



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ca : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

M

$$(abc)^2 : 2^{45} \cdot 7^{68} \Rightarrow$$

$$abc : 2^{23} \cdot 7^{34}$$

Пусть α, β, γ - степени, 2^x - коэффициент

a, b и c состоят из $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.е. a, β, γ

- неотрицательные тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 15 \\ \beta + \gamma = 14 \\ \gamma + \alpha = 23 \end{array} \right.$$

β	Множ. число единиц которого α
0	15
1	14
2	13
3	12
4	11
5	10
6	9

Множ. число единиц кое которого γ
14
16
15
14
13
12
11

$\alpha + \beta = 23$. Значит $\min(\alpha + \beta + \gamma)$ достигается при $\beta = 5$, т.е. после β увеличивается

есть, если $\alpha + \gamma = 23$

$$\alpha + \gamma = 23$$

$\beta = 5; \alpha = 11; \gamma = 12$ - подходит, т.е. $\alpha + \beta + \gamma = 28$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. степени "7" не выйдут за
степени "5", то преобразуем
 α, β, γ как степени "5" чисел
 a, b и c соответственно:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 11 \\ \beta + \gamma = 18 \\ \alpha + \gamma = 39 \end{cases}$$

α	Мин. число 5-ок которого β	Мин. число 5-ок кое которого γ
0	11	33
1	10	38
2	9	37
3	8	36
4	7	35
5	6	34
6	5	33
7	4	32
8	3	31
9	2	30
10	1	29
11	0	28
12	0	27

При $\alpha \geq 12$ сумма $\alpha + \beta + \gamma$ увеличивается
не будет (к α приб. 1, из γ выч. 1) значит
 $\min(\alpha + \beta + \gamma)$ равно 39. ($\alpha = 12; \gamma = 27; \beta = 0$)

Ответ: $2^{28} \cdot 4^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\frac{a}{b}$ - несократимая $\Rightarrow a$ и b - взаимно простые числа.

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$. Если $a+b:m$, то и $a^2-7ab+b^2:m$ (цел., что дроби сократима)

$$(a+b)^2 - 9ab = a^2 - 7ab + b^2,$$

получается, что дроби сократима, если $9ab:m$.

Если $m:a$ или $m:b$, то

$a+b:a$ или $a+b:b$, что невозможно,

т.к. a и b - взаимно просты, значит

~~на~~ $m \leq 9$. Пример $m=9$:

$$a=4; b=5. \quad \frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$1) \Delta = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$2) \Delta = 9 - 4 \cdot 3 < 0$$

замечаем, что $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$,

т.к. $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq 0$, а $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2})$$

$$1 - 9x = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2})$$

$$x = \frac{1}{9} \text{ или } \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1$$

(не подходит по ОДЗ)

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 1. \text{ Найдем } x_0: x_0 = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \text{ Замечаем, что}$$

при $x < 0$ $3x^2 - 6x + 2 \geq 2 > 1$, а при $x > 0$

$3x^2 + 3x + 1 \geq 1$; при $x = 0$: $3 + 3x + 1 = 0 + 1 = 1$ и

$$3x^2 - 6x + 2 = 2; \sqrt{1} + \sqrt{2} > 1 \text{ при } x \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



№8

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & \text{или} & x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 \geq 16 & \text{или} & x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \end{cases} \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1$ - окр. с ц. в точке $(0; 0)$ и $R = 1$

$x^2 + (y - 12)^2 = 16$ - окр. с центром в т. $(0; 12)$ и $R = 4$

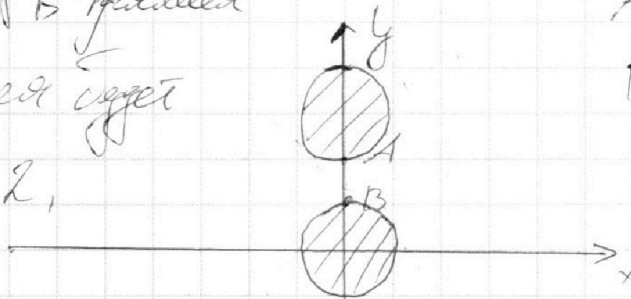
$y = -ax + 8b$ - прямая

$A(0; 8)$

Решение будет

$B(0; 1)$

только 2,



только если

$y = -ax + 8b$ - будет касательная к кругам, иначе либо не будет решений, либо бесконечно много, либо 1.

~~$$x^2 + (8b - ax)^2 = 1; \quad x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 = 0$$~~

~~$$x^2(1 + a^2) + x(-16ab) + 64b^2 - 1 = 0$$~~

~~$$D = (16ab)^2 - 4(1 + a^2)(64b^2 - 1) = 0 \text{ (усл. касания)}$$~~

~~$$48a^2b^2 + (1 + a^2)(1 - 64b^2) = 0$$~~

~~$$48a^2b^2 + a^2 - 64a^2b^2 + 1 - 64b^2 = 0$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\text{Пусть } k = -a \text{ и } 8b = \frac{1}{b}$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = kx + \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow x^2 + k^2 x^2 + 2kx \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} = 1 = 0$$
$$x^2(1+k^2) + x(2k \frac{1}{b}) + \frac{1}{b^2} - 1 = 0$$

$$D = 4k^2 \frac{1}{b^2} - 4(1+k^2)(\frac{1}{b^2} - 1) = 0 \text{ (усл. для}$$

касания). $k^2 \frac{1}{b^2} - (\frac{1}{b^2} - 1 + k^2 \frac{1}{b^2} - k^2) =$

$$= -\frac{1}{b^2} + k^2 + 1; \text{ значит } k^2 = \frac{1}{b^2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = k^2 + 1$$

$$\begin{cases} x^2 + (y-12)^2 = 16 \\ y = kx + \frac{1}{b} \end{cases} \quad k \neq 0, \text{ так как касание, пер-$$

сека осей ~~о~~ не явл. кас. касательной.

$$x = \frac{y - \frac{1}{b}}{k}, \quad \frac{y^2 - 2y \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}{k^2} + y^2 - 24y + 128 = 0$$

$$y^2 - 2y \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + k^2 y^2 - 24k^2 y + 128k^2 = 0$$

$$y^2(1+k^2) + y(-24k^2 \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}) + 128k^2 = 0$$

$$D = 4(12k^2 \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2})^2 - 4(1+k^2)(\frac{1}{b^2} + 128k^2) = 0$$

$$(12k^2 \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2})^2 - (1+k^2)(\frac{1}{b^2} + 128k^2) =$$

$$= (13k^2 + 1) - (1+k^2)(128k^2 + 1) =$$

$$= 13k^2 + 1 - (128k^2 + 1 + 128k^4 + k^2) =$$

$$\text{Пусть } k^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$169a^2 + 26a + 1 - (123a^2 + 130a + 1) =$$
$$= 40a^2 - 104a = 0; \quad \text{т.к. } a \neq 0$$

$$40a = 104; \quad a = \frac{104}{40} = \frac{52}{20} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$$

Обратная замена

$$k^2 = \frac{13}{5}; \quad b^2 = \frac{18}{5}$$

Обратная замена:

$$a^2 = \frac{13}{5}; \quad 64b^2 = \frac{18}{5}$$

Заметим, что при $a = \pm \sqrt{\frac{13}{5}}$ существуют
 b , являющиеся решением параметрической, при
которых ровно 2 решения

$$\text{Ответ: } \pm \sqrt{\frac{13}{5}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 6ab^2 - 12a^2b^2 + 1 = 0$$

$$b^2(-6a - 12a^2) + 1 - a^2 = 0$$

$$D_b = 4(6a + 12a^2)(1 - a^2)$$

Для $a=0$ - не подходит; т.к. прямая, касаясь
ок не является общей касательной

$$x = \frac{8b - y}{a}$$

$$\left(\frac{8b - y}{a}\right)^2 + (y - 12)^2 = 16$$

$$\frac{64b^2 - 16by + y^2}{a^2} + y^2 - 24y + 144 - 16 = 0;$$

$$64b^2 - 16by + y^2 + y^2a^2 - 24a^2y + 128a^2 = 0$$

$$y^2(1 + a^2) + y(-16b - 24a^2) + 64b^2 + 128a^2 = 0$$

$$D = 8^2(2b + 3a^2)^2 - 4(1 + a^2)(64b^2 + 128a^2) = 0$$

$$4b^2 + 6a^2b + 9a^4 - 4(1 + a^2)(4b^2 + 8a^2) = 0$$

$$4b^2 + 6a^2b + 9a^4 - 16b^2 - 32a^4 - 16a^2b^2 - 32a^2 = 0$$
$$-12b^2 - 23a^4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

d	$\beta \tau$	$\delta \tau$	
0	11	38	
1	10	38	
2	9	34	
3	8	36	
4	7	35	
5	6	34	
6	5	33	
7	4	37	
8	3	31	
9	2	30	
10	1	29	40
11	0	28	39
12			
13	0	27	

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha + \beta + \gamma = 57 - \delta$$

$$\gamma = 23$$

$$\delta = 46 - \gamma$$

$$2\delta = 46$$

$$\delta = 23$$

~~$$\delta = 16$$~~

~~$$\alpha + \beta + \gamma = 50 - \delta$$~~

$$\delta = 15 - \beta$$

$$\delta = 0$$

$$\delta = 39$$

$$\beta = 11$$

$$\delta = 40$$

$$\delta = 1$$

$$\beta = 38$$

$$\gamma = 10$$

$$39$$

$$\delta = 5$$

$$\beta = 6$$

$$\delta = 39$$

$$45$$

$$\delta = 23 - \alpha$$

$$\delta = \delta = 38 - \beta - \alpha$$

~~$$\delta = 23$$~~

$$\beta = \delta = 15$$

$$\delta = 13 - \beta$$

$$\delta = 0$$

$$\delta = 1$$

$$\beta = 14 - \delta$$

$$\delta = 39$$

$$\beta = 10$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 57 - \delta$$

$$\delta = 23 - \alpha$$

$$57$$

$$\beta = 0$$

$$\delta = 15$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 37$$

$$\delta = 14$$

$$\beta = 1$$

$$\delta = 14$$

~~$$\delta = 16$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~мин. значение $\alpha + \beta + \gamma$~~
~~макс. значение $32 - \beta$~~

β	$\alpha + \beta + \gamma =$	$32 - \beta =$
0	23	32
1	24	31
2	25	30
3	26	29
4	27	28
5	28	27
6	29	
⋮		
⋮		

Откуда видно, что при $\beta = 5$ достигается
ся необходимая величина ($\alpha + \beta + \gamma = 32 - \beta$),
значит $\alpha + \beta + \gamma = 28$ (получается $\alpha = 11$; $\beta = 5$; $\gamma = 12$)
т.к. степень "2" не является степенной
"4", то переобозначая α, β, γ как
степени "4" числа a, b и c соответственно.
Итак:

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 11 \\ \beta + \gamma \geq 18 \\ \gamma + \alpha \geq 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



M1

$$ab : 2^{15} \cdot 4^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 4^{18} \Rightarrow$$

$$ac : 2^{23} \cdot 4^{39}$$

$$(abc)^2 : 2^{45} \cdot 4^{68} \Rightarrow$$

$$abc : 2^{23} \cdot 4^{34}$$

Пусть d, β, γ - стороны, 2^k чисел
 a, b и c соответственно, тогда

$$\begin{cases} d + \beta \geq 15 \\ \beta + \gamma \geq 14 \\ \gamma + d \geq 23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (d + \beta + \gamma) \geq 45, \quad d + \beta + \gamma \geq 23$$

$$\gamma + d \geq 23$$

~~Если $d + \beta + \gamma = 23$, то $\beta = 0$; $d = 15$; $\gamma = 8$ -~~

~~противоречие, значит $d + \beta + \gamma \geq 24$~~

~~$d = 11$; $\beta = 5$; $\gamma = 17$~~

~~три $\beta = 0$; $d = 15$; $\gamma = 8$~~

~~$\beta = 0$: $\begin{cases} d \geq 15 \\ \gamma \geq 14 \end{cases} \quad d + \beta + \gamma \geq 32$~~

$$d + \beta + \gamma \geq 32 - \beta, \quad \text{причем } d + \gamma \geq 23 \Rightarrow$$

$$\beta \leq 9.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 4^4$$

$$bc: 2^{14} \cdot 4^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 4^{39}$$

$$(abc)^2: 2^{45} \cdot 4^{68}$$

$$abc: 2^{23} \cdot 4^{34}$$

~~abc~~

$$2^d$$

$$2^5$$

$$2^8$$

$$2^H$$

$$2^5$$

$$2^{12}$$

$$abc \approx 2^{24} \cdot 4^{39}$$

$$2^d \cdot 4^{10} = 11$$

$$4^5 \cdot 4^8 = 18$$

$$2^d \cdot 4^8 = 39$$

$$2^H$$

$$2^d + 4^5 + 4^8 \in [23, 24]$$

$$4^5 \leq 4 \quad 28$$

$$2^d \geq 11$$

$$2^d + 4^8 \geq 32 - 2 \cdot 4^5$$

$$2^d + 2 \cdot 4^5 + 4^8 \geq 32$$

$$\begin{cases} 2^d + 4^5 = 33 \\ 4^5 + 4^8 = 18 \\ 2^d + 4^8 = 40 \end{cases}$$

$$4^8 - 4^5 = 8$$

$$4^8 = 8 + 4^5$$

$$2 \cdot 4^5 = 10$$

$$4^5 = 5$$

$$2^d = 24$$

$$4^8 = 13$$

$$2(2^d + 4^5 + 4^8) = 45$$

$$ac: 4^{39}$$

$$4^{45}$$

$$2^d + 2 \cdot 4^5 + 4^8 \geq 32$$

$$5 + 4 \geq 14$$

$$3 + 8 \geq 1$$

$$2 \geq 14$$

$$11 \geq 1$$

$$1 \geq 13$$

$$12 \geq 14$$

$$-11 \leq -1$$

~~$$4^5$$~~

$$32 \quad 0$$

$$(24) \quad 30 \quad 29$$

$$2^d + 4^5 + 4^8 = 24$$

$$4^5 + 4^8 \geq 23$$

$$4^5 = 5$$

$$4^8 = 0$$

$$4^8 = 1$$

$$4^8 = 2$$

$$4^8 = 3$$

$$4^8 = 4$$

$$2^d + 4^5 + 4^8 \geq 29 - 4^5$$

$$2^d + 4^5 + 4^8 \geq 5 + 4 - 4$$

$4^5 = 5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$(abce)^2: 2^{45} \cdot 7^{68}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$abc \approx 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^\alpha \cdot 7$$

$$b = 2^\beta$$

$$c = 2^\gamma$$

$$\alpha + \beta = 15$$

$$2\alpha + \beta + \gamma = 45$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 23$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\alpha + \beta = 11$$

$$\alpha \geq \gamma + \beta$$

$$\beta + \gamma$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\beta + \gamma = 18$$

$$\beta \geq 21 + \alpha$$

$$a^2bc: 4^{50}$$

$$\gamma + \alpha = 23$$

$$\gamma + \alpha = 39$$

$$\gamma \geq 28 + \beta$$

$$b^2ac: 4^{29}$$

$$\gamma = 7$$

$$\gamma - \beta = 28$$

$$c^2ab: 4^{57}$$

$$\alpha = 16$$

$$\gamma = 28 + \beta$$

$$\gamma - \beta = 7$$

$$\beta = 0$$

$$2\beta = -10$$

$$\beta = -5$$

$$\gamma = 7 + \beta$$

$$2\beta = 10$$

$$\gamma = 12$$

$$\alpha = 16$$

$$\gamma = 22$$

$$2\alpha + \beta + \gamma$$

$$\beta = 5$$

$$\alpha = 11$$

$$\gamma - \beta = 28$$

$$\gamma + \beta = 18$$

23	31
24	31
25	31
26	30
27	30
28	30
29	30
30	30
31	30

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = ax + 8b$$

$$x^2 + a^2 y^2 - 16acx + b^2 = 0$$

$$\rightarrow x^2(1+a^2) + x(-16ac) + b^2 - 1 = 0$$

$$D = 256a^2c^2 - 4(1+a^2)(b^2-1) =$$

$$= 256a^2c^2 + 4(1+a^2)(1-b^2) =$$

$$= 256a^2c^2 + 4(a^2 - a^2b^2 + 1 - b^2) =$$

$$= 252a^2c^2 + 4a^2 - 4b^2 + 4 = 0$$

$$16 \cdot 16$$

$$16 \cdot 4$$

$$64$$

$$64a^2c^2 + a^2 - a^2b^2 - b^2 + 1 = 0$$

$$\rightarrow 63a^2c^2 + a^2 - b^2 + 1 = 0$$

$$9; 12$$

$$0; 1$$

$$y = kx + b$$

$$\begin{cases} 12 = ak + b \\ 0 = k + b \end{cases}$$

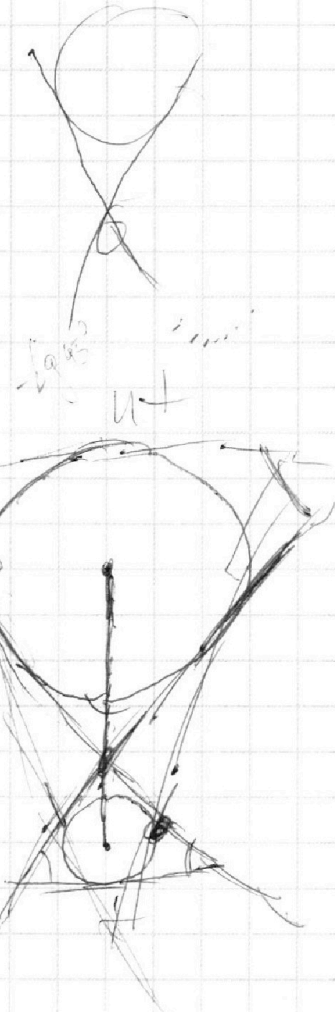
$$3k = 12$$

$$32$$

$$k = 4 \quad b = -4$$

$$16 \cdot 4$$

$$y = 4x^2 - 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = kx + b$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kx + b^2 - 1 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + x(2kb) + b^2 - 1 = 0$$

$$D = 4k^2 b^2 - 4(1+k^2)(b^2 - 1) = 0$$

$$k^2 b^2 - (b^2 - 1 + k^2 b^2 - k^2) = 0$$

$$k^2 - b^2 = 0$$

$$k^2 = b^2$$

$$y = kx + b \quad ; \quad x = \frac{y-b}{k}$$

$$x^2 + (y-b)^2 = 1$$

$$\frac{y^2 - 2yb + b^2}{k^2} + y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$y^2 - 2yb + b^2 + y^2 k^2 - 2yk^2 + 128k^2 = 0$$

$$y^2(1+k^2) + y(-2b - 2k^2) + b^2 + 128k^2 = 0$$

$$D = 4(b^2 + 12k^2) - 4(1+k^2)(b^2 + 128k^2) = 0$$

$$(b + 12b^2)^2 - (1+b^2)(b^2 \cdot 128) = 0 \quad b \neq 0$$

$$b^2(1+12b)^2 - b^2(1+b^2) \cdot 128 = 0$$



$$\begin{array}{r} 129 \cdot 13 \\ -13 \cdot 13 \\ \hline 39 \end{array}$$

109

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Сережковская
 $ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

$(abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$
 $abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$
не кор. 2²⁴ не кор. 7³⁹ т.к. ac: 7³⁹

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$

$abc \geq 2^{24} \cdot 7^{39}$

$\frac{-3}{6} = \frac{1}{2}$

$\alpha + \beta + \gamma = 24$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 15 \\ \beta + \gamma = 17 \\ \gamma + \alpha = 23 \end{cases}$

$\alpha + \beta + \gamma = 55$

$\begin{matrix} a & 2^{13} & 7 \\ b & 2 & 7 \\ c & 2^{10} & 7 \end{matrix}$

$\alpha + \beta = 15$

$\beta + \gamma = 17$

$\gamma + \alpha = 23$

$(a; b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$

$\begin{matrix} a+b : m & 6 \\ a+b : m & 6 \\ 3ab : m & 1 \end{matrix}$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 3ab} : m$

$D = 49b^2 - 4b^2 = 45b^2 \quad (a+b)(a+b)$

$a_1 = 7b - 3\sqrt{5}b \quad (a+b)^2 - 5ab$

$a_2 = 7b + 3\sqrt{5}b$

Аналогично!

$\frac{a(a+b)}{a(a-7b+\frac{b^2}{a})}$

$3ab : m \quad [9]$

$\frac{a+b}{3ab} = \frac{1+\frac{b}{a}}{3b}$

$a \cdot b = 9 \quad \frac{3}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$

$\frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99} = \frac{1}{-11}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 7} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{QD3: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 7 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 9x = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

- вынесо
D < 0

$$36 - 83 = 12$$

$$9x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$x \in (-\infty; \frac{3 - \sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$K.B. = 6$$

$$3x^2$$

$$\frac{3-6}{2} = -\frac{3}{2}$$

1/11
1/11
1/11
1/11

$$-1,5x$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq \sqrt{3x^2 - 6x + 7}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 3x^2 - 6x + 7 \quad 3x^2 - 6x + 7 - 3x^2 - 3x - 1 =$$

$$9x \geq 1$$

$$= (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 7} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$x \geq \frac{1}{9}$$

$$1. \text{ ч. } \leq 0 \quad \text{а} \text{ др. ч. } \leq 0$$

$$-9x - 1$$

$\frac{1}{9}$ - корень

$$3x^2 - 6x + 7 + 81x^2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$+ 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 7}$$

$$81x^2 - 9x + 1 \leq 6$$

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{2} + 2$$

18 (9) 3

a 3

(21)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 + 3x + 1 + 3x^2 - 6x + 1 + 2\sqrt{\dots} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 1 + 2\sqrt{\dots} = 0$$

$$2\sqrt{\dots} = 3x - 6x^2 - 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{2} + 2 = ax + y - 8b = 0$$

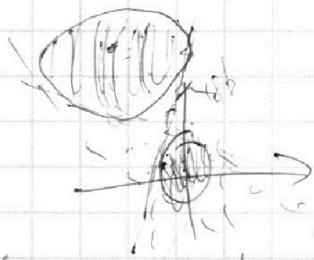
$$y = -ax + 8b$$

$$x < 0 \Rightarrow$$

$$x > 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y-12)^2 = 16$$



$$(y_2 - y_1) = 14 - 2(x_2 - x_1)$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y-12)^2 = 16$$

$$y = kx + b \quad x = \frac{y-b}{k}$$

$$x^2 + (kx + b - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + k^2x^2 + 2kxb + b^2 = 1$$

$$\frac{y^2 - 2yb + b^2}{k^2} + y^2 - 24y + 144 = 16$$

$$2 = 0$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$(-13; 26)$

$(3; -26)$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$(0; 0)$

$(16; 0)$

$$L^2 + 2(14 - L)^2$$

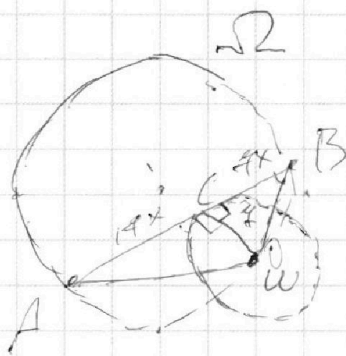
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

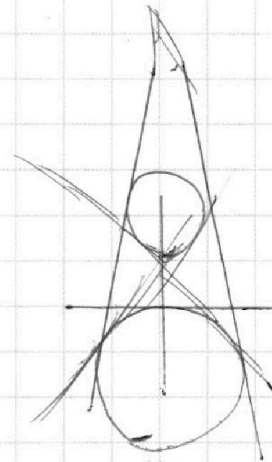
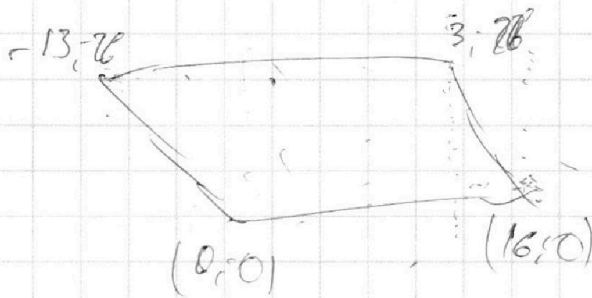


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$R = R =$
 $R = 13 \quad \omega = 4$

$$AB = \sqrt{t^2 + (14 - 2t)^2} = \sqrt{t^2 + 4(7 - t)^2} = \sqrt{t^2 + 4(49 - 14t + t^2)} = \sqrt{t^2 + 196 - 56t + 4t^2} = \sqrt{5t^2 - 56t + 196}$$



$V_2 - V_1 = 1$ $V_2 - V_1 = a$ $a \in [-29; 29]$
 $g_2 - g_1 = b$ $b \in [-26; 26]$

$$2a + b = 14$$

$$a = \frac{14 - b}{2} \Rightarrow b = 2t$$

$b = 2k$ $a + k = 7$ $a \in [-29; 29]$ $k \in [-13; 13]$

$$a = 7 + k$$

24 решения