



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} \cdot 7^4$$

$$bc : 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

11

$$(abc)^2 : 2^{45} \cdot 7^{68} \Rightarrow$$

$$abc : 2^{23} \cdot 7^{34}$$

Тогда  $\lambda, \beta, \gamma$  степенны  $2^4$  чисел

и  $b$  и  $c$  соотв ( $\lambda, \beta, \gamma$  и  $w_0 w_3, \tau, \alpha, \phi, \epsilon$   
- соответствующие) тогда

$$\lambda + \beta = 15$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \lambda = 23$$

3. Мног. числа  $b$  для  
которого  $\lambda$

0	15
1	14
2	13
3	12
4	11
5	10
6	9

Мног. числа  $b$  для  
которого  $\gamma$

17
16
15
14
13
12
11

$\lambda + \beta + \gamma = 23$ . Знаем  $\min(\lambda + \beta + \gamma)$  соответ-  
ствует при  $b=5$ , т.е. наше  $b$  должно быть не меньше  
эд., т.е.  $\lambda + \beta + \gamma \geq 23$

$b=5; \lambda=11; \beta=12$  - подходит, т.е.  $\lambda + \beta + \gamma \geq 23$

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. степень  $\beta$  не делит  $\alpha$   
степень  $\beta$ , то преобразование имеет  
 $L, \beta, \gamma$  как степени  $\beta$  имеют  
 $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  не являются общими.

$$L^\alpha \beta^\gamma \gamma^{\alpha}$$

$$\beta^\alpha \gamma^\beta \gamma^{\alpha}$$

$$L^\alpha \gamma^\beta \gamma^{\alpha}$$

$L$  есть число  $\gamma$  такое  
которого  $\beta$

0	11
1	10
2	9
3	8
4	7
5	6
6	5
7	4
8	3
9	2
10	1
11	0
12	0

Число  $\gamma$  такое  $\gamma$  есть  
которого  $\beta$

33
38
37
36
35
39
33
37
31
30
39
28
27

При  $L=12$  существует  $L^\alpha \beta^\gamma \gamma^{\alpha}$  где  $\beta$  делит  $\alpha$  (к  $L$  пред. 1, из  $\beta$  делит  $\alpha$ ) значит  
 $\min(L^\alpha \beta^\gamma \gamma^{\alpha})$  равно 39. ( $L=12; \beta=2^9; \gamma=1$ )

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 3^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\frac{a+b}{b}$  - неокрашенная ячейка  $a+b$  - красная окрашенная  
ячейка.

$\frac{a+b}{m}$ . Если  $a+b \leq m$ , то ячейка  
 $a^2 + ab + b^2$   $a^2 + ab + b^2 \leq m$  (если, когда  
суммируем  $(a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$ ,  
получается, что сумма получится, если  
 $ab \leq m$ ). Если  $m \leq a$  или  $m \leq b$ , то  
 $a+b \leq a$  или  $a+b \leq b$ , это невозможно,  
т.к.  $a+b$  - красная окрашенная, значит  
~~не~~  $m \leq 9$ . Пример  $m=9$ :

$$a=4; b=5. \quad \frac{4+5}{16 \cdot 140 + 25} = \frac{9}{41 \cdot 140} = \frac{9}{5740} = \frac{1}{637}$$

Ответ: 9

~~9~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 7} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$ODZ: 3x^2 - 6x + 7 \geq 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup (\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \infty)$$

$$1) D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \infty)$$

$$2) D = 9 - 4 \cdot 3 < 0$$

Задача есть, что  $\sqrt{3x^2 - 6x + 7} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$ ,

т.к.  $\sqrt{3x^2 - 6x + 7} \geq 0$ , а  $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$

$$(3x^2 - 6x + 7 - 3x^2 - 3x - 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 7})$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 7})$$

$$x = \frac{f}{g} \text{ т.е. } \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 7} = f$$

(некоторое неравенство)  
ODZ

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 1, \text{ т.е. } x_b = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \text{ Задача есть, что}$$

$$\text{если } x < 0 \quad 3x^2 - 6x + 7 \geq 2 > 1, \text{ а если } x > 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 1; \text{ если } x=0: 3+0+1=4 \geq 1 \text{ и}$$

$$3x^2 - 6x + 7 = 2; \sqrt{7+12} \geq 1 \text{ т.е. } ODZ \quad \frac{\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 7}}{2} \geq 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} ax + by - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

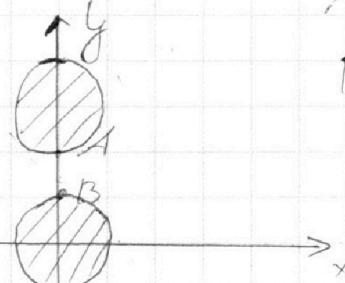
$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & \text{если } y^2 + 8^2 \geq 1 \\ (y-12)^2 \leq 16 & \text{если } x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1$  - окр. с.  $y = b$  в точке  $(0; 0)$  и  $R = 1$

$x^2 + (y-12)^2 = 16$  - окр. с центром в т.  $(0, 12)$  и  $R = 4$

$y = -ax + 8b$  - прямая

Рассматриваем  
 случай 2,



$A(0, 8)$

$B(0, 4)$

Также есть

$y = -ax + 8b$  - общая касательная к обеим окружностям, общая  
касательная окружности, общая л.

$$x^2 + (8b - ax)^2 = 1 ; x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2(1+a^2) + x(-16ab) + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = (16ab)^2 - 4(1+a^2)(64b^2 - 1) = 0 \quad (\text{усл. касательной})$$

$$48a^2b^2 + (1+a^2)(1-64b^2) = 0$$

$$48a^2b^2 + a^2 - 64a^2b^2 + 1 - 64b^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Требуем  $k = -a$  и  $8b = \sqrt{b}$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ y = kx + \sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow x^2 + (kx + \sqrt{b})^2 + 2kx\sqrt{b} + b^2 = 1 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + x(2kb) + b^2 - 1 = 0$$

$$D = 4k^2b^2 - 4(1+k^2)(b^2 - 1) = 0 \text{ (дел. дел.)}$$

$$\text{коэффициент } b^2k^2 - (b^2 - 1 + k^2b^2 - k^2) =$$

$$= -b^2 + k^2 + 1; \text{ зв. коэффициент } k^2 = (\sqrt{b}^2 + 1) \Rightarrow \sqrt{b}^2 = k^2 + 1$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 16$$

$$\left| \begin{array}{l} y = kx + \sqrt{b} \\ k^2 = (\sqrt{b}^2 + 1) \end{array} \right. \quad k \neq 0, \text{ т.к. касательная, не параллельна оси}$$

а к оси  $Ox$  не является касательной.

$$x = \frac{y - \sqrt{b}}{k} \quad g^2 - 2g\sqrt{b} + b^2 \quad g^2 - 2g + 128 = 0$$

$$g^2 - 2g\sqrt{b} + b^2 + k^2g^2 - 24k^2g + 128k^2 = 0$$

$$g^2(1 + k^2) + g(-24k^2\sqrt{b} + b^2 + 128k^2) = 0$$

$$D \vdash 4(12k^2 + b^2) - 4(1 + k^2)(b^2 + 128k^2) = 0$$

$$(12k^2 + b^2)^2 - (1 + k^2)(b^2 + 128k^2) =$$

$$= (13k^2 + 1)^2 - (1 + k^2)(129k^2 + 1) =$$

$$= 169k^4 + 26k^2 + 1 - (129k^4 + 1 + 129k^4 + k^2)$$

Требуем  $k^2 = 0$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$163\alpha^2 + 26\alpha + 1 - (123\alpha^2 + 130\alpha + 1) =$$

$$= 40\alpha^2 - 104\alpha = 0; \text{ т.к. } \alpha \neq 0$$

$$40\alpha = 104; \quad \alpha = \frac{104}{40} = \frac{52}{20} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$$

Сократим задачу:

$$k^2 = \frac{13}{5}; \quad b^2 = \frac{18}{5}$$

Сократим задачу:

$$\cancel{69}\alpha^2 = \frac{13}{5}; \quad 69b^2 = \frac{18}{5}$$

Заметим, что число  $\alpha = \pm \sqrt{\frac{13}{5}}$  является  
б, что означает речь о параллельной, числах  
которых противоположны и различны

$$\text{След: } \pm \sqrt{\frac{13}{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha^2 - 6ab^2 - 12\alpha^2 b^2 + 1 = 0$$

$$b^2(-6a - 12\alpha^2) + 1 - \alpha^2 = 0$$

$$D_1 = 4(6a + 12\alpha^2)(1 - \alpha^2)$$

Но  $\alpha = 0$  - все подходит; т.е. прямая, параллельная  
OX не является общей касательной

$$x = \frac{8b - y}{a}$$

$$\left(\frac{8b - y}{a}\right)^2 + (y - 12)^2 = 16$$

$$\frac{64b^2}{a^2} - 16bgy + g^2 + y^2 - 24y + 144 - 16 = 0;$$

$$64b^2 - 16bgy + g^2 + y^2 - 24y + 128 = 0$$

$$64b^2 - 16bgy + g^2 + y^2 - 24y + 128\alpha^2 = 0$$

$$D = 8^2(2b + 3\alpha^2)^2 - 4(1 + \alpha^2)(64b^2 + 128\alpha^2) = 0$$

$$4b^2 + 6\alpha^2 b + 3\alpha^4 - 4(1 + \alpha^2)(4b^2 + 8\alpha^2) = 0$$

$$4b^2 + 6\alpha^2 b + 3\alpha^4 - 16b^2 - 32\alpha^2 - 16\alpha^2 b^2 - 32\alpha^2 = 0$$

$$-12b^2 - 23\alpha^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

d

38

57

0

11

33

1

10

38

2

9

34

3

8

36

4

7

35

5

6

39

6

5

33

7

4

37

8

3

31

9

2

30

10

1

29

11

0

28

40

39

27

13 + 1

0

-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{(\alpha + \beta) + \gamma = 57 - 8}$$

$$11 \times 223$$

$$87 \cdot 96 - 8$$

~~$$\cancel{\alpha + \beta + \gamma = 50 - L}$$~~

~~$$\cancel{\alpha = 23}$$~~

~~$$\cancel{\alpha = 16}$$~~

$$\cancel{L}$$

$$\cancel{\alpha = 15 - \beta}$$

$$\cancel{\gamma = 23 - L}$$

$$\cancel{\alpha = 87 - 38 - \beta - L}$$

~~$$\cancel{\alpha + \beta = 23}$$~~

$$\cancel{\beta + L = 15}$$

$$\cancel{\alpha = 13 - \beta}$$

$$\cancel{\beta = 17 - \alpha}$$

$$\cancel{\gamma = 23 - L}$$

$$\beta = 0 \quad L = 15$$

$$\cancel{\gamma = 14}$$

$$\beta = 1$$

$$\cancel{\alpha = 0}$$

$$\cancel{\gamma = 38}$$

$$\cancel{\beta = 10}$$

$$\cancel{\alpha + \beta + \gamma = 32}$$

$$\cancel{\alpha = 1}$$

$$\cancel{\gamma = 8}$$

$$\cancel{\beta = 10}$$

$$\cancel{\alpha + \beta + \gamma = 57 - 8}$$

$$57$$

$$\cancel{\alpha = 14}$$

~~$$\cancel{\alpha = 16}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\beta \quad L + \beta + \gamma =$$

0	23
1	24
2	25
3	26
4	27
5	28
6	29

$$32 - \beta =$$

32
31
30
29
28
27

Однако видно, что при  $\beta = 5$  получается  
что свободорадостное увл. ( $L + \beta + \gamma = 32 - \beta$ ),  
значит  $L + \beta + \gamma = 28$  (получаем  $L = 11; \beta = 5; \gamma = 12$ )  
т. е. скелет „2“ не является оптимальным  
скелетом „4“, то неподходящие  $L, \beta, \gamma$  как  
скелет „4“ скелет не, будем смотреть  
дальше.

$$\begin{cases} L + \beta = 11 \\ \beta + \gamma = 18 \\ \gamma + L = 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11

$$\begin{aligned}abc &: 2^{15} \cdot 3^1 \\bc &: 2^{14} \cdot 3^{18} \Rightarrow (abc)^2 : 2^{45} \cdot 3^{68} \Rightarrow \\ac &: 2^{23} \cdot 3^{39}\end{aligned}$$
$$abc : 2^{23} \cdot 3^{34}$$

Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  - степени 2 чисел  
 $a, b, c$  соответственно, тогда

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &\geq 18 \\ \beta + \gamma &\geq 17 \Rightarrow \{\alpha + \beta + \gamma \geq 45, \quad \alpha + \beta + \gamma \leq 23\}\end{aligned}$$

$$\gamma + \alpha \geq 23$$

~~Следовательно  $\alpha + \beta + \gamma = 23$ , то  $\beta = 0; \alpha = 15; \gamma = 8$  -~~  
~~правильное, значит  $\alpha + \beta + \gamma = 29$~~

~~$\alpha = 11; \beta = 5; \gamma = 17$~~

также  $\beta = 0; \alpha = 15; \gamma = 8$

~~$\beta = 0: \alpha \geq 15$~~   
 ~~$\{\alpha \geq 17$~~   
 ~~$\alpha + \beta + \gamma \geq 32$~~

$\alpha + \beta + \gamma \geq 32 - \beta$ , при этом  $\alpha + \gamma \geq 23 \Rightarrow$   
 $\beta \leq 9$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$abc : 2^{15} \cdot 3^4$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^8$$

$$ac : 2^{23} \cdot 3^9$$

$$(abc)^2 : 2^{45} \cdot 3^{68}$$

$$abc : 2^{23} \cdot 3^4$$

$$ab$$

$$\begin{matrix} 2^d & 2^{15} & 2^8 \\ 2^h & 2^5 & 2^{12} \end{matrix}$$

$$abc \approx 2^{24} \cdot 3^9$$

$$4^{10}$$

$$2^d \beta = 16$$

$$\beta \cdot 3^k = 18$$

$$2^d \gamma = 39$$

$$2^h$$

$$2^d \beta + 2^h \in [23 : 2^4]$$

$$\beta \leq 4$$

$$2^8$$

$$2^h \geq 11$$

$$2^d \beta \geq 32 - 2^h$$

$$2^d \beta + 2^h \geq 32$$

1

2

3

4

5

6

7

$$2^d \beta + 2^h \geq 32 - 2^h$$

$$5 + 9 \geq 14$$

$$3 + 8 \geq 1$$

$$2 \beta \geq 19$$

$$11 \geq 1$$

$$17, 13$$

$$2(2 + 3\beta) = 45$$

$$17 \geq 14$$

$$2 + 3\beta$$

$$ac : 2^9 \cdot 3^9$$

$$-11 \leq -1$$

$$2 + 3\beta$$

$$4^5$$

$$2$$

$$abc \approx 2^{24} \cdot 3^9$$

$$4^8$$

$$2$$

$$2^d \beta = 16$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^d \beta = 32 \\ \beta + 8 = 18 \end{array} \right. \quad d =$$

$$\beta + 8 = 18$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta + 8 = 18 \\ 2^d \beta = 32 \end{array} \right. \quad 0$$

$$2^d \beta = 32$$

$$2^d \beta = 32$$

$$2^d \beta = 32$$

$$f - \beta = 8$$

$$24 \quad 30$$

$$f = 8 + \beta$$

$$24, f = 20$$

$$2^d \beta = 10$$

$$24, f = 20$$

$$\beta = 5$$

$$24, f = 23$$

$$\beta = 2$$

$$24, f = 23$$

$$\beta = 3$$

$$24, f = 23$$

$$\beta = 4$$

$$24, f = 23$$

$$\beta = 1$$

$$24, f = 23$$

$$\beta = 2$$

$$24, f = 23$$

$$\beta = 3$$

$$24, f = 23$$

$$\beta = 4$$

$$24, f = 23$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$abc : 2^{15} \cdot 9^{11}$$

$$(a+b+c) : 2^{45} \cdot 9^{68}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 9^{18}$$

$$abc = 2^{23} \cdot 9^{39}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 9^{39}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 9 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$a = 2^d \cdot 9$$

$$b = 2^{\beta}$$

$$c = 2^{\gamma}$$

$$\alpha + \beta = 15$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 45$$

$$\beta + \gamma = 18$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 9 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 9 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (\alpha + \beta + \gamma) \\ - (\alpha + \beta) \\ \hline \gamma \end{array} = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\alpha + \beta = 11$$

$$\beta + \gamma$$

$$\beta + \gamma = 14$$

$$\beta + \gamma = 18$$

$$\beta + \alpha + \gamma$$

$$abc : 9^{50}$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\gamma + \delta = 33$$

$$b^2 ac : 9^{29}$$

$$\gamma = 9$$

$$\gamma - \beta = 28$$

$$\beta + \alpha + \gamma$$

$$c^2 ab : 9^{57}$$

$$\delta = 16$$

$$\gamma - \beta = 28$$

$$\beta + \alpha + \gamma$$

$$\gamma - \beta = 9 \quad \beta = 0$$

$$\gamma - \beta = 28$$

$$\beta + \alpha + \gamma$$

$$\gamma = 9 + \beta$$

$$\begin{array}{r} \gamma = 12 \\ - \beta = 11 \\ \hline \gamma = 1 \end{array}$$

$$\beta = -5$$

$$\beta + \alpha + \gamma$$

$$2\beta = 10$$

$$\alpha = 16$$

$$\beta + \alpha + \gamma$$

$$2\alpha + \beta + \gamma$$

$$\beta = 5$$

$$\gamma = 22$$

$$\beta + \alpha + \gamma$$

$$2\gamma$$

$$\begin{array}{r} \gamma - \beta = 28 \\ \gamma + \beta = 18 \\ \hline 2\gamma = 46 \end{array}$$

$$\beta + \alpha + \gamma$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$g = \alpha x + b$$

$$x^2 + \alpha^2 x^2 - 16\alpha x b + b^2 = 0$$

$$\cancel{x^2} - x^2(1+\alpha^2) + x(-16\alpha b) + b^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = 256\alpha^2 b^2 - 4(1+\alpha^2)(b^2 - 1) =$$

$$= 256\alpha^2 b^2 + 4(1+\alpha^2)(1+b^2) =$$

$$= 256\alpha^2 b^2 + 4(\alpha^2 - \alpha^2 b^2 + 1 - b^2)$$

$$= 252\alpha^2 b^2 + 4\alpha^2 - 4b^2 + 4 = 0$$

$$16 \cdot 16$$

$$16 \cdot 4$$

$$64$$

$$64\alpha^2 b^2 + \alpha^2 - \alpha^2 b^2 - b^2 + 1 = 0$$

$$\cancel{64\alpha^2 b^2} + \alpha^2 - b^2 + 1 = 0$$

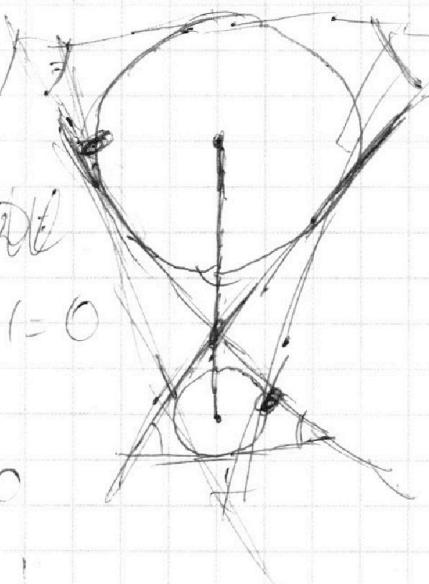
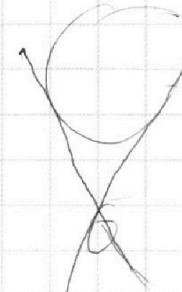
$$4; 12$$

$$0; 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} 12 = \alpha k + b \\ 3k = 12 \end{array} \right.$$

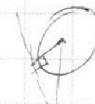
$$g = kx + b \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = k + b \\ 3k = 12 \end{array} \right.$$

$$16 \cdot 4 \quad k = 4 \quad b = -9$$

$$g = 4x^2 - 9$$



$$b^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = kx + b$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kx + b^2 - 1 = 0$$

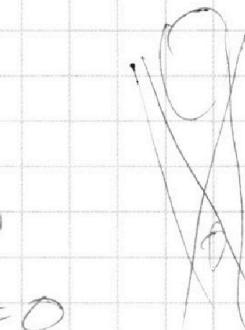
$$x^2(1+k^2) + x(2kb) + b^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = 4k^2 b^2 - 4(1+k^2)(b^2 - 1) = 0$$

$$k^2 b^2 - (b^2 - 1 + k^2 b^2 - k^2) = 0$$

$$k^2 - b^2 = 0$$

$$k^2 - b^2 \cancel{=} 0$$



$$\begin{array}{r} 169 \\ - 13 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$y = kx + b ; x = \frac{y-b}{k}$$

$$x^2 + (y-b)^2 = 1$$

$$\cancel{\text{P}} \quad \frac{y^2 - 2yb + b^2}{k^2} + y^2 - 2yb + 128 = 0$$

109

$$y^2 - 2yb + b^2 + y^2 k^2 - 2yk^2 - 128 k^2 = 0$$

$$y^2(1+k^2) + y(-2b - 24k^2) + b^2 + 128k^2 = 0$$

$$\cancel{y^2}$$

$$\Delta = 4(b^2 + 12k^2) - 4(1+k^2)(b^2 + 128k^2) = 0$$

$$(b^2 + 12k^2)^2 - (1+k^2)(b^2 + 128k^2) = 0 \quad b \neq 0$$

~~#~~

$$b^2(1+12k^2)^2 - b^2 \cancel{(1+k^2)} b^2 (1+b^2) - 128 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} \cdot 7^1 \text{ Сергеевская}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

ж

$$\underline{(2 \cdot 7)} \quad (2 \cdot 7) \quad (2 \cdot 7)$$

a

$$\underline{b} \quad \underline{c}$$

$$(abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

не квадрат, не куб, не квадрат куба

$$abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow ac : 7^{38} \Rightarrow$$

$$abc \geq 2^{24} \cdot 7^{39}$$

$$\frac{-3}{6} = \frac{d}{2}$$

$$\alpha + \beta + r = 23$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 15 \\ \beta + r = 17 \end{cases}$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta = 15$$

$$\beta + r = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$|a; b| = 1$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - 7ab + b^2}$$

$$\begin{matrix} \alpha & 2^3 & 7 \\ b & 2 & 7 \\ c & 2^{10} & 7 \end{matrix}$$

3

$$ac + b : m$$

$$\frac{6}{6}$$

$$ac + b : m$$

1

$$abc : m$$

$$\frac{ac + b}{(ac + b)^2 - 5abc} : m$$

$$D = 49b^2 - 4b^2 = 45b^2 \quad (ac + b)(ac + b)$$

$$a_1 = 7b - 3\sqrt{5}b$$

$$\overline{(ac + b)^2 - 5abc}$$

$$a_2 = 7b + 3\sqrt{5}b$$

Несовместимое!

$$\frac{ac + b}{a(ac + b + \frac{b^2}{a})} : m$$

$$abc : m \quad \boxed{3}$$

$$\frac{ac + b}{9ab} = \cancel{a} \frac{1 + \frac{b}{a}}{9b}$$

$$ac + b : 9 \quad \frac{3}{4} -$$

$$\frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = \frac{1}{-11}$$

$$a : 9 \quad b : 5 \quad \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 3x$$

$$083: \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} &= 1 - 3x \\ D < 0 & \end{aligned}$$

$36 - 8 \cdot 3 = 12$

$$X = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$X \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$K_B = 6$$

$$\frac{3-6}{2} = -\frac{3}{2}$$

1  
+  
1/3  
1/3

$$-1.5x$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x + 1 &\geq 3x^2 - 6x + 2 \quad 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = \\ 9x &\geq 1 \quad -(1-3x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \\ x &\geq \frac{1}{9} \quad l. q. \leq 0 \quad \text{a. ap. q. } \leq 0 \\ &-3x - 1 \end{aligned}$$

$\frac{1}{9}$  - корень

a. s. 3

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 2 + 81x^2 &= 1 + 3x^2 + 3x + 1 \\ + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} &+ 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (2) \\ 81x^2 - 8x + 1 &\stackrel{6}{=} \frac{3 + 6 + 2}{4} + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad (8, 3) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 + 3x + 1 + 3x^2 - 6x + 1 + 2\sqrt{\dots} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 1 + 2\sqrt{\dots} = 0$$

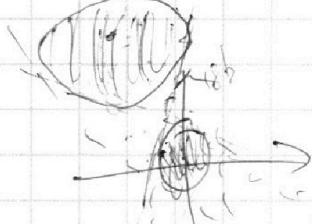
$$2\sqrt{\dots} = 3x - 6x^2 - 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{2} + 2 = \alpha x + g - 8b = 0$$

$$\sqrt{c} < 0 \Rightarrow g = \underbrace{-\alpha x - 8b},$$

$$x > 0$$

$$x^2 + g^2 = 1 \quad \text{(запись)} \quad x^2 + (g-12)^2 = 16$$



$$(g_2 - g_1) = 14 - 2(x_2 - x_1)$$

$$x^2 + g^2 = 1$$

$$x^2 + (g-12)^2 = 16$$

$$g = kx + b \quad x = \frac{g-b}{k}$$

$$x^2 + (6x + b - 12)^2$$

$$x^2 + b^2 + 2bx + b^2 + 144 + 24x - 144 = 1$$

$$g^2 - 2gb + b^2 + g^2 - 2gg + 144 = 16$$

$$2 = 0$$

$$2(x_2 - x_1) + (g_2 - g_1) = 14$$

$$(-13, 26)$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (g_2 - g_1)^2} =$$

$$(0, 0)$$

$$16:0$$

$$t^2 + g(4-t)^2$$



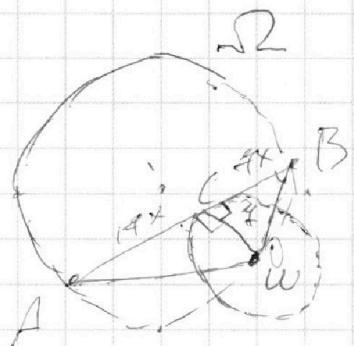
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



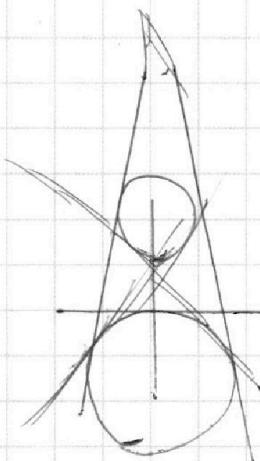
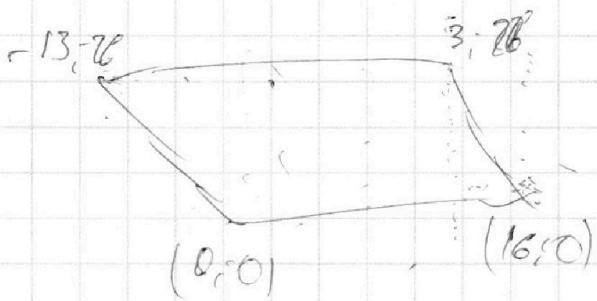
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = \sqrt{t^2 + (14-2t)^2} = \sqrt{t^2 + 4(7-t)^2} = \cancel{t^2+4}$$

$$= t^2 + 4(49 - 14t + t^2) =$$



$$\begin{aligned} V_2 - V_1 &= f & V_2 - V_1 &= g \\ V_2 - V_1 &= h & V_2 - V_1 &= i \end{aligned}$$

$$2ae + b = 14$$

$$Q = \frac{(a-b)}{2} \Rightarrow b - \epsilon e^t$$

$$b = 2k \quad \text{and} \quad a \in [-29, 29] \quad k \in [-13, 13]$$

$$e^k + k = e^q$$

24 received