МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

~~$ab \,\vdots\, 2^{15} 7^{11}$~~

~~$bc \,\vdots\, 2^{17} 7^{18} \Rightarrow a^2b^2c^2 \,\vdots\, 2^{(15+17+23)} \cdot 7^{(11+18+39)} = 2^{55} \cdot 7^{68}$~~

~~$ac \,\vdots\, 2^{23} 7^{39}$~~

~~Т.к. $a^2b^2c^2$ - квадрат (числа abc), то все степени вхождения всех его простых делителей четны, и при этом т.к. $a^2b^2c^2 \,\vdots\, 2^{55} \cdot 7^{68}$ то степень вхождения 2 в разложении $a^2b^2c^2$ на простые ≥ 56, а $7 - \geq 68$. $\Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{\frac{56}{2}} \cdot 7^{\frac{68}{2}} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~$|a|_2 + |b|_2 \geq 15$~~

~~$|b|_2 + |c|_2 \geq 17$~~

~~$|a|_2 + |c|_2 \geq 23$~~

$ab \,\vdots\, 2^{15} 7^{11}$

$bc \,\vdots\, 2^{17} 7^{18} \Rightarrow a^2b^2c^2 \,\vdots\, 2^{55} \cdot 7^{68}$

$ac \,\vdots\, 2^{23} 7^{39}$

Т.к. $a^2b^2c^2$ - квадрат (числа abc) то степень вхождения простых чисел в его разложение четна $\Rightarrow (a^2b^2c^2)_2 \geq 56$ $\Rightarrow (abc)_2 \geq 28$, $(abc)_7 \geq 34 \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ т.к. $2 \neq 7$.

~~Пример, когда достигается равенство:~~

Но при этом $abc \,\vdots\, ac \,\vdots\, 7^{39} \Rightarrow (abc)_7 \geq 39$

Значит, $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример, когда достигается равенство:

$a = 2^{10} \cdot 7^{21}$

$b = 2^5 \quad \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

Ответ: $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 Если $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ сократима на m,

то и $\frac{a^2+b^2-7ab}{a+b}$ сократимая на m.

$$\frac{a^2+b^2-7ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b}=a+b-\frac{9ab}{a+b}\Rightarrow$$

$\frac{-9ab}{a+b}$ должно быть сократимо на m. т.к. $(a,b)=1$,

то $(ab, a+b)=1 \Rightarrow$ Если что и сокращается

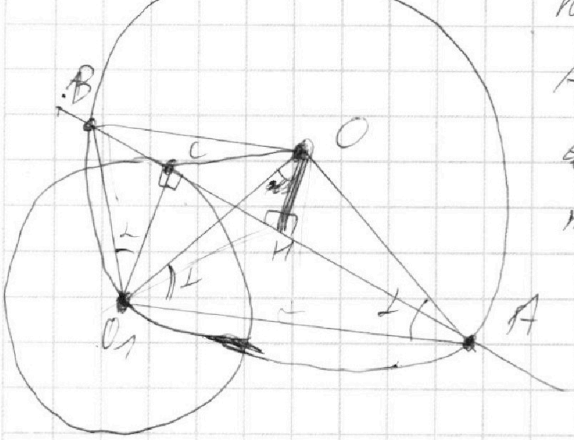
в числителе, то только ~~каждый~~ входящие

в множитель $9 \Rightarrow m \leq 9$ Пример:

$a=7, b=2 \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{9}{-45}=-\frac{1}{5}$

Ответ: $\max(m)=9$.

№3



по усл. $O_1C = 7$, $\frac{BC}{AC} = \frac{7}{17}$ (=) $BC = 7x$, $AC = 17x$) $AO = OO_1 = OB = 13$. пусть $\angle BO_1C = \alpha$,

тогда $tg\alpha = \frac{BC}{O_1C} = \frac{7x}{7} = x$. т.к. $OB = OA$ как радиусы, то $\triangle OBA$ – р/б => высота OH – и бис и медиана => $AH = BH = \frac{AB}{2} = 12x$ => $CH = BH - BC = 5x$

~~Если~~ $\alpha = \angle OCH$ т.к. $\triangle OCH$ и O_1CB – подобны => если $x > 1$

то ~~OBA~~ $AH > 12$, $OH < 5$ => $CH > 5$ => $x < 1$ противоречие, если $x < 1$,

то $AH < 12$ => $OH > 5$ => $CH < 5$ => $x > 1$ – противоречие

=> $x = 1$, => $AB = 17x = 17$

Ответ: 17

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

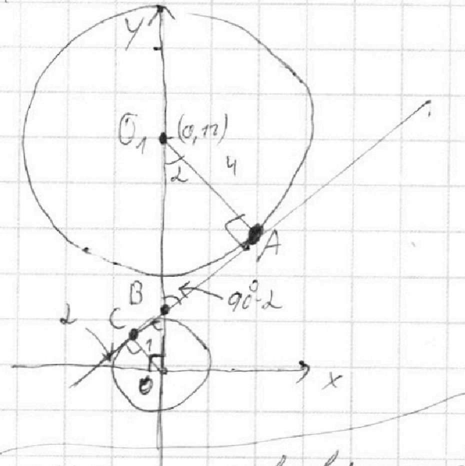
МФТИ

№6 $\begin{cases} (1)\ ax+y-8b=0 \\ (2)\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases} \end{array}\right.$ – на координатной пл-ти OXY это два ~~окружности~~ круга с центрами в (.) (0,0) и (0,12) ~~соотв.~~ и радиусами 1 и 4 соотв. Нам удовлетворяют все точки из любого круга, а точки вне этих кругов – нет.

(1) – прямая вида $y=-ax+8b$, и если нужно чтобы система имела 2 решения, нужно чтобы эта прямая была одной из ~~касательных~~ общих касательных к окружностям, т.к. пересечений у прямой и круга – либо 0, либо 1 (в случае касания) либо бесконечно много.

1 сл. Если касательная внутренняя:



Пусть O и O_1 – центры кругов, A и C – точки касания (как на рис), B – точка пересечения прямой $ax+y-8b=0$ и OY. Т.к. если прямая задана ур-ием $y=kx$, то $k=tg\angle$, где $\angle$ – угол между прямой и OX. ~~tg~~ $\angle = \frac{AB}{O_1B}$ (из $\triangle O_1AB$, $\angle BO_1A=\angle$ т.к. $\angle CBO=90^0-\angle$ (~~как~~ сумма углов в $\triangle = 180^0$) $=\angle O_1BA$ (как верт.) $\Rightarrow$. $tg\angle =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

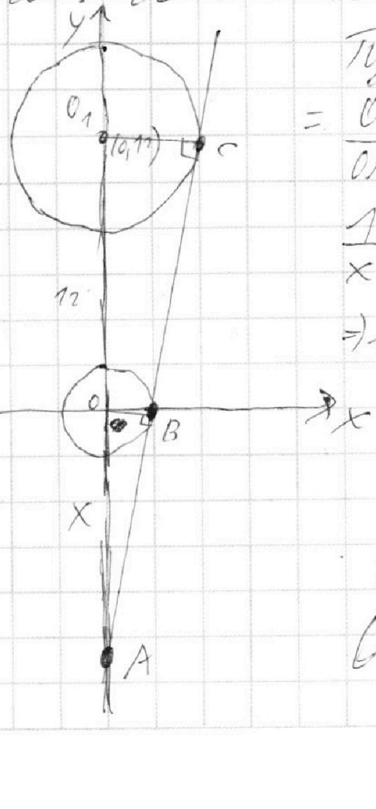
№6 (продолж)

~~Если~~ пусть угол между касательной и $Ox = \angle$ (пусть он острый, т.к. картинка симметрична ~~подойдет~~ отн. OY, то если нам подошло некоторое a, то и $-a$ - подойдет, ~~где~~ тогда $tg\angle = -a$ т.к. $-a$ - коэф при x в ур-ии прямой. Тогда $\angle CBO = 90° - \angle$ по сумме углов Δ, $\angle CBO = \angle O_1BA$ как верт $\Rightarrow \angle BO_1A = \angle$ из суммы углов Δ. $\Delta O_1BA \sim OBC$ как п/у Δ с верт. углом $\Rightarrow \angle COB = \angle$. $\cos\angle$ (из ΔO_1BA) $= \frac{4}{O_1B}$; $\cos\angle$ (из ΔOBC) $= \frac{1}{OB} \Rightarrow$ ~~tg cos~~ если $OB = x$, то $O_1B = 12 - x$, т.к. $OO_1 = 12$,

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{4}{12-x} \Rightarrow 4x = 12 - x \Rightarrow x = 2{,}4 \Rightarrow \cos\angle = \frac{5}{12} \Rightarrow$ ~~$tg\angle = 12$~~

$\Rightarrow a = \pm tg(\arccos\frac{5}{12})$, тогда $8b = x \Rightarrow b = 0{,}6$ (т.к. $8b$ - ~~y~~ координата точки пересечения касательной и OY, т.е. точки B)

2 сл: если касательная внешняя:



Пусть $OA = x$, тогда $O_1A = 12 + x$. $\sin\angle = \frac{OB}{OA}$ (из ΔOBA) $= \frac{O_1C}{O_1A}$ (из ΔO_1CA) $\Rightarrow$

$\frac{1}{x} = \frac{4}{12+x} = \sin\angle \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 = \frac{1}{\sin\angle}$

$\Rightarrow$ ~~cos~~ $a = \pm tg(\arcsin\frac{1}{4})$ (т.к. ~~картинка сл~~ вторая касательная аналогично 1 сл. симметрична отн. $OY \Rightarrow$ если a - подходит, ~~то~~ и $-a$ подойдет) тогда $B = 4$ (т.к. аналог 1 сл. это y координата точки A)

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = \pm tg(\arcsin\frac{1}{4}) \\ a = \pm tg(\arccos\frac{5}{12}) \end{array}\right.$

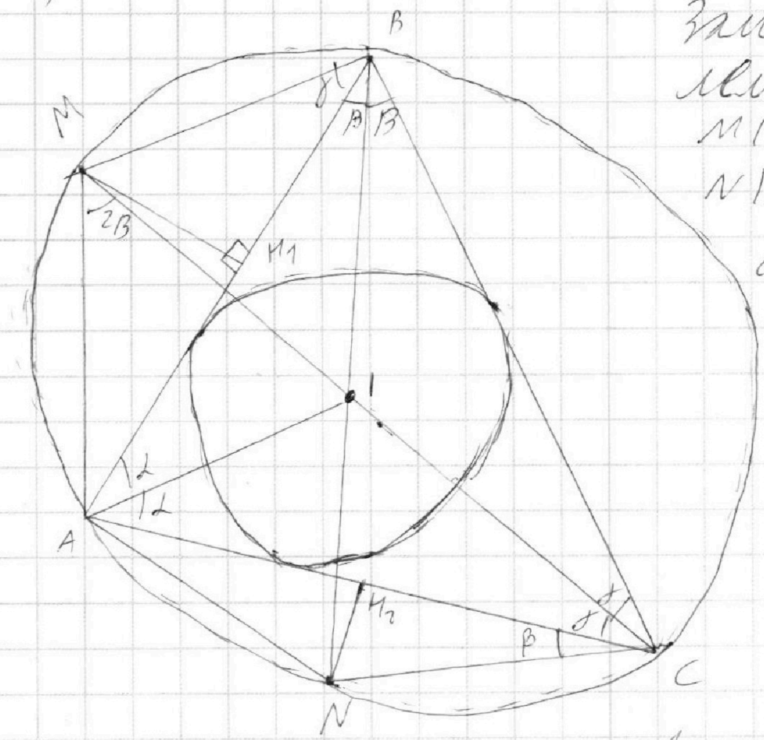
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



Заметим, что по лемме о трезубце $MI = AM = MB$, и $NI = NA = NC$. Пусть: $\angle BAI = \angle IAC = \alpha$; $\angle ABI = \angle IBC = \beta$; $\angle ACI = \angle ICB = \gamma$; (т.к. I — центр впис. окр, тогда BI, CI, и AI биссектрисы углов B, C, и A соотв.) $\angle AMI = 2\beta$ как впис, $\angle ANI = 2\gamma$ как впис, $\angle ACN = \beta$ и $\angle ABM = \gamma$ как вписанные опир. на дуги AN и AM соотв; значит, если MH_1 и NH_2 — высоты из точек M и N на прямые AB и AC, то $MB = \frac{5}{\sin\gamma}$; $\cancel{NC = \frac{7,5}{\sin\beta}} = MA = MI$; $NC = \frac{7,5}{\sin\beta} = NA = NI \Rightarrow$ по т. косинусов для $\triangle AMI$ $AI^2 = AM^2 + MI^2 - 2AM\cdot MI\cdot\cos 2\beta =$

$= \frac{2\cdot 5^2}{\sin^2\gamma} - \frac{2\cdot 5^2}{\sin^2\gamma}\cdot\cos 2\beta$, а по т. косинусов для $\triangle ANI$

$AI^2 = AN^2 + NI^2 - 2AN\cdot NI\cdot\cos 2\gamma = \frac{2\cdot 7,5^2}{\sin^2\beta} - \frac{2\cdot 7,5^2}{\sin^2\beta}\cdot\cos 2\gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow AI^2 = \frac{2\cdot 25}{\sin^2\gamma}(1-\cos 2\beta) = \frac{2\cdot 6,25}{\sin^2\beta}(1-\cos 2\gamma)$. $1-\cos 2x =$

$= \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x$. $\Rightarrow AI^2 = \frac{50\cdot 2\sin^2\beta}{2\sin^2\gamma} =$

$= \frac{12,5}{\sin^2\beta}\cdot 2\sin^2\gamma \Rightarrow \frac{\sin^4\gamma}{\sin^4\beta} = \frac{50}{12,5} \Rightarrow \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta} = \sqrt{\frac{2\cdot 5^2}{2\cdot 2,5^2}} =$

$= 2 \Rightarrow AI^2 = \frac{2\cdot 25}{\sin^2\gamma}\cdot 2\sin^2\beta = 50 \Rightarrow AI = 5\sqrt{2}$

Ответ: $5\sqrt{2}$

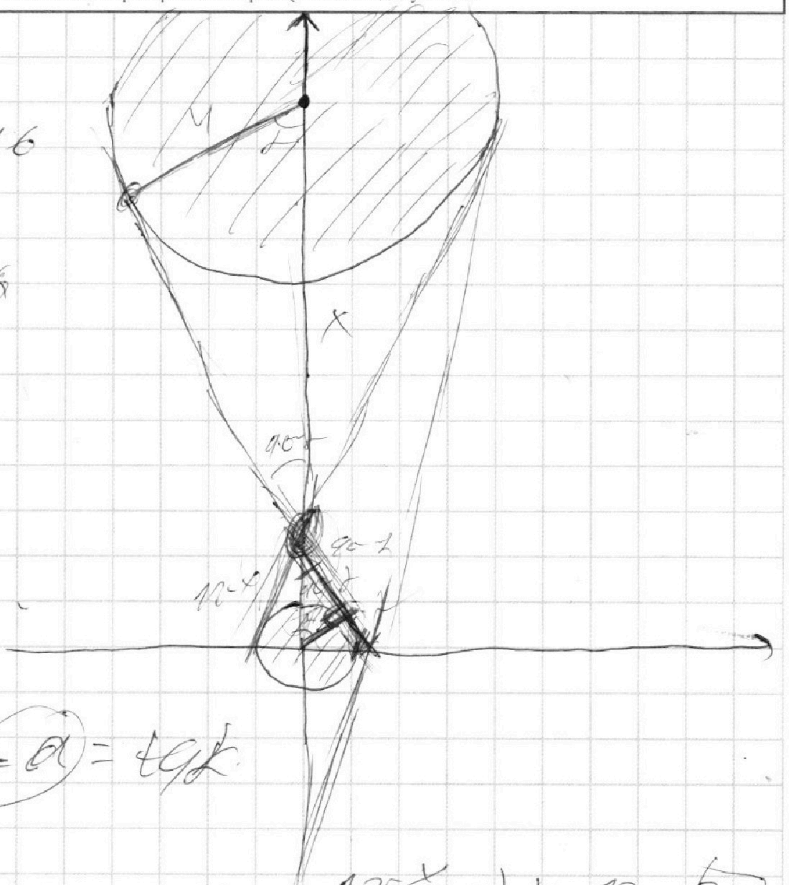
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+(y-12)^2 \cancel{\ge} 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+(y-12)^2 \le 16 \end{cases}\end{array}\right.$$

$ax+y-8b=0$

$y=-ax+8b$

$y=kx+b$

$x^2+(y-12)^2=16$



$-a=tg\alpha$

$\cancel{\frac{12-x}{4}=\frac{1}{\cos\alpha}}$

$4x=12-x \Rightarrow x=\frac{12}{5}=\boxed{2,4}$

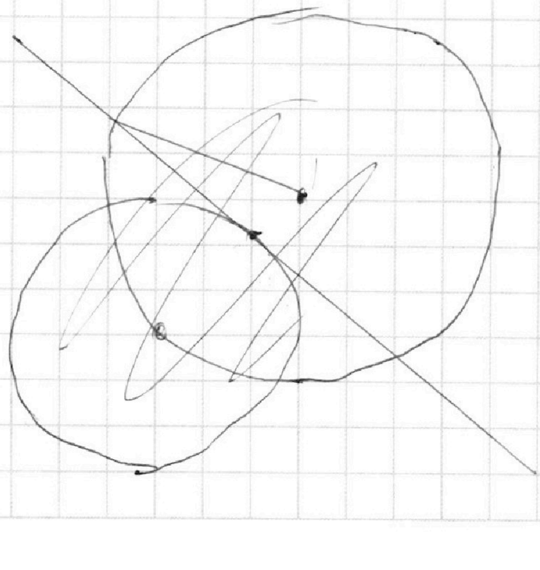
$\frac{4}{12-x}=\cos\alpha=\frac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{5}{13} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{12}{13} \Rightarrow \boxed{tg\alpha=\frac{12}{5}}=\boxed{-a}.$

$a=\pm\frac{12}{5} \Rightarrow b=2,4$

$8x=\frac{12}{5}$

$x=\frac{3}{10}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^4 + 226x^2 + 4 - 12x^2 + 60x = \ldots + 12x^2 \ldots - 7x^2$
$- 24x + 24x^2 + 24x + 8$

$27x^4 + 54x^3 - 249x^2 - 60x + 4$

$432 + 432 + 4 - 996 + 120$

$868 -$

$432 \cdot 2^4 + 432 \cdot 2^3 = 432(\ldots)$

$\cancel{10368 + 4} -$

$3456 + 4 - 996 +$

$3x^2 - 6x + 2 = 0$

$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$

$\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$

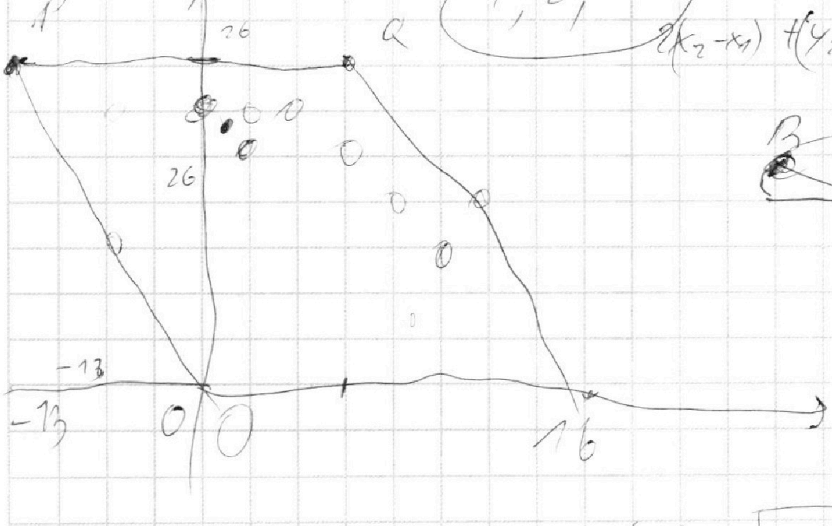
$x^2 + 3x + 1 = 0$

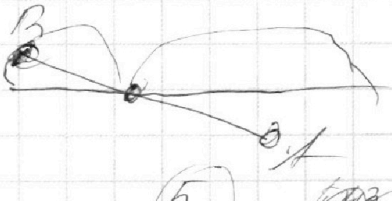
$-3 \pm \sqrt{9 - 12} < 0$

1, 2, 4

$4 + 4 + 6 = 14$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$





$\frac{5}{3}$

Если ? корень то его чем $a^2 + b^2 - 7ab$ ...

$x_2 - x_1 \le 16 - (-13) = \boxed{\le 29}$

$y_2 - y_1 \le 26$

1 2

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$

$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b}$ $ab : 9$

$49 - 49 \cdot 2 + 4$ $\frac{9}{-45}$

$-49 + 4 =$

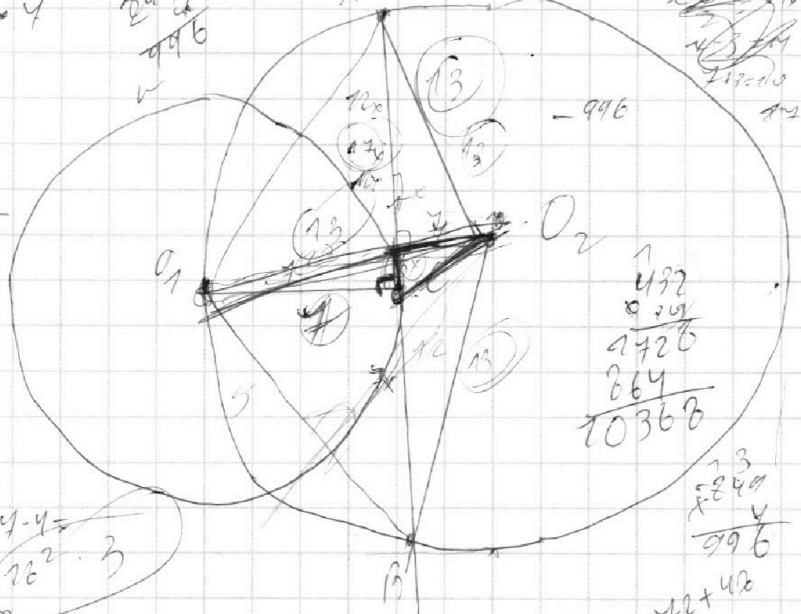
$a + b - \frac{9ab}{a+b}$ 9 9 > 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$

$x = 1$

$(3x^2 - 15x - 2)$

$3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x)^2$

$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1$

$6x^2 - 3x + 3$

$3(2x^2 - x + 1) = 1 - 18x + 81x^2 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$

$-3x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{\ }$

$(3x^2 - 15x - 2)^2 = 4(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)$

$9x^4 + 225x^2 + 4 - 90x^3 - 12x^2 + 60x = 4(9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2)$

$27x^4 + 81x^3 - 204x^2 - 60x$

$225 - 84$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

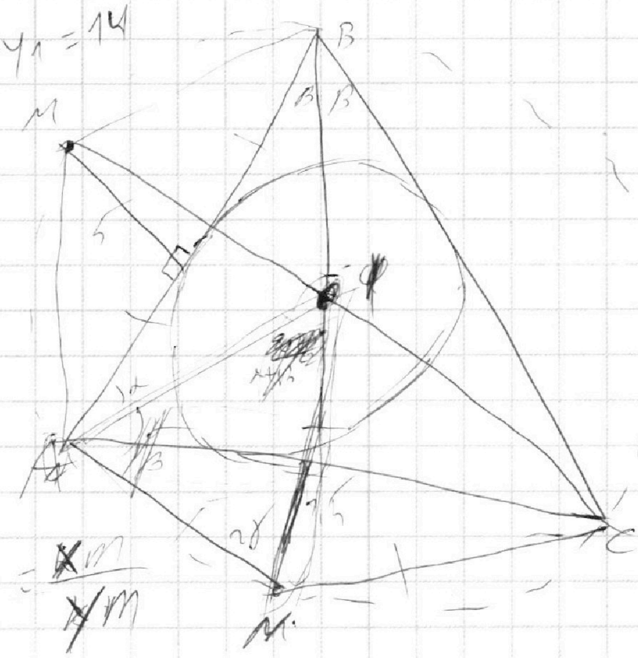
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$2(x_2-x_1)$

$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}=\frac{\cancel{X}M}{\cancel{Y}M}$



$BM=\frac{5}{\sin\gamma}$

$NC=\frac{2{,}5}{\sin\beta}$

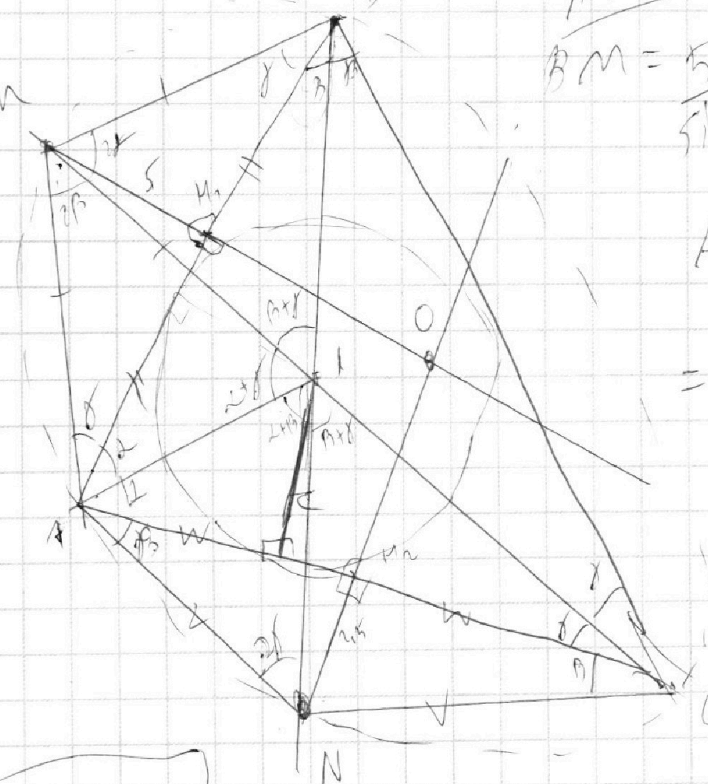
$\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta$

$\cos 2\gamma=\cos^2\gamma-\sin^2\gamma$

$\boxed{AN=2{,}5/\sin\beta}$

$AM=...$

$\frac{AM}{AN}=...$



$BM=\frac{5}{\sin\gamma}\Rightarrow AI^2=\frac{50}{\sin^2\gamma}(1-\cos^2\beta+\sin^2\beta)$

$AI=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$AI^2=\frac{2\cdot 25}{\sin^2\gamma}-\frac{2\cdot 25}{\sin^2\gamma}\cdot(\cos^2\beta-\sin^2\beta)$

$=\frac{2\cdot 6{,}25}{\sin^2\beta}-\frac{2\cdot 6{,}25}{\sin^2\beta}\cdot(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)$

$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}=\frac{50(1-\cos 2\beta)}{12{,}5(1-\cos 2\gamma)}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=2\sqrt{\frac{1-\cos 2\beta}{1-\cos 2\gamma}}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=2\sqrt{\frac{2\sin^2\beta}{2\sin^2\gamma}}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

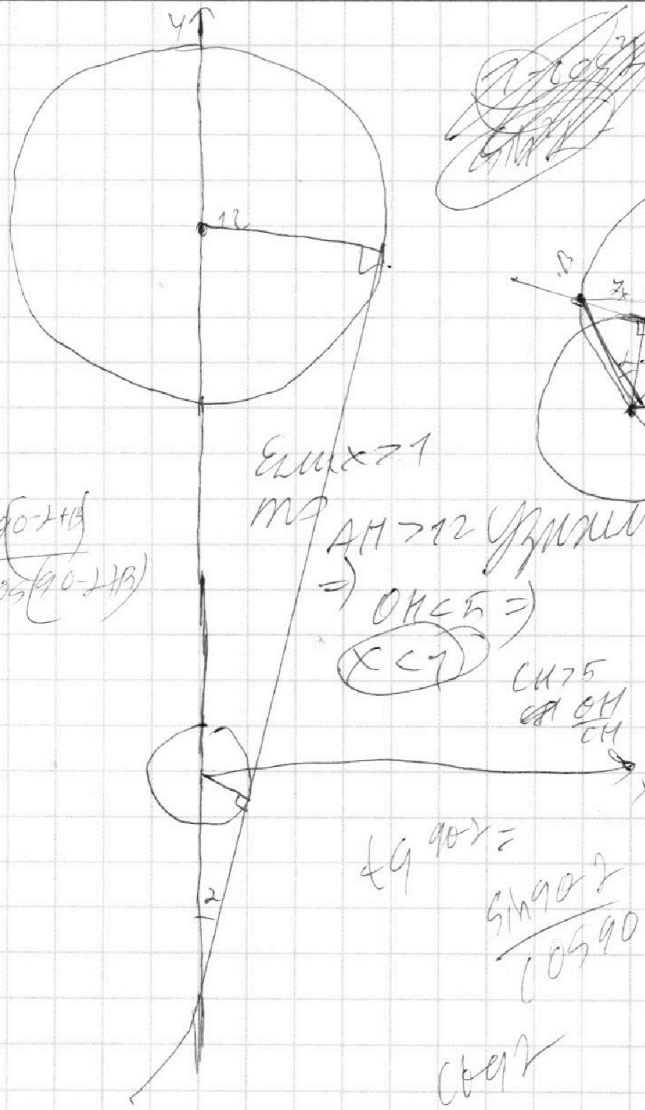
$\boxed{\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\sqrt{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

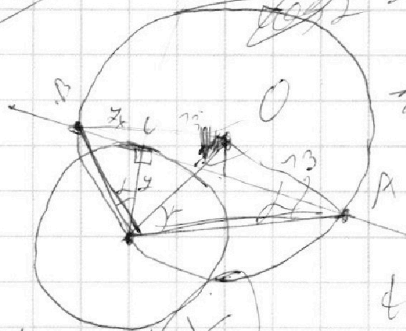
МФТИ



$tg\,2 = x$

$x \le \frac{12}{24}$

$1 - tg^2 =$



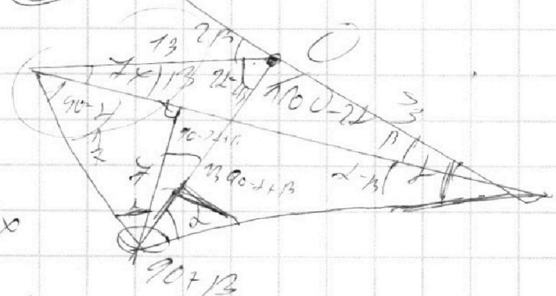
$tg(90 - 2 + 13) =$

Если $x > 1$ то $AH > 12$ узнаем $\Rightarrow OH < 5 \Rightarrow x < 7$

$CH > 5$

$\frac{OH}{CH}$

$\frac{\sin(90-2B)}{\cos(90-2B)}$



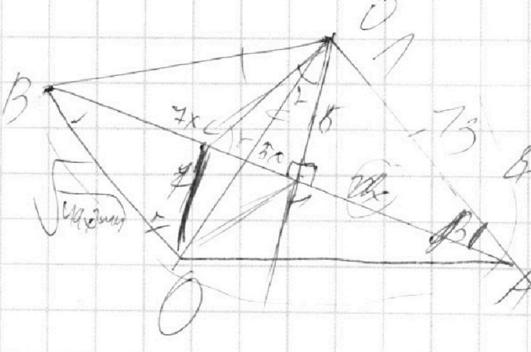
$tg\,90 =$

$\frac{\sin 90}{\cos 90}$ $180 - B - 90 + 2 - 2 = 90$

$+ 22 - B$

$= 22 - 2B$

$tg\,2 = x$



$\cos B = \frac{12x}{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

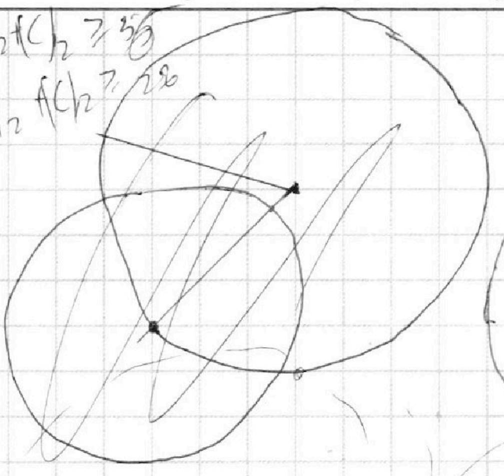
1 2 3 4 5 6 7

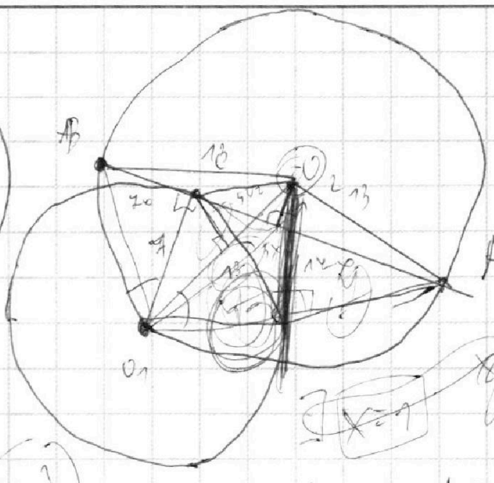
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2(a)_2+(b)_2+(c)_2 \geq 39$

$(a)_2+(b)_2+(c)_2 \geq 26$



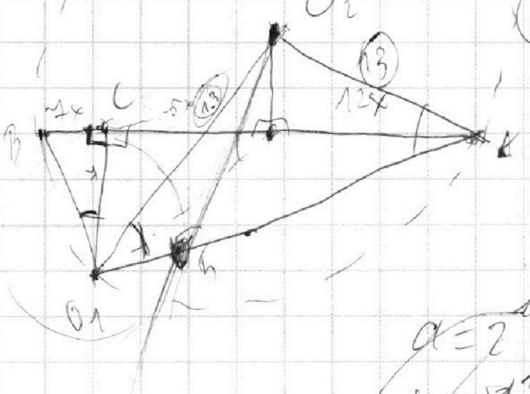


$24+7=\boxed{24}$

$24x \leq 26$

$x = x \leq \frac{26}{24}$

$\boxed{x=1}$



$AH=?$

$x = \frac{12C}{O_1C} = tg\angle BO_1C = tg\angle CO_2O_1A$

15 55

$a=2^{16}$

$b=7^{11}$

$ab = 2^{15}7^{11}$

$32 = 23+2b$

$11 = 2b$

$b = 6$ 5

$\Rightarrow a = 9$ 10 23

$b = 11$ 13

$ab : 2^{15}7^{11}$

$bc : 2^{17}7^{16} \Rightarrow c = 2^{17}$

$a = 2^{10}$

$c = 2^{13}$

$b = 2^{5}$

~~$39 = 29+2b$~~

$29 = 39+2b$

$a+b \geq 11$

$a+c \geq 16$

$b+c \geq 39$

$b \geq 39-c$

$a+39-c \geq 11$

$a-c \geq -28$

$a+c \geq 16$

$2c \geq 46$

$\boxed{c \geq 23}$

$\Rightarrow a = 0$

$c = 23$

11

$b = \boxed{29+23}$