$34 \geq a \geq 0$ $\quad a-b=14$ $\quad \begin{cases} y=-2x+34 \\ y+2x \end{cases}$

$34 \geq b \geq 0$

$0 \to 14$

$1 \to 15$

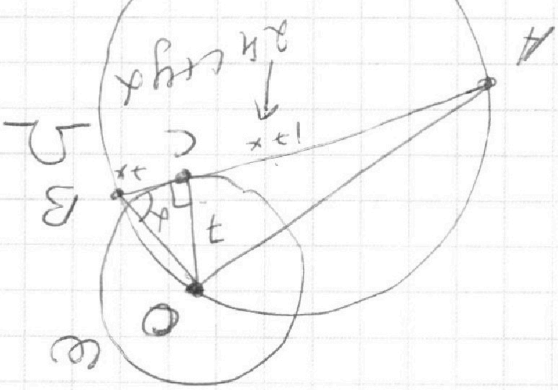
$2 \to 16$

$3 \to 17$

21 пара

$20 \to 34$

$$\begin{cases} ax+y-2b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

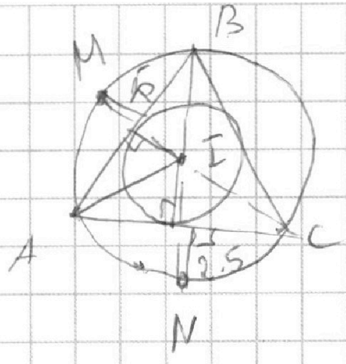


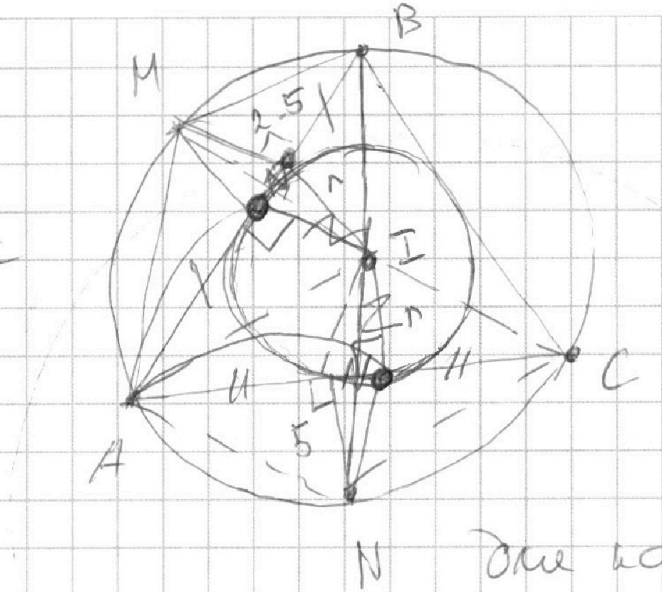
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$$\times \begin{array}{r}676\\289\end{array}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{2.5}{\sin\gamma}\right)^2 2 - 2\cos\gamma\left(\frac{2.5}{\sin\gamma}\right)^2}$$

~~$2.5\cos\gamma$~~

$$\frac{2.5}{\sin\gamma}$$

Для каждого y есть не меньше 2-х решений

$ax + y = 8b$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \le 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 \le 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \le 0 \end{array}\right.$$

$\forall\, y \le 1 \mapsto x^2 + (y-12)^2 - 16 > 0$ т.е. $\forall y \le 1$ это верно

$|y| \le 4 \mapsto$

$\forall\, 4 \le y \le 8$

$y = 8b - ax$

$$\boxed{}\ (-\infty; 1] \cup [4; 8]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$ $\quad x_2 = 1-\frac{1}{\sqrt3}$

4 $\quad 3(x^2-2x+1)-1 = 3(x-1)^2-1$

$D = 36-24 = 12$

$x_1 = \frac{6+\sqrt{12}}{6} = 1+\frac{\sqrt3}{3} = 1+\frac{1}{\sqrt3}$

$a = 3x^2-6x+2 \geq 0$

$b = 3x^2+3x+1 \geq 0$ $\quad x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

$y_0 = \frac{3}{4}-\frac{3}{2}+1 = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\sqrt a - \sqrt b = a-b$

$\sqrt a - \sqrt b = (\sqrt a - \sqrt b)(\sqrt a + \sqrt b)$

$(\sqrt a - \sqrt b)(\sqrt a + \sqrt b - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = b \\ \sqrt a + \sqrt b = 1 \end{array}\right.$ нет корней

$a + b + 2\sqrt{ab} = 1$

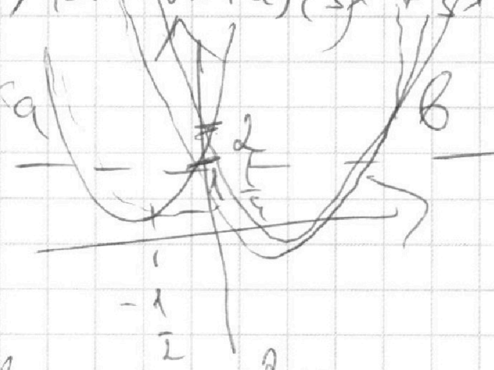
$6x^2-3x+3+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}$

$\cancel{6x^2-3x+3+2\sqrt{9x^4-18x^3}}$

$\cancel{3x^2}-6x+2 = \cancel{3x^2}+3x+1$

$9x = 1$

$x = \frac{1}{9}$



$D = 240^2+289\cdot 26^2\cdot 4$

$\frac{D}{4} = 120^2+289\cdot 26^2 = 120^2+289\cdot 676$

$\times\ 676 \cdot 289$: 6084, 5408, 1352 — 195364

$+\ 195364 + 14400 = 209764$

$26t^2 \quad \frac{120}{13}t - \frac{289}{26}$

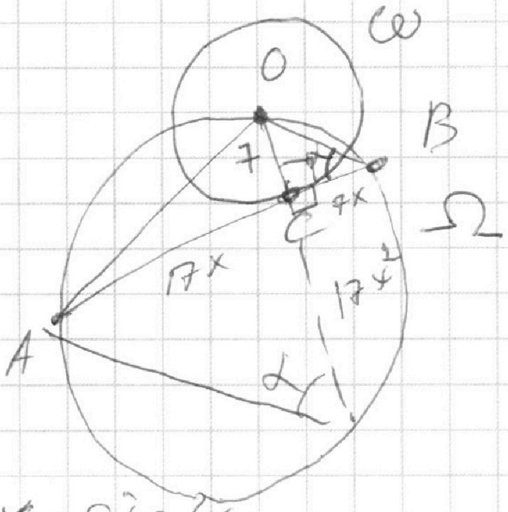
$98 \times 21 = 98, 196$ $\quad 2058$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$tg\alpha = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$

$x = ctg\alpha$

$AO = 2R\sin\alpha = 26\sin\alpha$

$OB = 7/\sin\alpha$

$26^2\sin^2\alpha = 49 + 17^2 ctg^2\alpha$

$26^2\sin^2\alpha = 49 + 289\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$t = \sin^2\alpha$

$26^2t^2 - 289\left(\frac{1-t^2}{t^2}\right) - 49 = 0$

$26^2t^4 - 289(1-t^2) - 49t^2 = 0$

$26^2t^4 - 289 + 289t^2 - 49t^2 = 0$

$26^2t^4 + 240t^2 - 289 = 0$

$k = t^2$

$26^2k^2 + 240k - 289 = 0$

$0 = 16k + d$

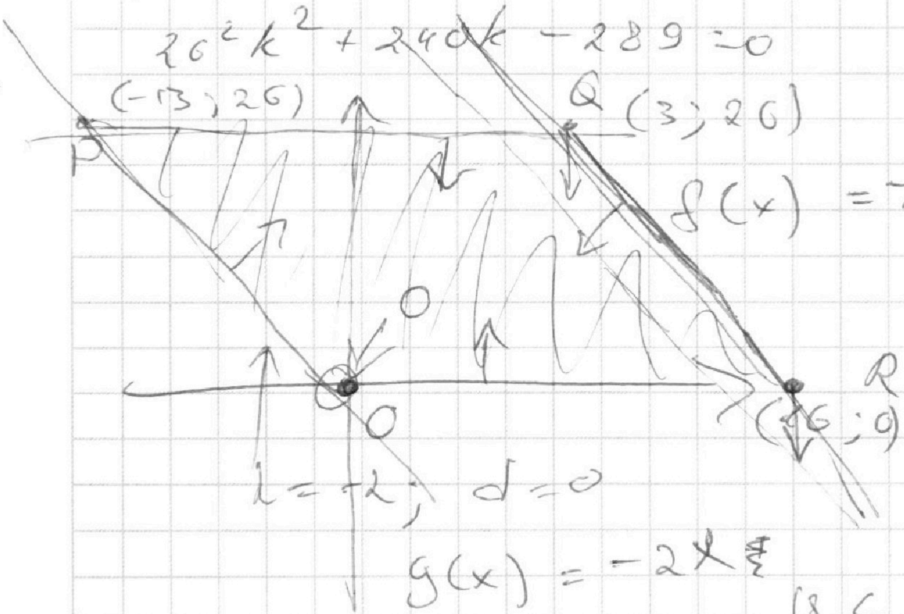
$26 = 3k + d$

$d = -16k$

$26 = -13k$

$k = -2$

$d = 34$



$f(x) = -2x + 34$

$k = -2;\ d = 0$

$g(x) = -2x$

$\begin{cases} y_0 \le f(x_0) \\ y_0 \ge g(x_0) \end{cases}$

$y_0 \le 26$

$y_0 \ge 0$

$y_0 \le -2x_0 + 34$

$y_0 \ge -2x_0$

$y_0 \le 3 \quad y_0 \ge 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(a;b)=1$ $\qquad \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

2)

$(a+b;\ a^2-7ab+b^2)$

$(a+b;\ (a+b)^2-9ab)$

d пуст, то p не в a или b

тогда $9 \vdots d$

$\underline{d \le 9}$

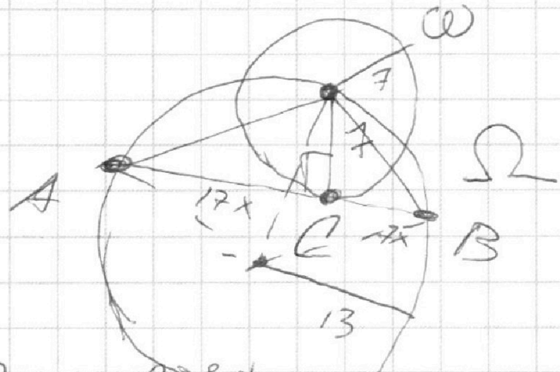
$a=5$
$b=4$

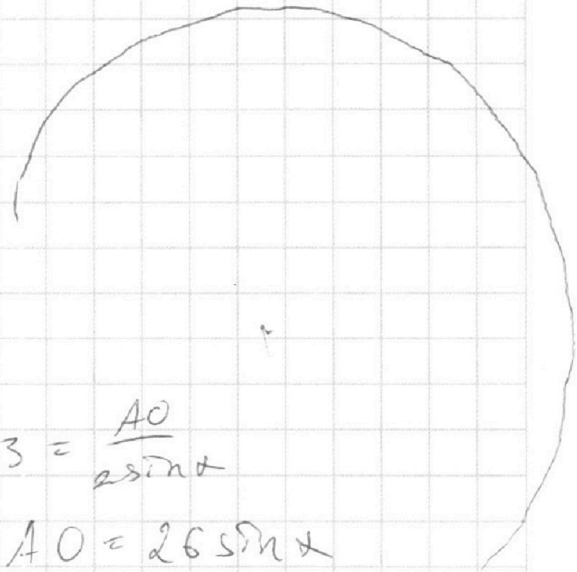
сокращается

$(9;\ 81-9\cdot5\cdot4)=(9;\ 9$

5)

$17\cos\alpha$

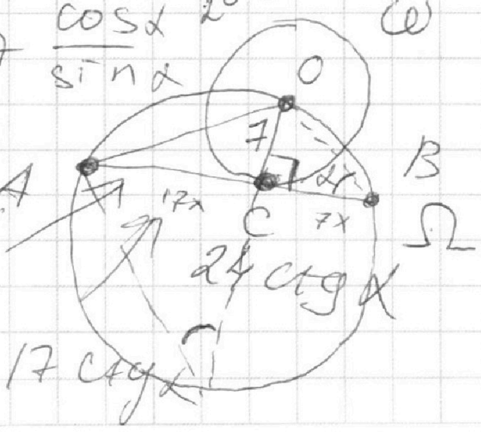




$\frac{17}{7}\cdot 7\frac{\cos\alpha}{\sin}$

$26\sin\alpha$

$17\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$



$\frac{17\cos\alpha}{7\sin\alpha}$

$13=\frac{AO}{2\sin\alpha}$

$AO=26\sin\alpha$

$CB=7x=7\,ctg\,\alpha$

$=7/tg\,\alpha=\frac{7\cos\alpha}{\sin\alpha}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^{15}7^{11}$, $bc \vdots 2^{17}7^{18}$, $ac \vdots 2^{23}7^{39}$

Пусть 2 входит в a в степени α_2

в b в степени β_2

γ_2

$7 - \alpha_7, \beta_7, \gamma_7$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 15$

$\alpha_7 + \beta_7 \geq 11$

$\beta_2 + \gamma_2 \geq 17$

$\gamma_2 + \alpha_2 \geq 23$

$\beta_7 + \gamma_7 \geq 18$

$\alpha_7 + \gamma_7 \geq 39$

Тогда $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{55}{2}$

т.к. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{Z}$

и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \geq 0$

то $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28$

Аналогично

$\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq \frac{68}{2} = 34$

Тогда $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ $\alpha_7 + \gamma_7$

$\beta_7 = 0$

Пример

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 28$

$\alpha_2 + \beta_2 = 15$

$\underline{\gamma_2 = 13}$

$\alpha_2 + \gamma_2 = 23$

$\beta_2 = 5$

$\alpha_2 = 10$

$\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 39$

$\alpha_7 = 11$

$\gamma_7 = 28$

$\beta_7 = 0$

$b = 2^5$

$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$

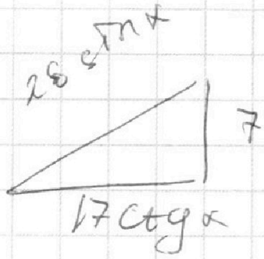
$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$AO = 26\sin\alpha$

$26^2\sin^2\alpha = 49 + 289\,ctg^2\alpha$

$26^2\sin^2\alpha = 49 + 289\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$26^2\sin^2\alpha = 49 + 289\cdot\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$26^2\sin^4\alpha = 49\sin^2\alpha + 289(1-\sin^2\alpha)$

$x = \sin^2\alpha \geq 0$

$x = ctg\,\alpha$

$26^2x^2 - 49x - 289 + 289x = 0$

$26^2x^2 + 240x - 289 = 0$

$120^2 + 26^2\cdot 29$

$\frac{D}{4} =$

$240\cdot240 = 57600$

$26\cdot26 = 676$

$676\cdot29 = 19604$

$120\cdot120 = 14400$

$91\cdot91 = 8281$

$14400 + 19604 = 34004$

$34004 : 2 = 17002$

$17002 : 2 = 8501$

$80\cdot80 = 6400$

$90\cdot90 = 8100$

$97\cdot97$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$26x^2-240x-289=0$

$17x = 7\cdot ctg\beta$ $\quad \frac{240}{26} \quad \frac{289}{26}$

$x = ctg\alpha$ $\quad a+b=\frac{240}{26}$

$ab=\frac{289}{26}$

$26a+26b=240$

$26ab=289$

$a=\frac{240-26b}{26}$

$(240-26b)b=240$

$26b^2-240b+240=0$

$13b^2-120b+120=0$

$D=1440-6240$

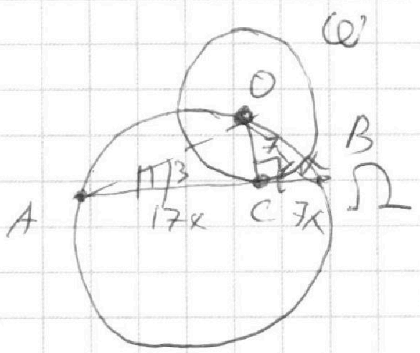
$=8160$

$2\cdot5\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot$

$2\cdot55$

$\sqrt{D}=8\cdot5\sqrt{11}=40\sqrt{11}$

$2 \quad 480 \times 13 = 1440 + 480 = 6240 \quad 14400-6240=8160$



$S_{ABO}=\frac{7\cdot24x}{2}=7\cdot12x=$
$=84x$

$\frac{\sin\alpha\cdot OB\cdot AB}{2}=S_{ABO}$

$\sin\alpha=\frac{AO}{26}$

$\frac{AO\cdot OB\cdot AB}{48}$

$b=\frac{120+40\sqrt{11}}{2\cdot26}=$

$=\frac{30+10\sqrt{11}}{13}=$

$=\frac{10}{13}(3+\sqrt{11})$

$a=\frac{240-20(3+\sqrt{11})}{26}$

$=\frac{120-10(3+\sqrt{11})}{13}=\frac{10}{13}(12-3-\sqrt{11})=$

$=\frac{10}{13}(9-\sqrt{11})$