



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим за  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  - степени входящие  
в шестерки  $a, b, c$  соответственно. За  
 $\alpha_7, \beta_7, \gamma_7$  - степени входящие в  
 $a, b, c$  соответственно. Тогда т.к.

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \quad \text{и } a, b, c \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 15 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{55}{2} \text{ т.к.}$$

$$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \geq 0 \text{ и } \in \mathbb{Z}, \text{ то}$$
$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28$$

$$\begin{cases} \alpha_7 + \beta_7 \geq 11 \\ \beta_7 + \gamma_7 \geq 18 \\ \alpha_7 + \gamma_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 34 \text{ т.к.}$$

$$\alpha_7, \beta_7, \gamma_7 \geq 0, \text{ то}$$

$$\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 39$$

$$\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 39$$

$$\text{Тогда } abc : 2^{\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7} \cdot 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}$$

$$\text{т.к. } \alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 39 \text{ и } \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28 \Rightarrow$$

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$$

и 2 и 7 взаимнопросты

Тогда т.к.  $a, b, c \neq 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{N}$ )

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Покажем, что  $\exists a, b, c$  такие что  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

а выполним условие:

$$b = 2^5 \quad a = 2^{10} \cdot 7^{11} \quad c = 2^{13} \cdot 7^{28} \quad \text{Легко видеть, что}$$

$$\text{условие выполнено и } abc = 2^{28} \cdot 7^{39} \quad \text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим НОД чисел  $x$  и  $y$  за  $a(x; y)$ .

Тогда т.к.  $\frac{a}{b}$  несократима и  $\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \end{cases}$ , то

$(a; b) = 1$  (взаимнопростота).

$$\text{Перепишем } \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Ясно, что наибольшее число на которое ~~мы~~  
можно сократить дробь это  $(a+b; (a+b)^2-9ab)$

$$= m. \text{ Тогда } \begin{cases} a+b \equiv m \\ (a+b)^2-9ab \equiv m \end{cases} \Rightarrow$$

$$9ab \equiv m \text{ т.к. } a+b \equiv m \Rightarrow (a+b)^2 \equiv m.$$

Но  $a+b$  взаимнопросто с  $a$  и  $b$  т.к.  
 $(a; b) = 1$ . Т.е.  $(a+b; ab) = 1$ , но

$$9ab \equiv m \Rightarrow 9 \equiv m. \text{ Тогда } 9 \geq m.$$

Приведём пример когда можно сократить  
на 9 (т.е. достигается  $\ominus$ ):

$a=5$  Тогда  $(a; b) = 1$  - выполняются  
 $b=4$  несократимости  $\frac{a}{b}$  и условие

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{81-9 \cdot 20} = \frac{1}{9-20} = -\frac{1}{13} \text{ - несократима}$$

Итак,  $9$ -то достигается  $\Rightarrow$   
наибольшее  $m = 9$ .

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим центр  $\omega$  за  $O$ .

Тогда т.к.  $AB$  касается  $\omega$

$B(\cdot)C$ , то  $OC \perp AB$ . и

$OC$  - радиус  $\omega \Rightarrow OC = 7$ .

Обозначим  $\angle OBC = \alpha$ .

Тогда  $BC = 7 \cdot \operatorname{ctg} \alpha$  т.к.  $\triangle OCB$  - прямоугольный

$\Rightarrow$  т.к.  $\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$ , то  $AC = 17 \operatorname{ctg} \alpha$

Поэтому  $\triangle AOB$  вписан в  $\Omega$ , то

$R_{\Omega} = OB = \frac{AO}{2 \sin \alpha} \Rightarrow$

$AO = 26 \sin \alpha$ . Тогда т.к.  $\triangle ACO$  - прямоугольный

, то по Th Пифагора  $AO^2 = AC^2 + OC^2$ . Т.е.

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 289 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

Обозначим  $t = \sin^2 \alpha$ ,  $t \in [0, 1]$  получим

$$26^2 t = 49 + 289(1-t)$$

$$26^2 t^2 + 240t - 289 = 0$$

$$\begin{array}{r} 26^2 \\ \times 289 \\ \hline 22984 \\ 20600 \\ \hline 646000 \\ \hline 646000 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$26^2 t^2 + 240t - 289 = 0$$

Если  $a$  и  $b$  корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , то  $a + b = -\frac{b}{a}$

Решая квадратное уравнение находим

$t = \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{t} \quad (t \geq 0)$ . Возвратим  $\operatorname{ctg} \alpha$  и подставим в  $AB = 24 \operatorname{ctg} \alpha$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\begin{cases} a = 3x^2 - 6x + 2 \\ b = 3x^2 + 3x + 1 \end{cases} \text{ и } \text{удз } 0 \leq 3 \leq a, b \geq 0$$

Тогда можно переписать так:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - \sqrt{a} - \sqrt{b}) = 0$$

$$\begin{cases} a \geq 0, b \geq 0 & (1) \\ a = b & \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$
$$9x = 1 \quad x = \frac{1}{9}$$

~~Видно~~ Подставляя  $x = \frac{1}{9}$  в  $3x^2 - 6x + 2$  и  $3x^2 + 3x + 1$  видим, что они  $\geq 0$  при  $x = \frac{1}{9}$  т.е. удовлетворяют удз. Т.е.  $x = \frac{1}{9}$  — единственный корень (1).

(2)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ . Рассмотрим ~~графики~~ графики  $a$  и  $b$ :

Видим, что

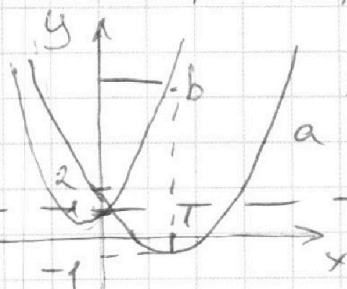
на всей ОДЗ

(видна  $a \geq 0, b \geq 0$ )

одни  $y$   $a$  и  $b$

$\Rightarrow 1$  т.е.  $\sqrt{a} \geq 1$

$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$  т.е.



\* график  $b$  выпуклый

приближённо,

$a$  пересекает  $y$  в  $(0, 2)$

$b$  пересекает  $y$  в

$(0, 1)$

(2) не имеет решений.

Ответ:  $\left\{ \frac{1}{9} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда число пар  $(a_i; b_i)$  будет равно количеству способов представить  $a_i = 2x_2 + y_2$  для  $y_2 \in \mathbb{Z}, y_2 \geq 0$  и  $x_2 \in \mathbb{Z}, x_2 \geq -13$  и  $b_i = 2x_1 + y_1$   $x_1 \in \mathbb{Z}$  и  $y_1 \in \mathbb{Z}, y_1 \geq 0$

~~А именно представить~~

$a_i$  и  $b_i$  можно представить числом способом только целых  $(\cdot)$  решений на прямой  $-2x = y$  при  $x, y \in \mathbb{Z}$

(для каждого целочисленного  $i$  они получают ответ на 1 и их число не меняется)

Их ~~14~~. Тогда ~~общее~~ число пар  $(a_i; b_i)$  будет равно  $\frac{14 \cdot 14}{2} = 98$

Тогда общее число пар будет равно  $98 \cdot 21 = 2058$ . Ответ: 2058.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Запишем уравнение  
прямой  $PO$  по  $(\cdot) P$  и  $O$   
и прямой  $QR$  по  $(\cdot) Q$  и  $R$ .

Получим:

$$PO: -2x = y$$

$$QR: -2x + 34 = y$$

$$PQ: y = 26$$

$$OR: y = 0$$

Если  $(\cdot) (x_0; y_0)$  лежит внутри  $POQR$ ,  
то её координаты удовлетворяют:

$$\begin{cases} y_0 \geq -2x_0 \\ y_0 \leq -2x_0 + 34 \\ y_0 \leq 26 \\ y_0 \geq 0 \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} 2x_0 + y_0 \geq 0 \\ 2x_0 + y_0 \leq 34 \\ y_0 \leq 26 \\ y_0 \geq 0 \end{cases}$$

Тогда если  $A$  и  $B$  — целочисленная пара  $(\cdot)$ , то

$$\begin{cases} 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14 \\ 34 \geq 2x_2 + y_2 \geq 0 \\ 34 \geq 2x_1 + y_1 \geq 0 \end{cases}$$

$a = 2x_1 + y_1$ ,  $b = 2x_2 + y_2$  Тогда

нам подойдут пары для которых  $(a; b)$ :

$(0; 14)$ ,  $(4; 15)$  ---  $(20; 34)$  и  $x \geq 21$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

~~Рассмотрим~~ Рассмотрим окружности

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ и } x^2 + (y-12)^2 = 16$$

и прямую  $y = 8b - ax$

Система будет иметь  
ровно 2 решения для  
каждого  $b$  если

прямая  $y = 8b - ax$

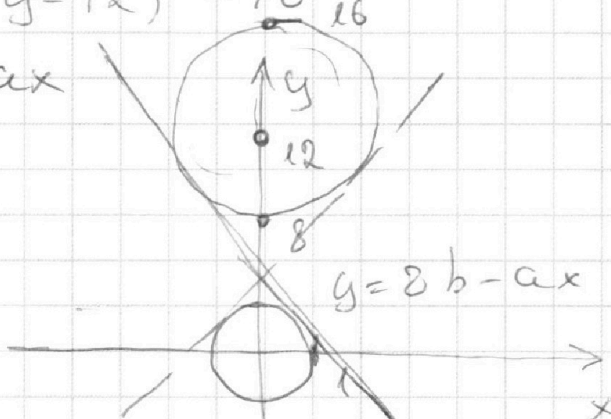
будет касательной к каждой из окружностей.

~~будет~~

И т.к. прямая  $y = 8b - ax$  ~~не~~ отнимается

только в единственном месте она //

касательным на рисунке.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Центр внешней окружности  $\Omega$   
 $CO$  - точка пересечения  
 биссектрис. Тогда  
 $BI$  и  $CI$  и  $AI$  -  
 биссектрисы  $\triangle ABC$ .  
 Т.к.  $(-)$   $N$  и  $M$  -  
 середины дуг  
 меньшей дуги  
 вершин  $B$  и  $C$ , то  
 они также лежат на  
 соответствующих биссектрисах. Т.к. Тогда  
 $ABN$  и  $ACN$  вписаны в  $\Omega$  и  $AN$  - диаметр по  
 лемме о Трисубсе  $AN = IN = NC$  и  $BM = MI =$   
 $MA$ . Обозначим  $\beta = \frac{1}{2} \angle ABC$  и  $\alpha = \frac{1}{2} \angle BCA$   
 Тогда т.к.  $ABCN$  вписаны в  $\Omega$ , то  
 $\angle ACN = \beta = \angle CAN$  (радиус  $\triangle ANC$ ). Аналогично  
 $\angle AMB = \alpha = \angle MAB$ .  
 $CN = \frac{5}{\sin \beta}$  (т.к.  $\triangle CHN$  - прямоугольный)  $\Rightarrow$   
 $AN = NI = NC = \frac{5}{\sin \beta}$ . Аналогично  
 $BM = MI = MA = \frac{2 \cdot 5}{\sin \alpha}$ . Тогда, если  
 $x = AI$ , то у равнобедренного  $\triangle ANI$   
 $x = 2 \sin \alpha \cdot \frac{5}{\sin \beta}$ . А у  $\triangle AMI$   $x = 2 \sin \beta \cdot \frac{2.5}{\sin \alpha}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда  $10 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 5 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 \beta$   
 $\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$

~~$AI = \frac{5}{\sin \beta \cos \alpha}$~~  Тогда  $AN = \frac{5}{\sin \beta \cos \alpha}$ , а

~~$AM = \frac{5}{\sin \alpha} \Rightarrow AN = \frac{AM}{\sqrt{2}}$~~

Тогда  $x = 10 \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2} \sin \alpha} = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow AI = \frac{10}{\sqrt{2}}$

Ответ:  $\frac{10}{\sqrt{2}}$



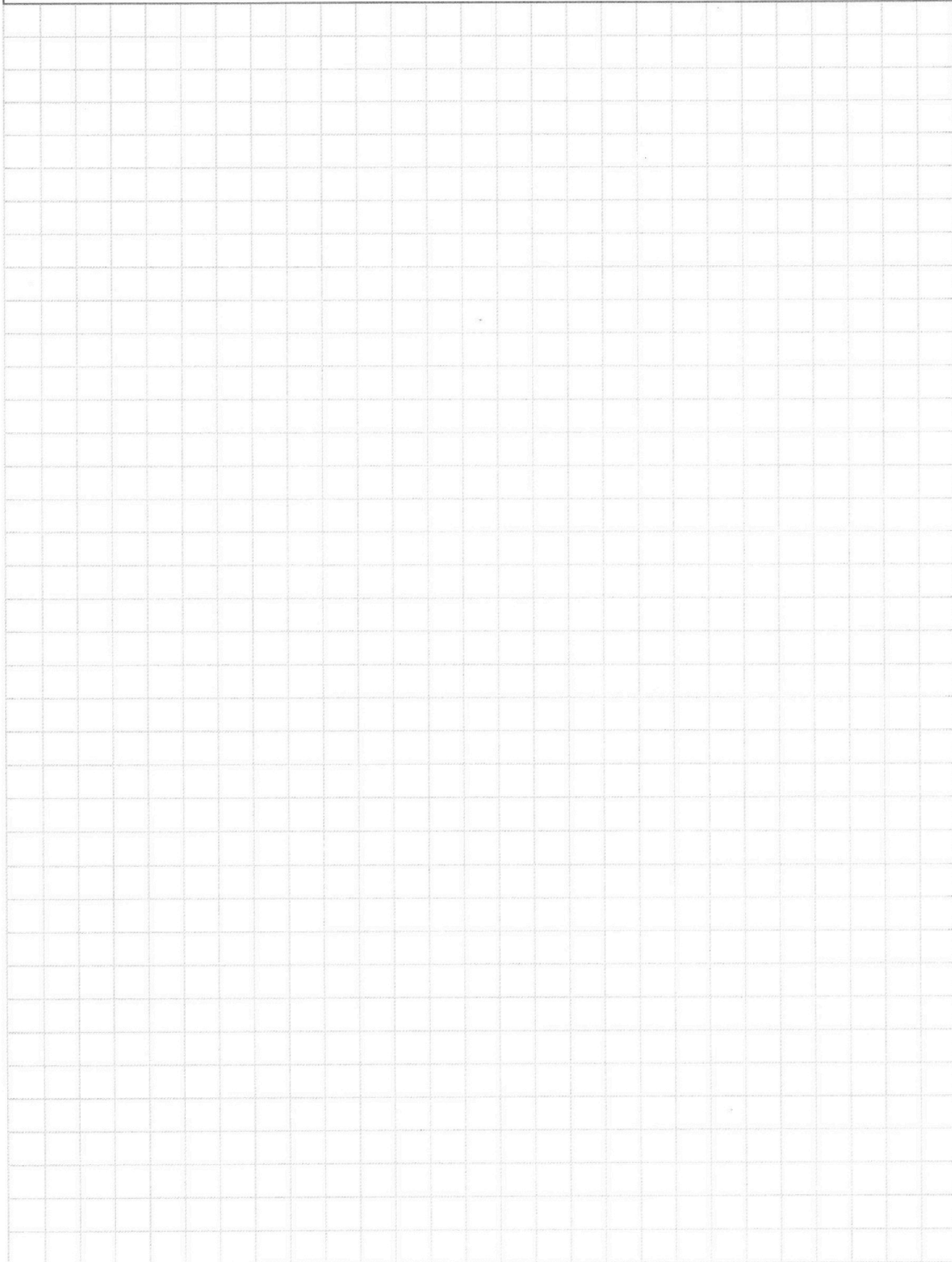
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases}
 y_1 \geq -2x_1 & 2x_1 + y_1 \geq 0 & 3 \geq y_1 \geq 0 \\
 y_1 \leq -2x_1 + 34 & 2x_1 + y_1 \leq 34 & 3 \geq y_2 \geq 0 \\
 y_2 \geq -2x_2 & 2x_2 + y_2 \geq 0 & 16 \geq x \geq 0 \\
 y_2 \leq -2x_2 + 34 & 2x_2 + y_2 \leq 34 &
 \end{cases}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$

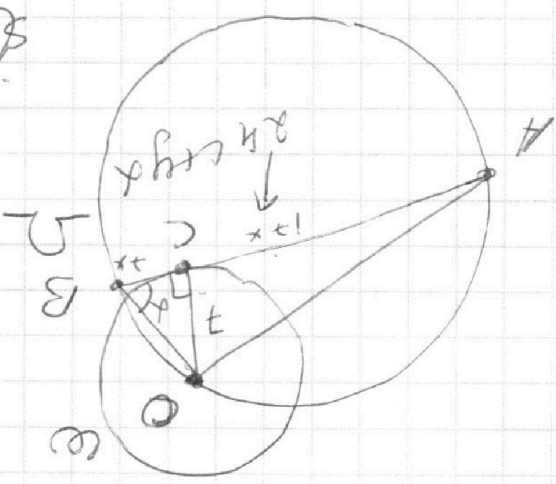
$$\begin{cases}
 34 \geq a \geq 0 \\
 34 \geq b \geq 0
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 a - b = 14 \\
 4 \leftarrow 14 \\
 1 \leftarrow 15 \\
 2 \leftarrow 18 \\
 3 \leftarrow 21
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 y = -2x + 34 \\
 y = 2x
 \end{cases}$$

$\sin \angle AOB = \frac{AB}{2R}$   
 where  $S = 7 \cdot 12 \operatorname{ctg} \alpha$   
 $AB = 24 \operatorname{ctg} \alpha$   
 $R = \frac{24 \operatorname{ctg} \alpha}{2} = 12 \operatorname{ctg} \alpha$

$$\begin{cases}
 ax + by - 14 = 0 \\
 (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 21)^2) \leq 0
 \end{cases}$$

$\sin \angle AOB = \frac{AB}{2R}$   
 $17x = \sqrt{AO^2 - 49}$

$R = \frac{AO}{2 \sin \alpha}$   
 $AO = 16 \sin \alpha$   
 $BC = 7 \operatorname{ctg} \alpha$   
 $AC = 17 \operatorname{ctg} \alpha$





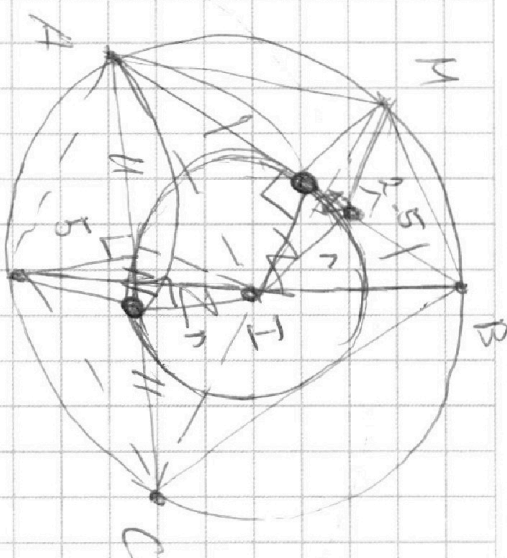
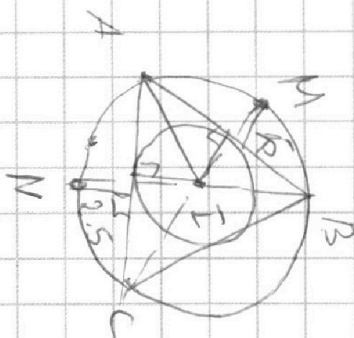
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{676}{289} \quad x = \sqrt{\left(\frac{2.5}{\sin \varphi}\right)^2 - 2.5^2}$$

$$\frac{2.5 \cos \varphi}{\sin \varphi}$$

$$2.5 \cot \varphi \left(\frac{2.5}{\sin \varphi}\right)^2$$

$$2x + y = 8$$

два корня  $y$  один не подходит  $2-x$  равен

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-2)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-2)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{y} \leq 1 \rightarrow x^2 + (y-2)^2 - 16 > 0 \rightarrow 0 \text{ не берем}$$

$$\sqrt{y} \leq 4 \rightarrow$$

$$\sqrt{4} \leq y \leq 8$$

$$y = 8 - 2x$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [4; 8]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad x_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3(x^2 - 2x + 1) - 1} = \sqrt{3(x-1)^2 - 1}$$

$$3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a = 3x^2 - 6x + 2 \quad \neq 0$$

$$b = 3x^2 + 3x + 1 \quad \neq 0$$

$$\frac{1}{2}x_0 = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$y_0 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 1 - \frac{3}{4}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \quad \text{нет корней}$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

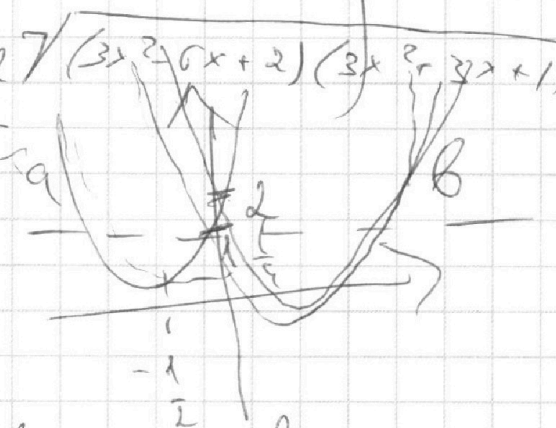
$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{9x^4 - 18x^3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$D = 240^2 + 289 \cdot 26^2 \cdot 4$$



$$\begin{array}{r} 240^2 \\ \times 289 \\ \hline 6084 \\ 5408 \\ \hline 1352 \\ 195364 \end{array}$$

$$\frac{D}{4} = 120^2 + 289 \cdot 26^2 = 120^2 + 289 \cdot 676$$

$$\begin{array}{r} 120^2 \\ + 195364 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26^2 \cdot \frac{120}{13} = \frac{239}{26} \\ \times 98 \\ \hline 2058 \\ \times 21 \\ \hline 1958 \end{array}$$

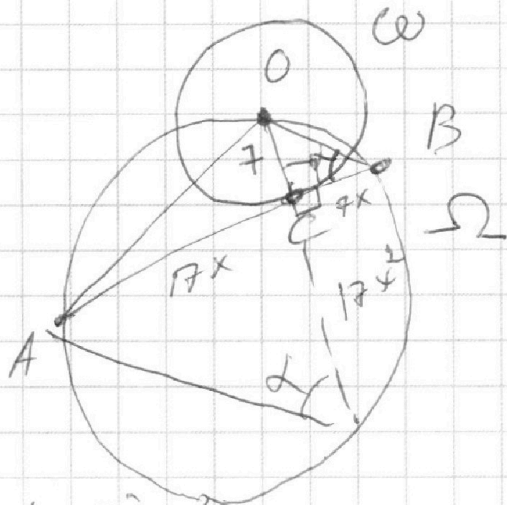
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$$

$$x = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$AO = 2R \sin \alpha = 26 \sin \alpha$$

$$OB = 7 / \sin \alpha$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 17^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 289 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$x = \sin^2 \alpha$$

$$26^2 x - 289 \left( \frac{1-x}{x} \right) - 49 = 0$$

$$26^2 x^2 - 289(1-x) - 49 + x = 0$$

$$26^2 x^2 - 289 + 289x - 49x + x = 0$$

$$26^2 x^2 + 240x - 289 = 0$$

$$k = x^2$$

$$26^2 k^2 + 240k - 289 = 0$$

$$(-13; 26)$$

$$Q(3; 20)$$

$$0 = 16k + d$$

$$26 = 3k + d$$

$$d = -16k$$

$$26 = -13k$$

$$k = -2$$

$$d = 34$$

$$f(x) = -2x + 34$$

$$l = +2; d = 0$$

$$g(x) = -2x$$

$$y_0 \leq -2x_0 + 34$$

$$y_0 \geq -2x_0$$

$$y_0 \leq 3 \quad y_0 \geq 0$$

$$y_0 \leq f(x_0) \quad y_0 \leq 26$$

$$y_0 \geq g(x_0) \quad y_0 \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a; b) = 1$$

2)

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$(a+b; a^2-7ab+b^2)$$

$$(a+b; (a+b)^2-9ab)$$

$d \leq g$ , то  $a \leq b$  или  $b \leq a$   
тогда  $d = g$

$$\underline{d \leq g}$$

$$a = 5$$

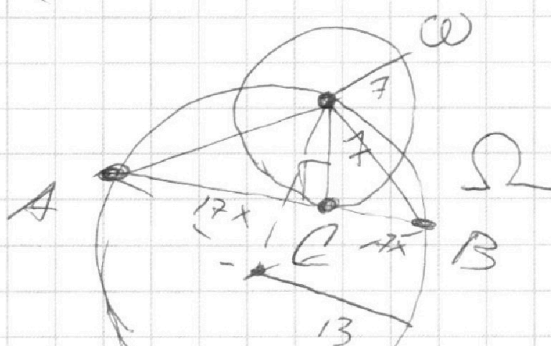
$$b = 4$$

составим

$$(g; 81 - 9 \cdot 5 \cdot 4) = (g; g)$$

$$17 \cos x$$

3)



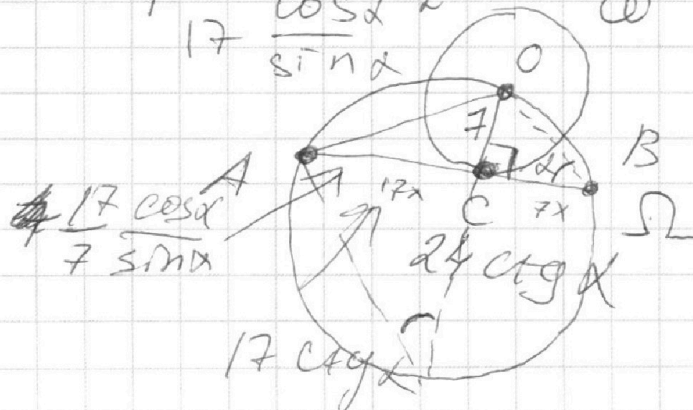
$$\frac{17}{7} = \frac{7 \cos x}{7 \sin x} = \frac{7 \cos x}{26 \sin x}$$

$$17 = \frac{7 \cos x}{\sin x}$$

$$13 = \frac{AO}{2 \sin x}$$

$$AO = 26 \sin x$$

$$CB = 7x = 7 \operatorname{ctg} x = \frac{7 \cos x}{\sin x}$$



$$17 \operatorname{ctg} x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

1 2 входит в a в степени  $\alpha_2$

в b в степени  $\beta_2$

$f_2$

7 -  $\alpha_7, \beta_7, f_7$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 15$$

$$\alpha_7 + \beta_7 \geq 11$$

$$\beta_2 + f_2 \geq 17$$

$$f_2 + \alpha_2 \geq 23$$

$$\alpha_7 + \beta_7 + f_7 \geq 18$$

$$\alpha_7 + \beta_7 + f_7 \geq 39$$

Тогда  $\alpha_2 + \beta_2 + f_2 \geq \frac{55}{2}$

т.е.  $\alpha_2, \beta_2, f_2 \geq 28$

$$\alpha_2, \beta_2, f_2 \geq 0$$

то  $\alpha_2 + \beta_2 + f_2 \geq 28$

Аналогично

$$\alpha_7 + \beta_7 + f_7 \geq \frac{68}{2} = 34$$

Тогда  $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$

Пример

$$\alpha_2 + \beta_2 + f_2 = 28$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 15$$

$$f_2 = 13$$

$$\alpha_2 + f_2 = 23$$

$$\beta_2 = 5$$

$$\alpha_2 = 10$$

$$\alpha_7 + \beta_7 + f_7 = 34$$

$$\alpha_7 + \beta_7 = 11$$

$$f_7 = 23$$

$$\beta_7 = 0$$

$$\alpha_7 + \beta_7 + f_7 \geq 39$$

$$\alpha_7 = 11$$

$$f_7 = 28$$

$$\beta_7 = 0$$

$$b = 2^5$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$c = 2^{23} \cdot 7^{28}$$

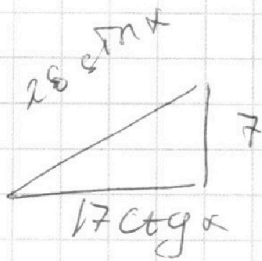
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = \frac{AD}{\sin \alpha} \quad AD = 26 \sin \alpha$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 2 \cdot 17 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 289 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 289 \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$26^2 \sin^4 \alpha = 49 \sin^2 \alpha + 289(1 - \sin^2 \alpha)$$

$$7x = \sin^2 \alpha \geq 0$$

$$7x = \frac{7 \operatorname{ctg} \alpha}{1} \quad x = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$26^2 x^2 - 49x - 289 + 289x = 0$$

$$26^2 x^2 + 240x - 289 = 0$$

$$120^2 + 26^2 \cdot 29$$

~~26^2 x^2~~

$$\begin{array}{r} 240 \\ \times 240 \\ \hline 960 \\ 480 \\ \hline 57600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 525 \\ \hline 678 \\ \times 29 \\ \hline 6084 \\ 1352 \\ \hline 19604 \end{array}$$

$$\frac{2}{4} = \begin{array}{r} 120 \\ \times 120 \\ \hline 000 \\ 240 \\ \hline 120 \\ \hline 14400 \\ + 19604 \\ \hline 34004 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times 91 \\ \hline 91 \\ 819 \\ \hline 8281 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34004 \mid 2 \\ \hline 2 \\ \hline 14 \\ -14 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17002 \mid 2 \\ \hline 2 \\ \hline 34004 \end{array}$$

$$80 - 80 = 6400$$

$$90 - 90 = 8100$$

$$97 \cdot 97$$

$$\begin{array}{r} 97 \\ \times 97 \\ \hline 679 \\ 873 \\ \hline 9409 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$26x^2 - 240x - 289 = 0$$

$$17x = 7 \cdot \text{сторона} \frac{240}{26} \quad \frac{289}{26} \quad (1)$$

$$x = \text{сторона} \quad a + b = \frac{240}{26}$$

$$ab = \frac{289}{26}$$

$$26a + 26b = 240$$

$$26ab = 289$$

$$a = \frac{240 - 26b}{26}$$

$$(240 - 26b)b = 289$$

$$26b^2 - 240b + 289 = 0$$

$$13b^2 - 120b + 144.5 = 0$$

$$D = 14400 - 6240 = 8160$$

$$D = 5 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 5 - 55$$

$$\sqrt{D} = 8.5\sqrt{11} = 40\sqrt{11}$$

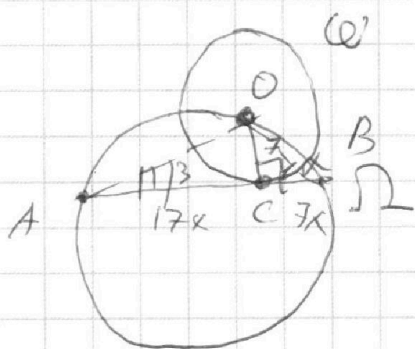
$$b = \frac{120 \pm 40\sqrt{11}}{2 - 26} =$$

$$= \frac{30 + 10\sqrt{11}}{13} =$$

$$= \frac{10}{13} (3 + \sqrt{11})$$

$$a = \frac{240 - 20(3 + \sqrt{11})}{26}$$

$$= \frac{120 - 10(3 + \sqrt{11})}{13} = \frac{10}{13} (12 - 3 - \sqrt{11}) = \frac{10}{13} (9 - \sqrt{11})$$



$$\begin{array}{r}
 2 \\
 480 \\
 \times 13 \\
 \hline
 1440 \\
 480 \\
 \hline
 6240 \\
 -14400 \\
 \hline
 8160
 \end{array}$$