



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим за  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  - степени вхождения  
в б числа  $a, b, c$  соответственно. Тогда  
 $\alpha_7, \beta_7, \gamma_7$  - степени вхождения 7 в  
 $a, b, c$  соответственно. Тогда 7.1.

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, bc : 2^{17} \cdot 7^{18}, ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \text{ и } a, b, c \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 15 \\ \alpha_7 + \beta_7 \geq 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 15 \\ \alpha_7 + \beta_7 \geq 11 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{55}{2} \text{ 7.1.}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 15 \\ \alpha_7 + \beta_7 \geq 11 \end{cases} \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \geq 0 \text{ и } \in \mathbb{Z}, \text{ то}$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28$$

$$\begin{cases} \alpha_7 + \beta_7 \geq 11 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_7 + \beta_7 \geq 11 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 15 \end{cases} \Rightarrow \alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 34 \text{ 7.1.}$$

$$\begin{cases} \alpha_7 + \beta_7 \geq 11 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 15 \end{cases} \quad \alpha_7, \beta_7, \gamma_7 \in \mathbb{Z} \text{ и } \geq 0, \text{ то}$$

$$\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 39,$$

$$\text{Тогда } abc : 2^{\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7} = 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}$$

$$\text{7.1. } \alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 39 \text{ и } \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28 \Rightarrow$$

$$abc : 2^{39} \cdot 7^{28} \quad \text{и } 2^{39} \cdot 7^{28} \text{ Кратно}$$

бесконечно

Тогда 7.1.  $a, b, c \neq 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{N}$ )

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Покажем, что  $\exists a, b, c$  такие что  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$   
а бывают условия:

$$b = 2^5 \quad a = 2^{10} \cdot 7^{11} \quad c = 2^{13} \cdot 7^{28} \quad \text{Но это ложь, ибо}$$

значение бывает  $b = 2^{28} \cdot 7^{39}$  и  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ост.:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим Ноддесел х и у за  $(x; y)$ .

Тогда т.к.  $\frac{a}{b}$  несократима и  $\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \end{cases}$ , то

$(a; b) = 1$  (бесшарность).

Перепишем  $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$

Ясно, что наибольшее члене на которое мы можем сократить дробь это  $(a+b; (a+b)^2-9ab) = m$ . Тогда  $\begin{cases} a+b = m \\ (a+b)^2-9ab = m \end{cases} \Rightarrow$

$9ab = m$  т.к.  $a+b = m \Rightarrow (a+b)^2 = m$ .

Но  $a+b$  бесшарность с  $a$  и  $b$  т.к.

$(a; b) = 1$ . т.е.  $(a+b; ab) = 1$ , но

$9ab = m \Rightarrow 9 = m$ . Тогда  $9 \geq m$ .

Приведём пример когда можно сократить на 9 (т.е. доказательство  $\Theta$ ):

$a = 5$ . Тогда  $(a; b) = 1$  - бесшарность

$b = 4$  несократимость  $\frac{a}{b}$  и условие

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{9}{81-9 \cdot 20} = \frac{1}{9-20} = -\frac{1}{13} - \text{делитель}$$

не сократимая

Также видим, что доказательство  $\Rightarrow$

наибольшее  $m = 9$ .

Однако 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

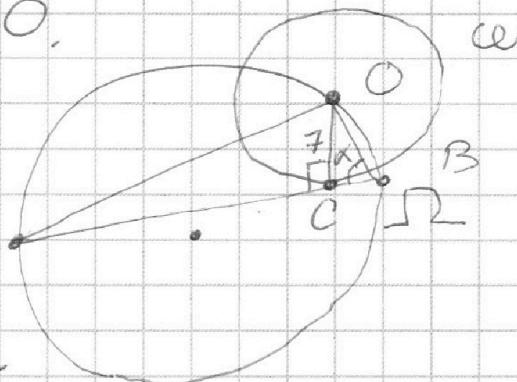
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

Одвојасан чист ваза.

Tower Rd. ABKeeleee (C)

$B(C)$  چنانچه  $OCL \perp AB$ . و

OC - häufige  $\omega \Rightarrow$  OC - ? A



Towra BC = 70 Ctyx T.k. △ OCB - nyewy

$$\Rightarrow \text{t.h. } \frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}, \text{ so } AC = 17 \text{ cm} \times 7$$

Площадь  $\triangle AOB$  равна  $6\sqrt{2}$ , то

$$R_\Omega = 13 = \frac{AO}{2\sin\alpha} \quad (\text{no Th sin}) \Rightarrow$$

$A_0 = 20 \sin x$ , Towذا ت.ك. A ACO - نوچیز

$$\rightarrow \text{To no Th Deep } AD^2 = AC^2 + OC^2 \text{ i.e.}$$

$$2g^2 \sin^2 \alpha = 4g + 2g g \operatorname{Ctg}^2 \alpha$$

Օճախը հանդիսանում է  $t = \sin^2 x$ ,  $t \in [0, 1]$  հարաբեկացություն:

$$20^2 t^2 = 49t + 289(1-t)$$

$$26^2 t^2 + 240t - 289 = 0$$

$$\begin{array}{r}
 & 5 \\
 & | \\
 & 1 \\
 \times & 676 \\
 \hline
 3 & 20 \\
 \times & 26 \\
 \hline
 1720 & 16684 \\
 156 & 7208 \\
 \hline
 56 & 1354 \\
 \hline
 676 & 213384
 \end{array}$$

07 14400 + 1288.26 <sup>2</sup> Block 2000

7- Steps are over here of open top deck  
The Bluebell  $a+b =$

Печеве хладилнице и глечици са изоставени

$t = \sin^2 x \Rightarrow \sin x = \sqrt{t}$  ( $t \geq 0$ ). Всегда есть  
 $\operatorname{ctg} x$  в коэффициенте  $B$   $AB = 2k \operatorname{ctg} x$ . так как  $\operatorname{ctg} x$  не делит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\begin{aligned} \square a &= 3x^2 - 6x + 2 \\ b &= 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned} \quad \text{и из ОДЗ } a, b \geq 0$$

Тогда можем переписать как:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - \sqrt{a} - \sqrt{b}) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{matrix} \sqrt{a} \geq 0, & \sqrt{b} \geq 0 \\ a = b \end{matrix} \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{array} \right. \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a = b \end{array} \right. \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1 \quad x = \frac{1}{9}$$

Далее подставим  $x = \frac{1}{9}$  в  $3x^2 - 6x + 2$  и

$3x^2 + 3x + 1$ . Видим, что обе  $\geq 0$  при  $x = \frac{1}{9}$  т.е.

удовлетворяют ОДЗ. Т.е.  $x = \frac{1}{9}$  является корнем (1).

Кроме

(2)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ . Рассмотрим графики а и б:

Видим, что

на всей ОДЗ

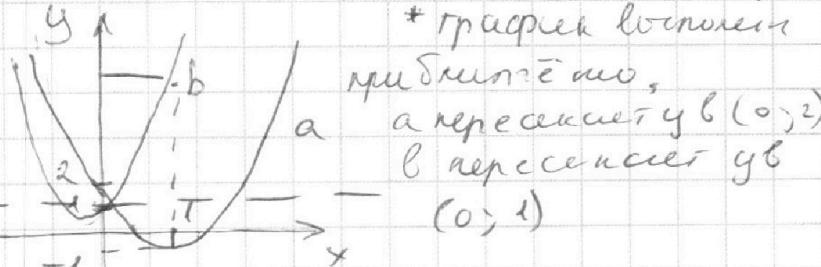
(также  $a \geq 0, b \geq 0$ )

один из а или б

$\geq 1$  т.е. нет

$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 1$  т.е.

$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$  т.е.



\*график второго

приближённо,

а пересекает y=1 (0; 1)

б пересекает y=1

(2) не имеет реш.

Ответ:  $\{ \frac{1}{9} \}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда число пар  $(a_i; b_i)$  будет  
равно кол-ву способов представления  
 $a_i = 2x_2 + y_2$  для  $y_2 \in \mathbb{Z}, y_2 \geq 0$

11  
26

и для  $x_2 \in \mathbb{Z}$   $x_2 \geq -13$

11  
16

и  $b_i = 2x_1 + y_1$   $x_1 \in \mathbb{Z}$

11  
16

$y_1 \in \mathbb{Z}, y_1 \geq 0$

11  
26

Алгоритм решения

$a_i$  и  $b_i$  можно представить числом  
способов склоняя цирок (•) ленты  
на прямой  $-2x = y$  при  $0 \leq y \leq 26$

(две кемоди подчёркиванием; они получаются  
двоюю на 1 и их число не меняется)

Из 14. Тогда общее число

пар  $(a_i; b_i)$  будет равно  $\frac{14 \cdot 14}{2} = 98$

Тогда общее число пар будет равно

$$98 \cdot 21 = 2058.$$

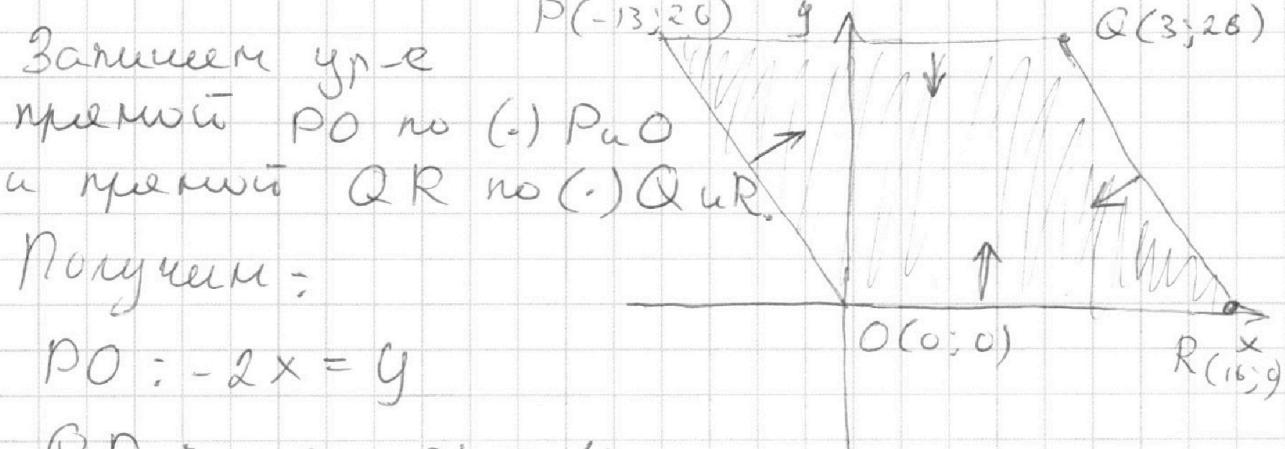
Ответ: 2058.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если  $(-) (x_0; y_0)$  лежит внутри  $PQRQ$ ,  
то её координаты удовлетворяют:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 \geq -2x_0 \\ y_0 \leq -2x_0 + 34 \\ y_0 \leq 26 \\ y_0 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{T.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_0 + y_0 \geq 0 \\ 2x_0 + y_0 \leq 34 \\ y_0 \leq 26 \\ y_0 \geq 0 \end{array} \right.$$

Тогда если  $A \cap B$  - сквозное неравн.  $(\circ)$ , то

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14 \\ 34 \geq 2x_2 + y_2 \geq 0 \\ 34 \geq 2x_1 + y_1 \geq 0 \end{array} \right.$$

$\exists a = 2x_1 + y_1$ ,  $b = 2x_2 + y_2$  Тогда

Как подойдут пары две которых  $(a; b)$ :

$(0; 14), (4; 15) \dots (20; 34)$   $a \times 21$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

Слайд Рассмотрим окружности

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ и } x^2 + (y-12)^2 = 16$$

и прямую  $y = 8b - ax$

Система будет иметь  
ровно 2 решения для  
каждого из них

прямая  $y = 8b - ax$

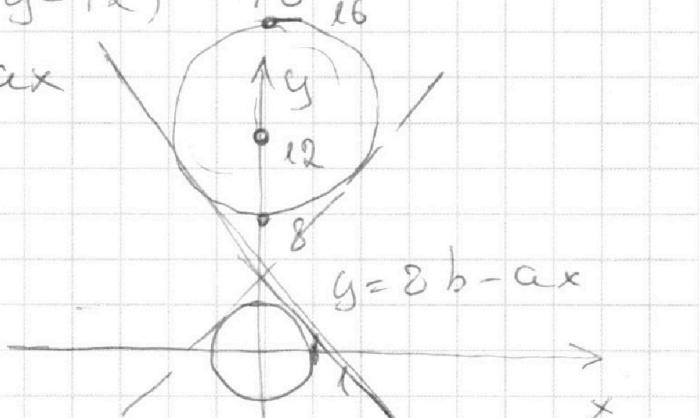
будет касательной к каждой из окружностей,

если

и т.к. прямая  $y = 8b - ax$  не отмечена

только добавлены имена она //

касательными на рисунке.



- |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                                     |   |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input checked="" type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Центр внешней окружности  $\omega$   
 $\omega$ -точка пересечения  
 биссектрис. Тогда  
 $BI$  и  $CI$  и  $AI$ -  
 биссектрисы  $\triangle ABC$ .

Т.к.  $(\omega)$  и  $M$ -

середина  $\angle BIC$

имеет одинаковую

вершину  $B$  и  $C$ , то

один градус лежит на

соответствующих биссектрисах. Т.к. Тогда

$ABC$  равнобедренный и  $\angle B = \angle C$  и  $\angle A = 180^\circ - 2\beta$

Легко о тщадже  $AN = IN = NC$  и  $BM = MI = MA$ . Обозначим  $\beta = \frac{1}{2} \angle ABC$  и  $x = \frac{1}{2} \angle BCA$

Тогда т.к.  $ABCN$  лежат в  $\Omega$ , то

$\angle ACN = \beta = \angle CAN$  (радиусы  $\angle ANC$ ), Аналогично  
 $\angle AMB = \angle MAB = j = \angle MBC$ .

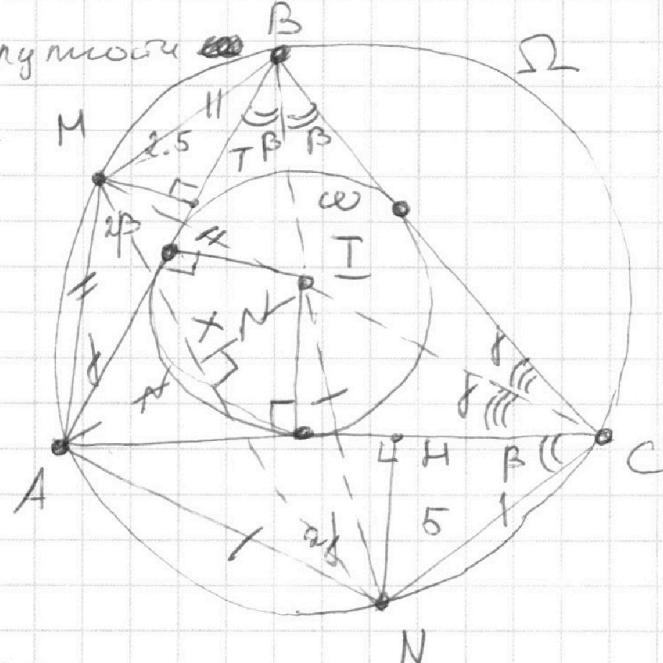
$CN = 5 / \sin \beta$  (т.к.  $\triangle CHN$ -прямоуг.)  $\Rightarrow$

$AN = NI = NC = 5 / \sin \beta$ . Аналогично

$BM = MI = MA = \frac{2.5}{\sin j}$ . Тогда, если

$x = AI$ , то у радиуса  $\angle ANI$

$x = 2 \sin j \cdot 5 / \sin \beta$ . А из  $\triangle AMI$   $x = 2 \sin \beta \cdot 2.5 / \sin j$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Tогда  $10 \frac{\sin f}{\sin \beta} = 5 \frac{\sin \beta}{\sin f} \Rightarrow \sin^2 f = \frac{1}{2} \sin^2 \beta$   
 $\Rightarrow \sin f = \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$ . ~~неоконченное~~

~~АТ~~  
~~sin f~~ Тогда  $AN = \frac{5}{\sin \beta \sin f} = \frac{5}{\sqrt{2} \sin f}$ , а

~~AM = \frac{5}{\sin f}~~  $\Rightarrow AN = \frac{AM}{\sqrt{2}}$

Тогда  $X = 10 \frac{\sin f}{\sqrt{2} \sin f} = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow AE = \frac{10}{\sqrt{2}}$

Ответ:  $\frac{10}{\sqrt{2}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y_1 \geq -2x_1 & 2x_1 + y_1 \geq 0 \\ y_1 \leq -2x_1 + 34 & 2x_1 + y_1 \leq 34 \\ y_2 \geq -2x_2 & 2x_2 + y_2 \geq 0 \\ y_2 \leq -2x_2 + 34 & 2x_2 + y_2 \leq 34 \\ 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 & \\ 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14 & \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 34 \geq a \geq 0 \quad a - b = 14 \\ 34 \geq b \geq 0 \quad 0 \rightarrow 14 \\ \quad \quad \quad 1 \rightarrow 15 \\ 2 \rightarrow 18 \quad 2 \rightarrow 16 \\ 3 \rightarrow 12 \quad 2 \rightarrow 14 \end{array}$$

21 пары

$$AB = 24 \text{см} \quad BC = 12 \text{см} \quad AC = 12 \text{см}$$

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2} \text{ см}$$

$$\begin{cases} ax + by - 2b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\sin \angle AOB = \frac{AB}{AO^2 - 49}$$

если  $\angle AOB = 90^\circ$

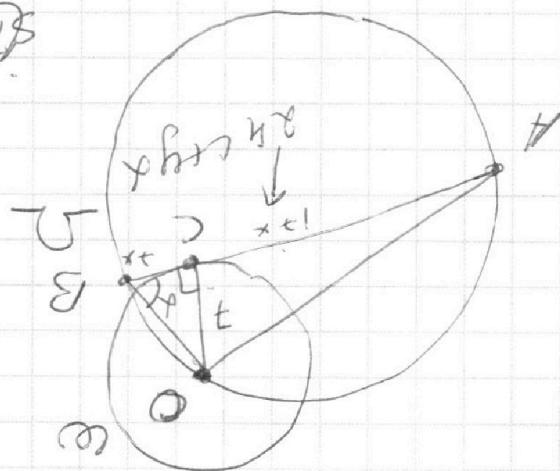
если  $\angle AOB = 180^\circ$

$AC = 12 \text{ см}$

$BC = 7 \text{ см}$

$AB = 12 \sin \alpha$

$R = \frac{AO}{\sin \alpha}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**

$$x + y = 86$$

$$(x^2 + y^2 - 1) \left( x^2 + (y-1)^2 - 16 \right) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 - 16 \leq 0$$

$$16 \geq (y-1)^2$$

$$\sqrt{16} \geq |y-1|$$

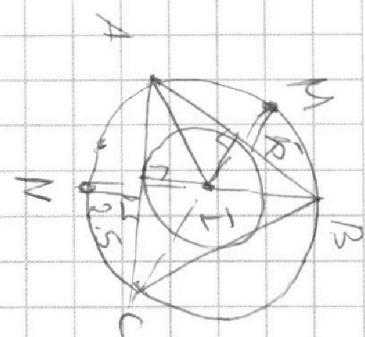
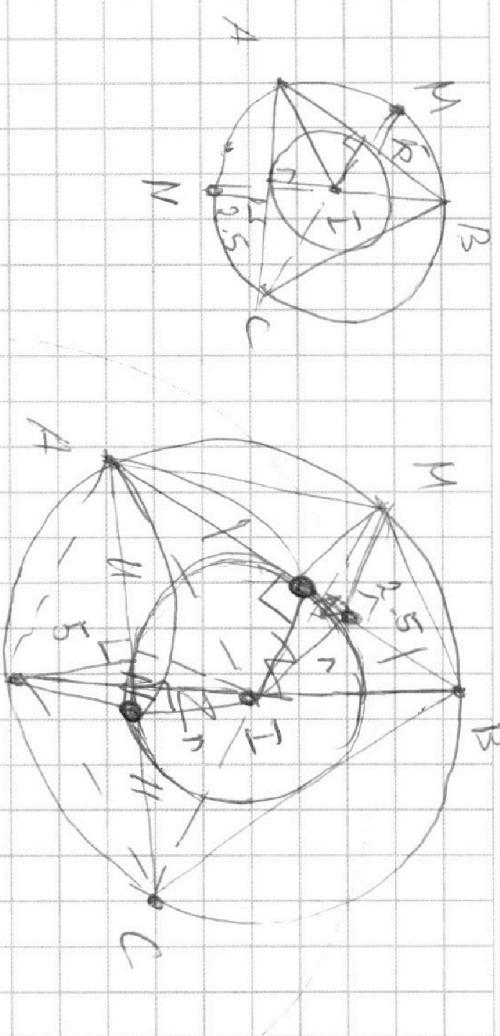
$$4 \geq |y-1|$$

$$y = 86 - x$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [4; 86]$$

One hand do y does we need  
2 -> answer

$$x = \frac{7}{(\frac{R}{\sin \varphi})^2 - 2 \cos^2 \varphi} \frac{2.5 \cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad x_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\underline{3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x-1)^2 - 1}$$
$$3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$
$$D = 36 - 24 = 12$$
$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$a = 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$
$$b = 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \frac{x_0}{2} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \quad g_0 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1$$
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 1 - \frac{3}{4}$$
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0 \quad = \frac{1}{4}$$
$$\begin{cases} a = b \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{cases} \quad \text{и } \text{корень}$$
$$a + b + 2\sqrt{ab} = 1$$
$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$
$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{9x^4 + 18x^3 - 2x^2 - 3x - 2} = 6x^2 + 3x + 1$$
$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$
$$g(x) = 1$$
$$x = \frac{1}{9}$$
$$D = 240^2 + 289 \cdot 26^2 = 120^2 + 229 \cdot 676$$
$$\begin{array}{r} 24061 \\ \times 289 \\ \hline 6084 \\ 5408 \\ \hline 195364 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 676 \\ \times 289 \\ \hline 5408 \\ 1352 \\ \hline 195364 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 195364 \\ \times 21 \\ \hline 195364 \end{array}$$
$$26^2 = \frac{120^2}{13} - \frac{289}{26}$$
$$2058$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

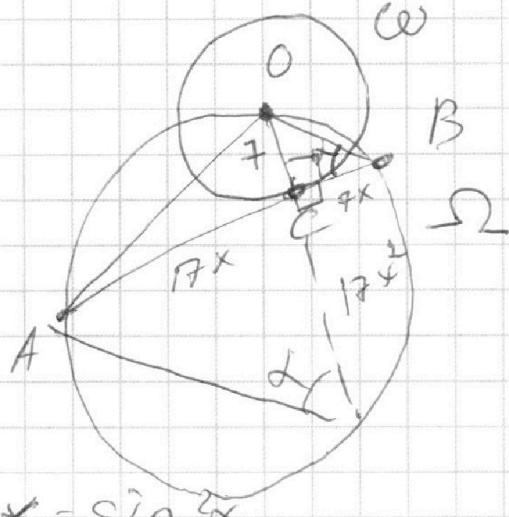
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\tan \alpha = \frac{7}{R} = \frac{1}{x}$$

$$x = C + g \alpha$$

$$AO = 2R \sin \alpha = 26 \sin \alpha$$

$$OB = 7 / \sin \alpha$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 = 17^2 C + g^2 \alpha$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 289 \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\alpha = \sin^{-1} x$$

$$26^2 t^2 - 289 \left( \frac{1-t^2}{t^2} \right) - 49 = 0$$

$$26^2 t^4 - 289(1-t^2) - 49 t^2 = 0$$

$$26^2 t^4 - 289 + 289 t^2 - 49 t^2 = 0$$

$$26^2 t^4 + 240 t^2 - 289 = 0$$

$$h = t^2$$

$$26^2 k^2 + 240 k - 289 = 0$$

$$(-13; 26) \quad Q (3; 26)$$

$$O = 16k + d$$

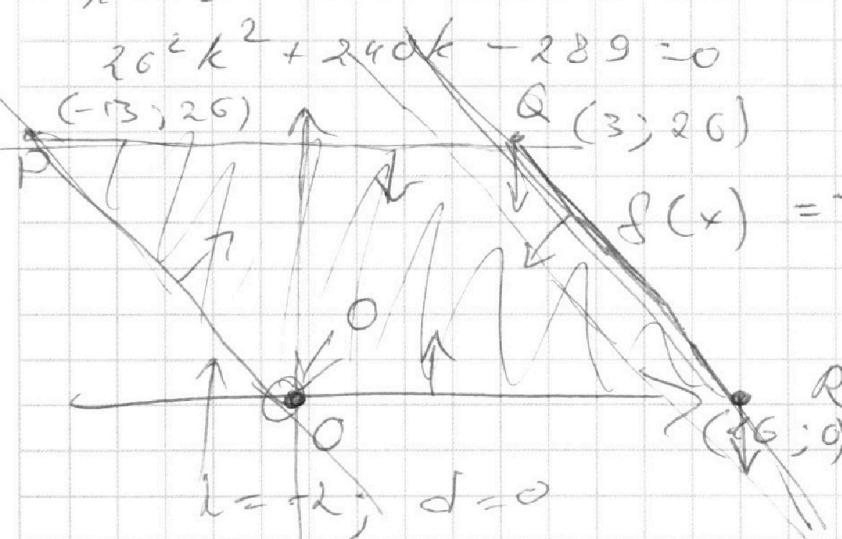
$$26 = 3k + d$$

$$d = -16k$$

$$26 = -13k$$

$$k = -2$$

$$d = 34$$



$$g(x) = -2x + 34$$

$$y_0 \leq -2x_0 + 34$$

$$\begin{cases} y_0 \leq f(x_0) \\ y_0 \geq g(x_0) \end{cases} \quad y_0 \leq 26$$

$$y_0 \geq -2x_0$$

$$y_0 \leq 3 \quad y_0 \geq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2}$$

2)

$$(a+b; a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(a+b; (a+b)^2 - 3ab)$$

дискрет, то реш б с ищ б  
тогда  $d \leq d$

$$d \leq 9$$

$$a = 5$$

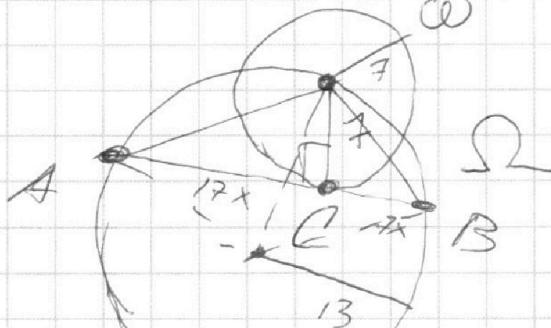
$$b = 4$$

составление

$$(9; 81 - 9 \cdot 5 \cdot 4) = (9; 9,$$

3)

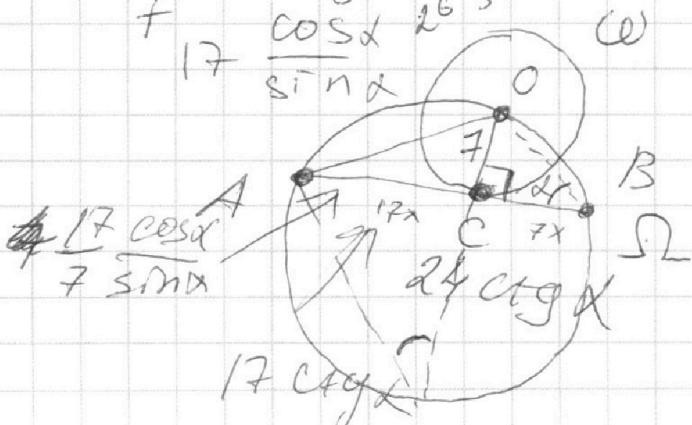
$$17 \cos x$$



$$\frac{17}{7} \cdot 7 \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$17 \frac{\cos x}{\sin x} = 26 \sin x$$

$$13 = \frac{AO}{\sin x}$$



$$AO = 26 \sin x$$

$$CB = 7x = 7 \operatorname{ctg} x = 7 / \operatorname{tg} x = \frac{7 \cos x}{\sin x}$$

—

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^7, bc : 2^{17}, ac : 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$\alpha_2$  лежит в а степени  $\alpha_2$

$\beta_2$  в степени  $\beta_2$

$f_2$

$$\alpha_7 - \alpha_7, \beta_7, f_7 \}$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 15.$$

$$+ \alpha_7 + \beta_7 \geq 11$$

$$\beta_2 + f_2 \geq 17$$

$$\beta_2 + \alpha_2 \geq 23$$

$$+ \beta_7 + f_7 \geq 18.$$

$$+ \beta_7 + f_7 \geq 39$$

$$\text{Тогда } \alpha_2 + \beta_2 + f_2 \geq 55$$

принял

$$\alpha_7 + \beta_7 + f_7 \geq 28$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + f_2 = 28$$

$$\alpha_7 = 0$$

$$\beta_7 = 0$$

$$f_7 = 28$$

$$\alpha_2 = 15$$

$$\beta_2 = 13$$

$$f_2 = 13$$

$$\alpha_7 = 11$$

$$\beta_7 = 11$$

$$f_7 = 11$$

$$\alpha_2 = 13$$

$$\beta_2 = 5$$

$$f_2 = 13$$

$$\alpha_7 = 11$$

$$\beta_7 = 11$$

$$f_7 = 11$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\beta_2 = 0$$

$$f_2 = 0$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

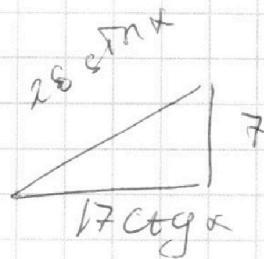
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AB =

17

26sin\alpha

26

26sin\alpha

AD = 26  
sin\alpha

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 289 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 289 \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 289 \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$26^2 \sin^4 \alpha = 49 \sin^2 \alpha + 289(1 - \sin^2 \alpha)$$

$$\exists x = \sin^2 \alpha \geq 0$$

$$\exists x = \frac{7 \operatorname{ctg} \alpha}{1} \quad x = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$26^2 x^2 - 49x - 289 + 289x = 0$$

$$26^2 x^2 + 240x - 289 = 0 \quad 120^2 + 26^2 \cdot 29$$

Решение

$$\begin{array}{r} \times 240 \\ \hline \times 240 \\ \hline 000 \\ 960 \\ \hline 480 \\ \hline \overline{57600} \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 26 \\ \hline \times 26 \\ \hline 156 \\ 525 \\ \hline 676 \\ \times 29 \\ \hline 6084 \\ 1352 \\ \hline \overline{19604} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{x}{4} = \\ \hline \begin{array}{r} 120 \\ \times 120 \\ \hline 000 \\ 240 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{r} 120 \\ \times 120 \\ \hline 14400 \\ + 14400 \\ \hline \overline{28800} \end{array} \\ \begin{array}{r} 819 \\ \hline 828 \end{array} \end{array}$$

$$34004 / 2$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 17002 \\ \times 14 \\ \hline 14 \\ - 14 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline 18501 \\ \times 97 \\ \hline \end{array}$$

$$80 \cdot 80 = 6400$$

$$90 \cdot 90 = 8100$$

$$97 \cdot 97$$

✓  
✓  
✓

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$26x^2 - 240x - 289 = 0$$

$$17x = 7 \cdot \cancel{cxyB} \quad \begin{array}{r} 240 \\ 20 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$x = \cancel{cxyB} \quad a + b = \frac{240}{26}$$

$$ab = \frac{289}{26}$$

$$26a + 26b = 240$$

$$26ab = 289$$

$$\begin{array}{r} 480 \\ 13 \\ \hline 1440 \\ 480 \\ \hline 6240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14400 \\ - 8240 \\ \hline 8160 \end{array}$$

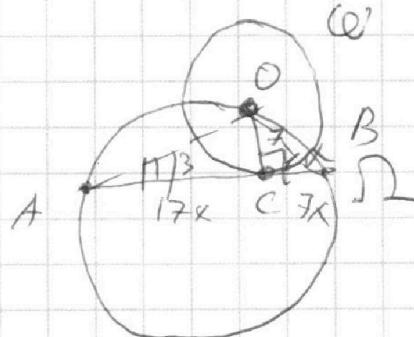
$$a = \frac{240 - 26b}{26}$$

$$(240 - 26b)b = 240$$

$$26b^2 - 240b + 240 = 0$$

$$13b^2 - 120b + 120 = 0$$

$$\Delta = 14400 - 62400 = 8160$$



$$S_{ABO} = \frac{7 \cdot 24x}{a} = \frac{7 \cdot 12x}{84x} = \frac{1}{2} = 5 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 5 - 5$$

$$\frac{\sin x \cdot OB \cdot AB}{2} = S_{ABO}$$

$$OB = 8 \cdot 5 \sqrt{11} = 40\sqrt{11}$$

$$\sin x = \frac{AO}{26}$$

$$B = \frac{120 + 40\sqrt{11}}{2 \cdot 26} =$$

$$\frac{AO \cdot OB \cdot AB}{48}$$

$$= \frac{30 + 10\sqrt{11}}{13} =$$

$$a = \frac{240 - 20(3 + \sqrt{11})}{26}$$

$$= \frac{10}{13}(3 + \sqrt{11})$$

$$= \frac{120 - 10(8\sqrt{3} + 7\sqrt{11})}{13} = \frac{10}{13}(12 - 3 - \sqrt{11}) =$$

$$= \frac{10}{13}(9 - \sqrt{11})$$