МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

~~$ab \vdots 2^{15}7^{11}$~~

~~$bc \vdots 2^{17}7^{18} \Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{(15+17+23)} \cdot 7^{(11+18+39)} = 2^{55} \cdot 7^{68}$~~

~~$ac \vdots 2^{23}7^{39}$~~

~~Т.к. $a^2b^2c^2$ - квадрат (числа abc), то все степени вхождения всех его простых делителей четны, и при этом т.к. $a^2b^2c^2 \vdots 2^{55} \cdot 7^{68}$, то степень вхождения 2 в разложении $a^2b^2c^2$ на простые ≥ 56, а 7 - ≥ 68. $\Rightarrow abc \vdots 2^{\frac{56}{2}} \cdot 7^{\frac{68}{2}} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~$|a|_2 + |b|_2 \geq 15$~~

~~$|b|_2 + |c|_2 \geq 17$~~

~~$|a|_2 + |c|_2 \geq 23$~~

$ab \vdots 2^{15}7^{11}$

$bc \vdots 2^{17}7^{18} \Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{55} \cdot 7^{68}$

$ac \vdots 2^{23}7^{39}$

Т.к. $a^2b^2c^2$ - квадрат (числа abc) то степень вхождения простых чисел в его разложение четна $\Rightarrow (a^2b^2c^2)_2 \geq 56$

$\Rightarrow (abc)_2 \geq 28$, $(abc)_7 \geq 34 \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ т.к. $\in \mathbb{Z}$.

~~Пример, когда достигается равенство:~~

~~$a=$~~ Но при этом $abc \vdots ac \vdots 7^{39} \Rightarrow (abc)_7 \geq 39$

Значит, $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример, когда достигается равенство:

$a = 2^{10} \cdot 7^{21}$

$b = 2^5 \qquad \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

Ответ $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Если $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ сократима на m,

то и $\frac{a^2+b^2-7ab}{a+b}$ сократима на m.

$\frac{a^2+b^2-7ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b} \Rightarrow$

$\frac{-9ab}{a+b}$ должно быть сократимо на m. т.к. $(a,b)=1$,

то $(ab, a+b)=1 \Rightarrow$ Если что и сокращается

в числителе, то только ~~один~~ входящие

в множитель $9 \Rightarrow m \leq 9$. Пример:

$a=7, b=2 \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{-45} = -\frac{1}{5}$

Ответ: $\max(m) = 9$.

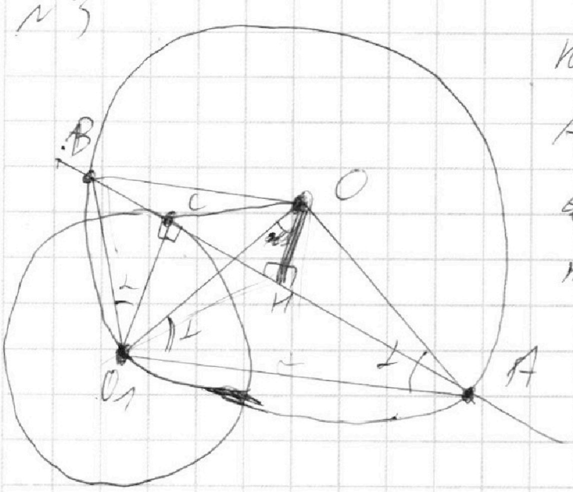
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



по усл. $O_1C = 7$, $\frac{BC}{AC} = \frac{7}{17}$ ($\Rightarrow BC = 7x$, $AC = 17x$) $AO = OO_1 = OB = 13$. ~~Т.к.~~ Пусть $\angle BO_1C = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{O_1C} = \frac{7x}{7} = x$. Т.к. $OB = OA$ как радиусы, то $\triangle OBA$ — р/б $\Rightarrow$ высота OH — и бис и медиана $\Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2} = 12x \Rightarrow CH = BH - BC = 5x$

~~Если~~ $\alpha = \angle OCH$ т.к. $\triangle OCH$ и O_1CB — $\sim$, $\Rightarrow$ если $x > 1$ то ~~OH~~ $AH > 12$, $OH < 5 \Rightarrow CH > 5 \Rightarrow x < 1$ противоречие, если $x < 1$ то $AH < 12 \Rightarrow OH > 5 \Rightarrow CH < 5 \Rightarrow x > 1$ — противоречие $\Rightarrow x = 1$, $\Rightarrow AB = 17x = 17$

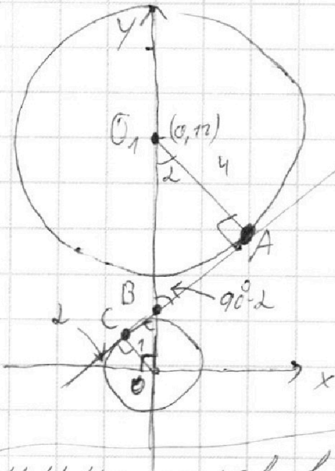
Ответ: 17

№6 $\begin{cases} (1)\ ax+y-8b=0 \\ (2)\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases} \end{array}\right.$ — на коорд пл-ти OXY это два ~~окружности~~ круга с центрами в (·) $(0,0)$ и $(0,12)$ и ~~соотв.~~ радиусами 1 и 4 соотв. (Нам удовл. все точки из любого круга, а точки вне этих кругов — нет.

(1) — прямая вида $y=-ax+8b$, и если нужно чтобы система имело 2 решения, нужно чтобы эта прямая была одной из ~~касатель~~ общих касательных к окружностям, т.к. пересечений у прямой и круга — либо 0, либо 1 (в случае касания) либо бесконечно много.

1 сл. Если касательная внутренняя:



Пусть O и O_1 — центры кругов, A и C — точки касания (как на рис), B — точка пересечения прямой $ax+y-8b=0$ и OY. Т.к. если прямая задана ур-ием $y=kx$, то $k=tg\alpha$, где α — угол между прямой и OX. $\Rightarrow$ $tg\alpha=\frac{AB}{O_1B}$ (из $\triangle O_1AB$, $\angle BO_1A=\alpha$ т.к. $\angle CBO=90^\circ-\alpha$ (сумма углов в $\triangle=180^\circ$) $=\angle O_1BA$ (как верт.)) $\Rightarrow$ $tg\alpha=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

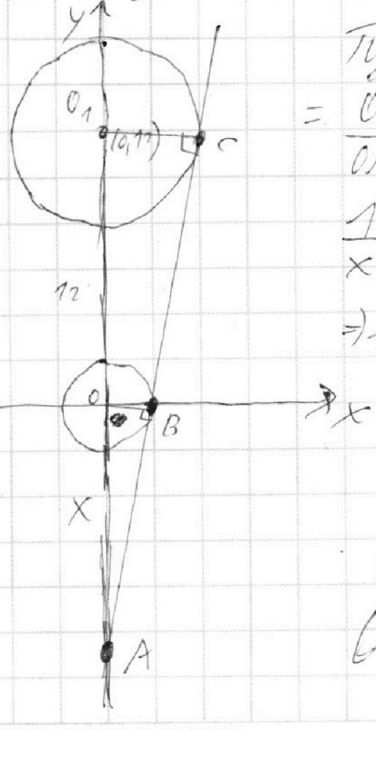
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

~~Пусть~~ Пусть угол между касательной и $Ox = \alpha$ (пусть он острый, т.к. картинка симметрична ~~картинка подходит~~ отн. OY, то если нам подошло некоторое a, то и $-a$ — подойдёт), ~~α~~ тогда $tg\alpha = -a$ т.к. $-a$ — коэф при x в ур-ии прямой. Тогда $\angle CBO = 90° - \alpha$ по сумме углов Δ, $\angle CBO = \angle O_1BA$ как верт. $\Rightarrow \angle BO_1A = \alpha$ из суммы углов Δ. $\Delta O_1BA \sim \Delta OBC$ как п/у Δ с верт. углом $\Rightarrow \angle COB = \alpha$. $\cos\alpha$ (из ΔO_1BA) $= \frac{4}{O_1B}$; $\cos\alpha$ (из ΔOBC) $= \frac{1}{OB}$ $\Rightarrow$ ~~tg cos~~ если $OB = x$, то $O_1B = 12 - x$, т.к. $OO_1 = 12$, $\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{4}{12-x} \Rightarrow$ $4x = 12 - x \Rightarrow x = 2{,}4 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow$ ~~$tg\alpha = \frac{12}{}$~~ $\Rightarrow a = \pm tg\left(\arccos\frac{5}{12}\right)$, тогда $8b = x \Rightarrow b = 0{,}6$ (т.к. $8b$ — ~~у~~ координата точки пересечения касательной и OY, т.е. точки B)

2 сл.: если касательная внешняя:



Пусть $OA = x$, тогда $O_1A = 12 + x$. $\sin\alpha = \frac{OB}{OA}$ (из ΔOBA) $= \frac{O_1C}{O_1A}$ (из ΔO_1CA) $\Rightarrow$

$\frac{1}{x} = \frac{4}{12+x} = \sin\alpha \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 = \frac{1}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow$ ~~$\cos\alpha$~~ $a = \pm tg\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$ (т.к. ~~картинка~~ вторая касательная аналогично 1 сл. будет симм. отн. OY $\Rightarrow$ если a — подходит, то и $-a$ подойдёт) тогда $B = 4$ (т.к. анал. 1 сл. это y координата точки A)

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = \pm tg\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) \\ a = \pm tg\left(\arccos\frac{5}{12}\right) \end{array}\right.$

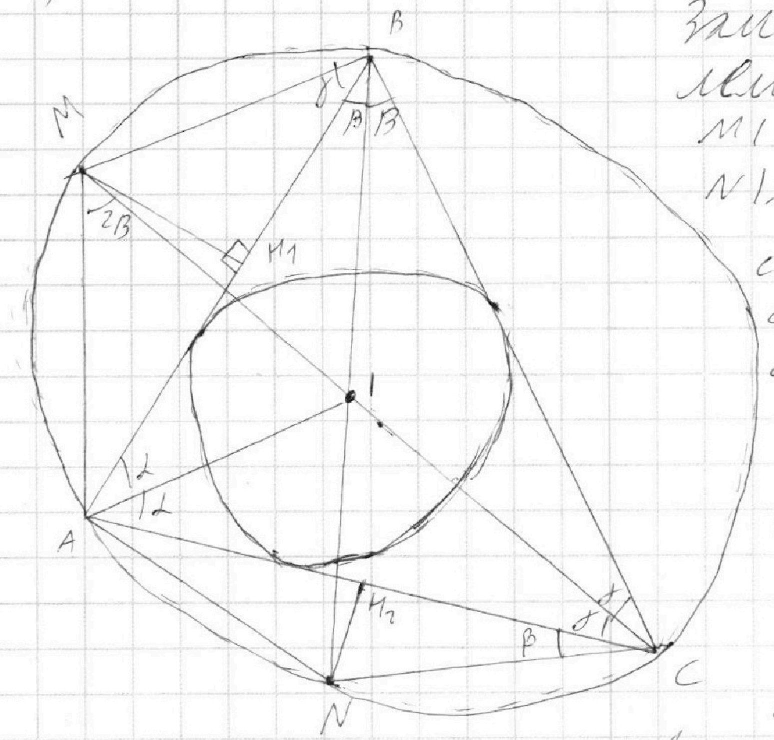
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



Заметим, что по лемме о трезубце $MI = AM = MB$, и $NI = NA = NC$. Пусть: $\angle BAI = \angle IAC = \alpha$; $\angle ABI = \angle IBC = \beta$; $\angle ACI = \angle ICB = \gamma$; (т.к. I — центр вписанной окр, тогда BI, CI, и AI биссектрисы углов B, C, и A соотв.) $\angle AMI = 2\beta$ как впис, $\angle ANI = 2\gamma$ как впис, $\angle ACN = \beta$ и $\angle ABM = \gamma$ как вписанные опир. на дуги AN и AM соотв; значит, если MH_1 и NH_2 — высоты из точек M и N на прямые AB и AC, то $MB = \frac{5}{\sin\gamma}$; $\cancel{AC = \frac{7{,}5}{\sin\beta}} = MA = MI$; $NC = \frac{7{,}5}{\sin\beta} = NA = NI \Rightarrow$ по т. косинусов для ΔAMI $AI^2 = AM^2 + MI^2 - 2AM\cdot MI\cdot\cos 2\beta =$

$= \frac{2\cdot 5^2}{\sin^2\gamma} - \frac{2\cdot 5^2}{\sin^2\gamma}\cdot\cos 2\beta$, а по т. косинусов для ΔANI

$AI^2 = AN^2 + NI^2 - 2AN\cdot NI\cdot\cos 2\gamma = \frac{2\cdot 7{,}5^2}{\sin^2\beta} - \frac{2\cdot 7{,}5^2}{\sin^2\beta}\cdot\cos 2\gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow AI^2 = \frac{2\cdot 25}{\sin^2\gamma}(1-\cos 2\beta) = \frac{2\cdot 6{,}25}{\sin^2\beta}(1-\cos 2\gamma)$. $1-\cos 2x =$

$= \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x$. $\Rightarrow AI^2 = \frac{50\cdot 2\sin^2\beta}{2\sin^2\gamma} =$

$= \frac{12{,}5}{\sin^2\beta}\cdot 2\sin^2\gamma \Rightarrow \frac{\sin^4\gamma}{\sin^4\beta} = \frac{50}{12{,}5} \Rightarrow \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta} = \sqrt{\frac{2\cdot 5^2}{2\cdot 2{,}5^2}} =$

$= 2 \Rightarrow AI^2 = \frac{2\cdot 25}{\sin^2\gamma}\cdot 2\sin^2\beta = 50 \Rightarrow AI = 5\sqrt{2}$

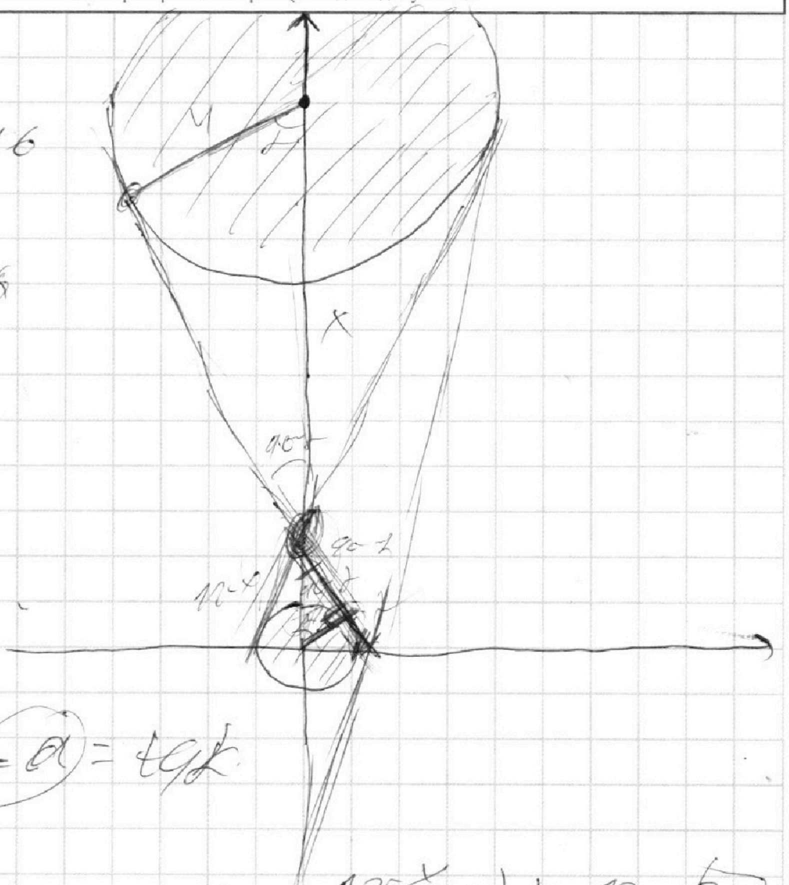
Ответ: $5\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+(y-11)^2 \ge 16\end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+(y-11)^2 \le 16\end{cases}\end{array}\right.$$



$ax+y-8b=0$

$y=-ax+8b$

$y=kx+b$

$x^2+(y-11)^2=16$

$-a=\operatorname{tg}\alpha$

$\frac{4}{12-x}=\cos\alpha=\frac{1}{x} \Rightarrow$

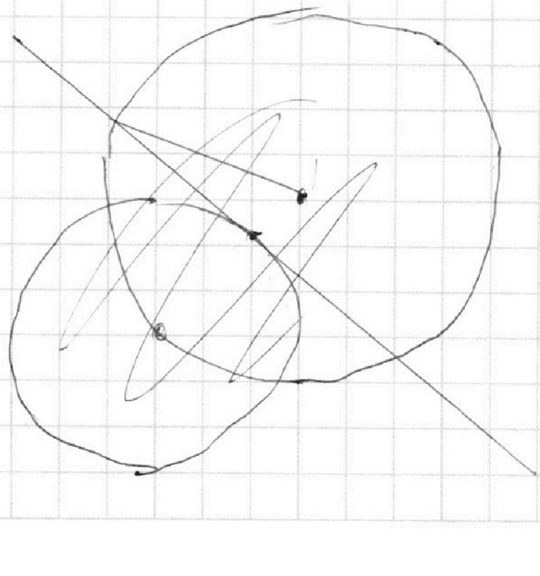
$4x=12-x \Rightarrow x=\frac{12}{5}=\boxed{2{,}4}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{5}{12} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{12}{13} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}}=-a$.

$a=\pm\frac{12}{5} \Rightarrow b=2{,}4$

$8x=\frac{12}{5}$

$x=\frac{3}{10}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{9x^4} + 226x^2 + 4 - \cancel{90x^3} - 12x^2 + 60x = \cancel{36x^4} \cancel{36x^3} + 12x^2 - \cancel{12x^3} - 72x^2$
$- 24x + 24x^2 + 24x + 8$

$27x^4 + 54x^3 - \cancel{60x} - 249x^2 - 60x + 4$

$432 + 432 + 4 - 996 + 120$

$868 -$

$432 \cdot 2^4 + 432 \cdot 2^3 = 432(\cancel{48})$

$\cancel{10368+4} -$

$9456 + 4 - 996 +$

$3x^2 - 6x + 2 = 0$

$\frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6}$

$\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$

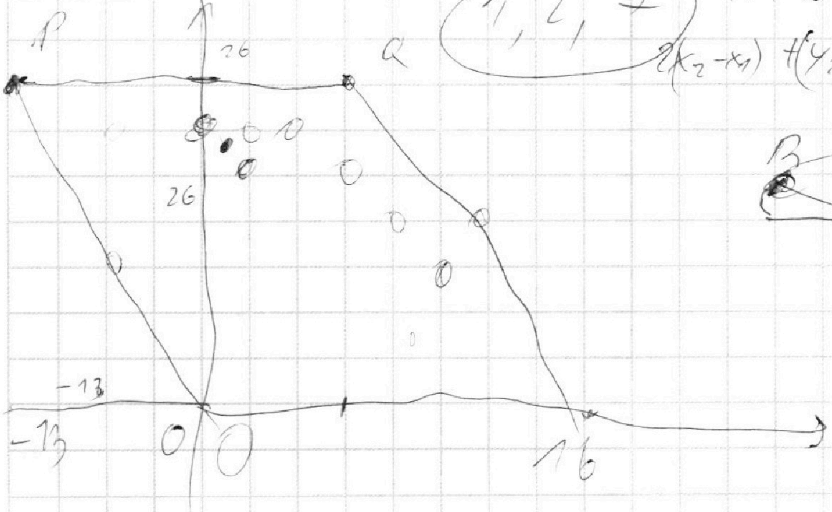
$x^2 + 3x + 1 = 0$

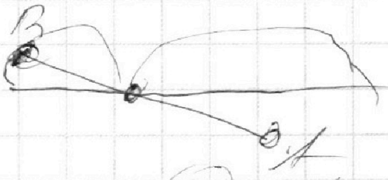
$-3 \pm \sqrt{9-12} < 0$

$1, 2, 1$

$4 + 4 + 6 = 14$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$





$\frac{5}{3}$

Если a корень
то ан-чем
$a^2 + b^2 - 7ab$ - кор

$x_2 - x_1 \leq 16 - (-13) = \boxed{\leq 29}$

$y_2 - y_1 \leq 26$

1 2

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$

$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b}$ $(ab : 9)$

$44 - 49 \cdot 2 + 4$ $\frac{9}{45}$

$-49 + 4 = -45$

$a + b - \frac{9ab}{a+b}$

9 9

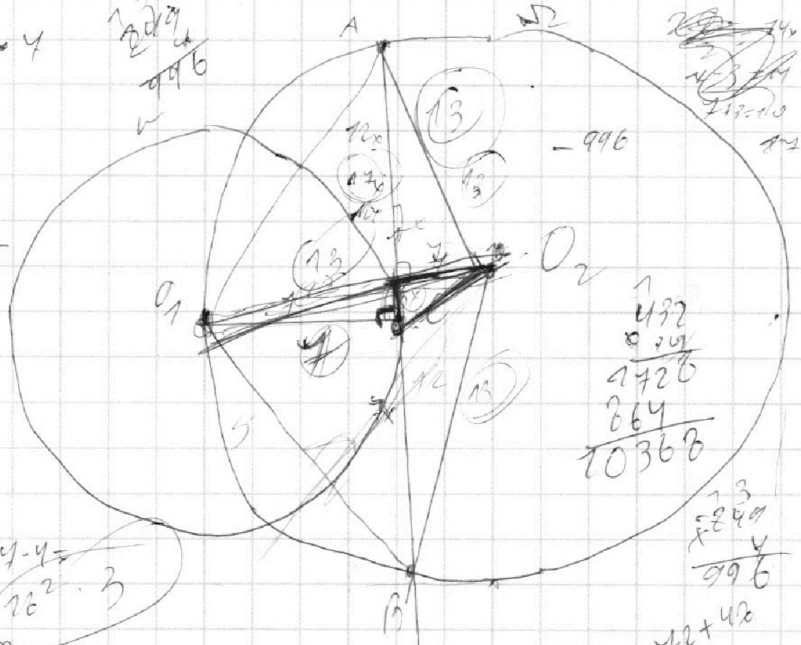
> 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$(3x^2 - 15x - 2)$

$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1$

$6x^2 - 3x + 3$

$3(2x^2 - x + 1) = 1 - 18x + 9x^2 + 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}$

$-3x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{\ldots}$

$(3x^2 - 15x - 2)^2 = 4(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)$

$9x^4 + 225x^2 + 4 - 90x^3 - 12x^2 + 60x = 4(9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2)$

$27x^4 + 81x^3 - 204x^2 - 60x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

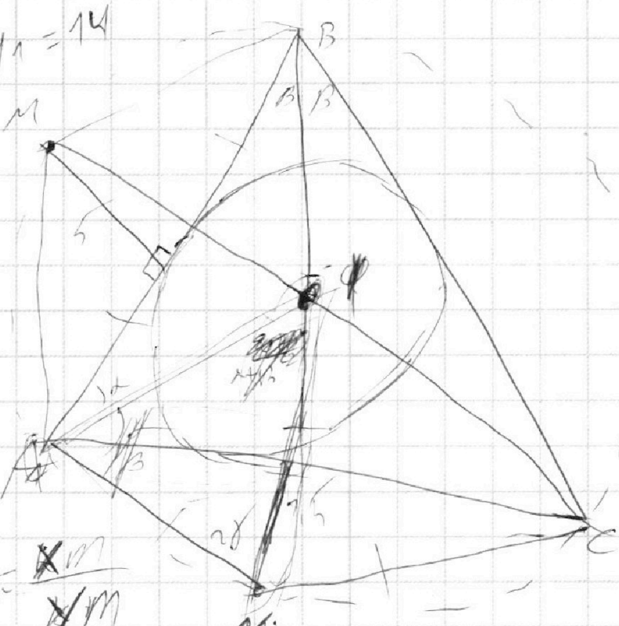
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$+y_2-y_1=14$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$2(x_2-x_1)$



$BM=\frac{5}{\sin\gamma}$

$NC=\frac{2{,}5}{\sin\beta}$

$\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta$

$\cos 2\gamma=\cos^2\gamma-\sin^2\gamma$

$AN=2{,}5/\sin\beta$

$BM_1=\quad AM=5/\sin\gamma$

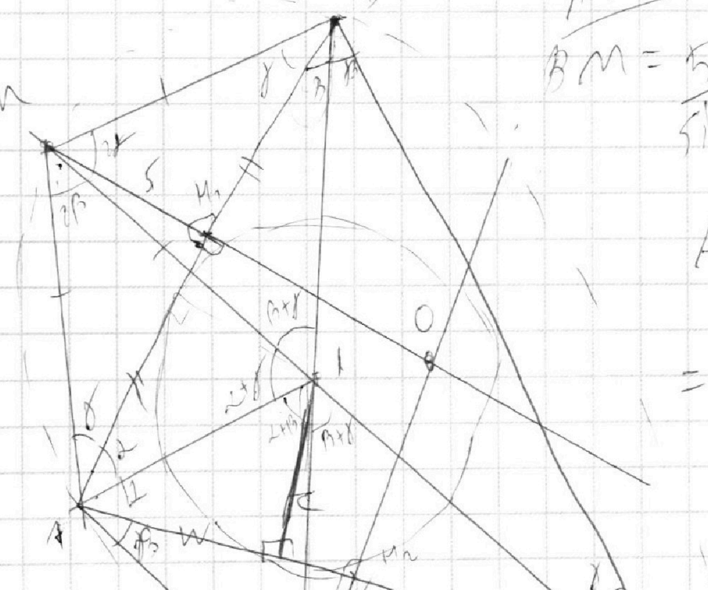
$\frac{ab}{a^2-2ab+b^2}=\frac{\cancel{X}M}{\cancel{Y}M}$

$\frac{AM}{AN}=$

$\cancel{AM=5\cdot\sin\gamma}$

$BM=\frac{5}{\sin\gamma}\Rightarrow AI^2=\frac{50}{\sin^2\gamma}\left(\frac{1-\cos^2\beta}{+\sin^2\beta}\right)$

$AI=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$



$AI^2=\frac{2\cdot 25}{\sin^2\gamma}-2\cdot\frac{25}{\sin^2\gamma}\cdot(\cos^2\beta-\sin^2\beta)$

$=\frac{2\cdot 6{,}25}{\sin^2\beta}-\frac{2\cdot 6{,}25}{\sin^2\beta}\cdot(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)$

$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}=\frac{50(1-\cos 2\beta)}{12{,}5(1-\cos 2\gamma)}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{5}{2{,}5}\cdot\frac{\sin^2\beta}{1-\cos^2\beta+\sin^2\beta}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=2\sqrt{\frac{1-\cos 2\beta}{1-\cos 2\gamma}}$

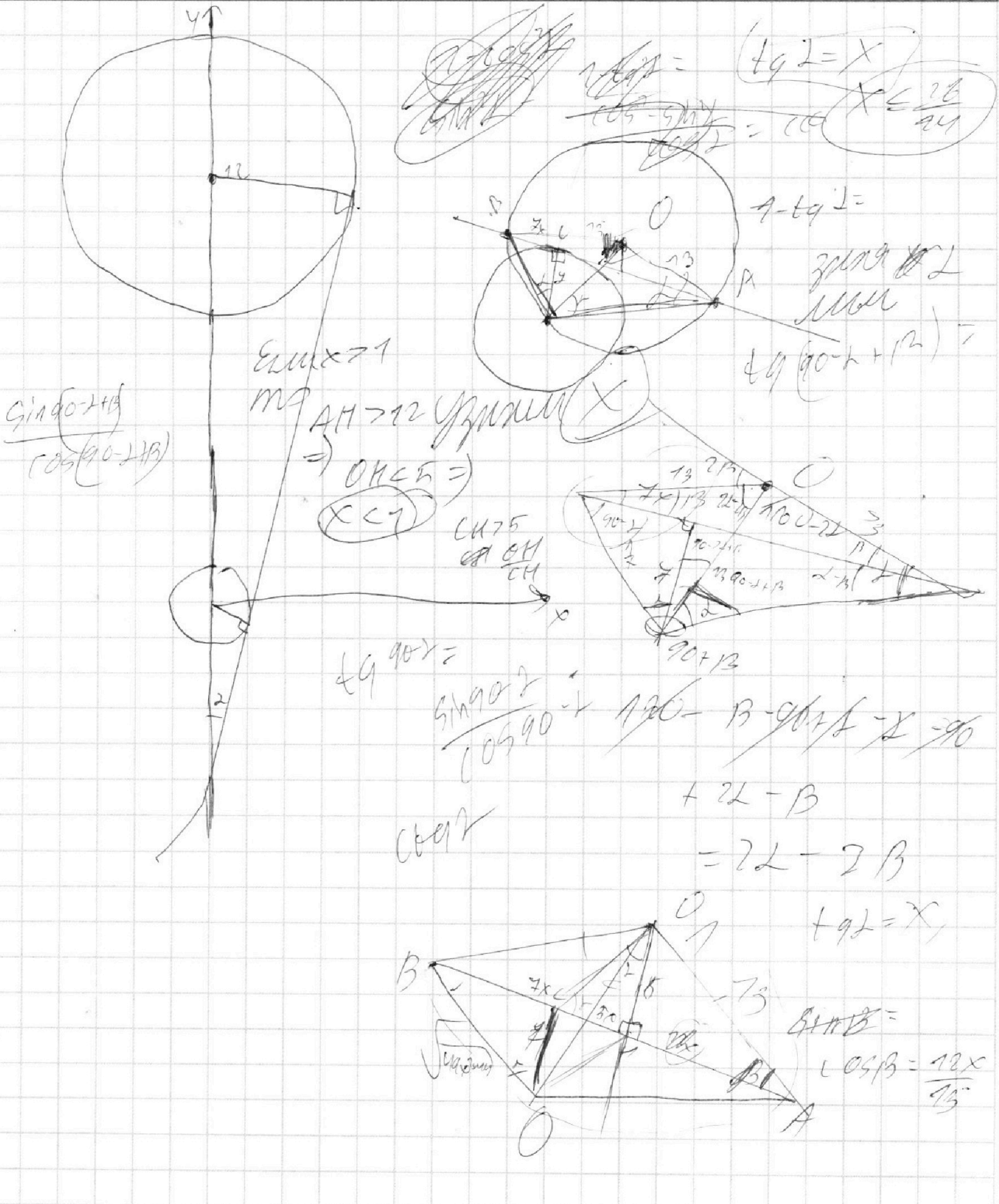
$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=2\sqrt{\frac{2\sin^2\beta}{2\sin^2\gamma}}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

$\boxed{\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\sqrt{2}}\Leftrightarrow \sin\beta$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

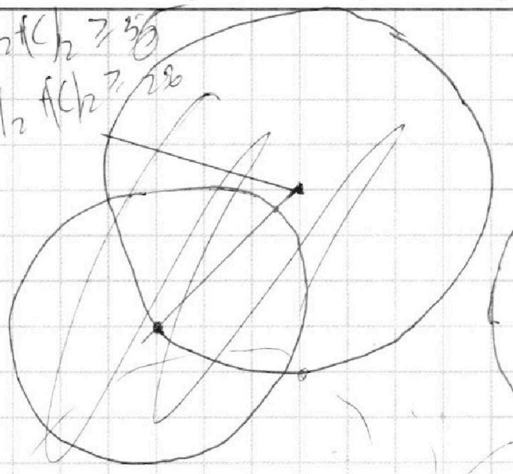


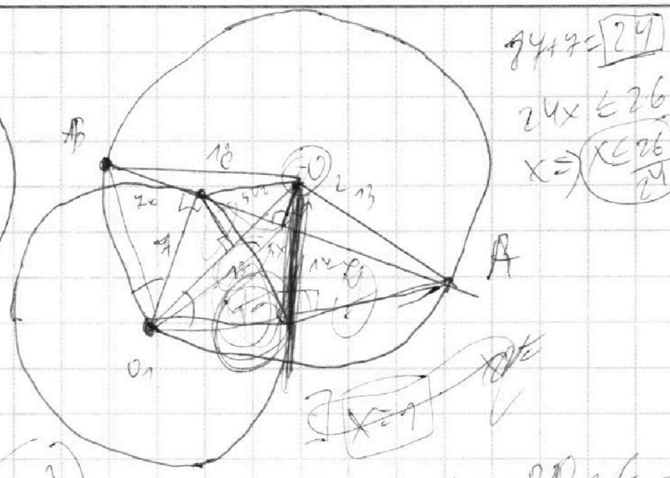
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

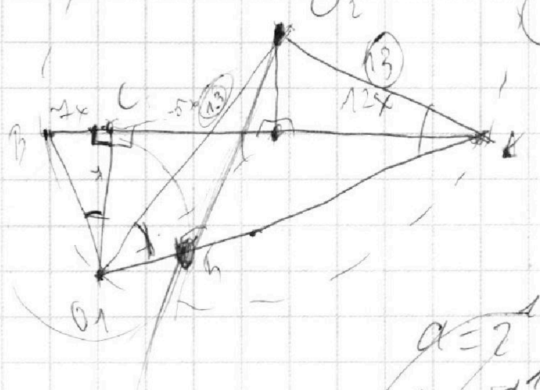
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ







$x = \frac{BC}{O_1C} = tg\angle BO_1C = tg\angle CO_2O_1A$

$ab = 2^{15}7^{11}$

$a = 2^{16}$

$b = 7^{11}$

$ab : 2^{15}7^{11}$

$bc : 2^{17}7^{16} \Rightarrow c = 2^{17}$

$a+b \geq 11$

$a+c \geq 16$

$b+c \geq 39$

$b \geq 39 - c$

$a + 39 - c \geq 11$

$a - c \geq -28$

$a + c \geq 16$

$2c \geq 46$

$\boxed{c \geq 23}$

$\Rightarrow a = 0$

$c = 23$

$b = \boxed{39+23}$

$37 = 23 + 2b$

$11 = 2b$

$b = 6$ 5

$\Rightarrow a = 9$ 10 23

$b = 11$ 13

~~$39 = 29 + 2b$~~

$29 = 39 + 2b$

$a = 2^{10}$

$c = 2^{13}$

$b = 2^{5}$