



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $t$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $t$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$ab: 2^5 \cdot 7^1$$

$$bc: 2^4 \cdot 7^{18} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac \mid (2^{15} \cdot 2^4 \cdot 2^3) \Leftrightarrow (abc)^2 \mid 2^{55} \Rightarrow abc \leq 2^{28}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^5 \cdot 7^{14}$$

$$b = 2^4 \cdot 7^7$$

$$c = 2^3 \cdot 7^9$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 28$$

$$(abc)^2 \mid (7^1 \cdot 7^{18} \cdot 7^3) \Leftrightarrow (abc)^2 \mid 7^{68} \Rightarrow abc \leq 7^{34}, \text{ но } ac \leq 7^{29}$$

$$\text{Тогда } abc \leq 7^{29}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 29$$

$$abc = 2^{\frac{a_2+b_2+c_2}{2}} = 2^{\frac{28+29}{2}} = 2^{\frac{57}{2}} = 2^2 \cdot 7^{28.5} - \text{ минимальное возможное значение.}$$

$$\text{Пример: } a = 2^{10} \cdot 7^6$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{23}$$

$$\text{Од bei: } 2^{28} \cdot 7^{38}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓2

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-ab}$$

(1)  $\frac{ab}{a+b} \in \mathbb{Z}$ ,  $a, b$ - взаимно простые

$a = k \cdot n$ ,  $k$ -простое

$\begin{cases} ab \mid k \\ a \nmid k \\ b \nmid k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \mid k \\ a \nmid ab \\ b \nmid ab \end{cases}$  - и так для любого простого  $k$

Получаем что  $a$  и  $b$  взаимно просты,  $ab \neq 1, a+b \neq 1$

$\frac{a}{b}$  - несократимая дробь  $\Leftrightarrow a, b$ - взаимно просты

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-ab} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{ab(a+b)^2-ab}{a^2b^2+a^2b-ab^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{ab}{a^2b^2+a^2b-ab^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2b^2+a^2b-ab^2} \in \mathbb{Z}$$

Если будет за  $m = ab$ , то это макс. число на которое можно сократить

дробь т.к. б числитель окажется 1.

$$\begin{cases} g:m \\ m-\text{некр.} \end{cases} \rightarrow m=g$$

Пример:  $a=4, b=5$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

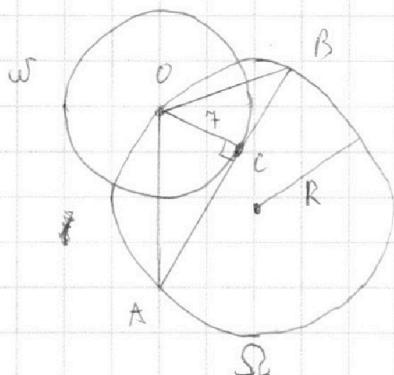
6

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3



$$OC = 4$$

$$R = 13$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{4}$$

$OC \perp AB$  т.к.  $AB$ -касат.  $\omega$

$$\begin{cases} \frac{AC}{BC} = \frac{17}{4} \\ AC + BC = AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC = \frac{17}{24} AB \\ BC = \frac{7}{24} AB \end{cases}$$

$\triangle AOB$  вписан в  $\omega$ . Площадь  $\triangle AOB$   $S = \frac{AB \cdot AO \cdot OB}{4R}$

$$AO = \sqrt{r^2 + AC^2} = \sqrt{49 + \frac{17^2}{24^2} AB^2}$$

$$BO = \sqrt{r^2 + BC^2} = \sqrt{49 + \frac{7^2}{24^2} AB^2}$$

$$S = \frac{OC \cdot AB}{2} = \frac{7AB}{2}$$

$$\frac{AB \cdot AO \cdot BO}{4R} = S = \frac{7AB}{2} \Leftrightarrow AO \cdot BO = 14R \Leftrightarrow \sqrt{49 + \frac{17^2}{24^2} AB^2} \sqrt{49 + \frac{7^2}{24^2} AB^2} = 14 \cdot 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= 1 - 3x \Leftrightarrow (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = \\ &= 8(1 - 3x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \Leftrightarrow (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = 8(1 - 3x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \\ \Leftrightarrow 1 - 9x &= (1 - 3x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

При  $x = \frac{1}{3}$ ,  $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \leq 1 \\ 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 1 \leq 0 \\ 3x^2 + 3x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \frac{3-\sqrt{6}}{3})(x - \frac{3+\sqrt{6}}{3}) \leq 0 \\ x(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [\frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{3+\sqrt{6}}{3}] \\ x \in [-1; 0] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

Ответ:  $\{\frac{1}{3}\}$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

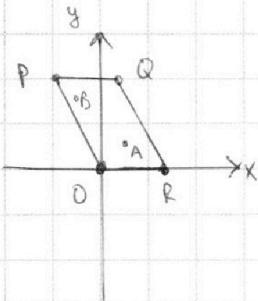
6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O(0,0)$$

$$P(-3, 26)$$

$$Q(3, 26)$$

$$R(16, 0)$$

$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

$$A, B \in PORQ \Rightarrow 0 \leq y_1, y_2 \leq 26$$

$$PO: y = -2x$$

$$QR: y = -2x + 32$$

$$A, B \in PORQ \Rightarrow \begin{cases} y_2 \leq -2x_2 + 32 \\ y_1 \leq -2x_1 + 32 \\ y_1 \geq -2x_1 \\ y_2 \geq -2x_2 \end{cases} \quad \leftarrow \quad \begin{cases} -2x_2 \leq y_2 \leq -2x_2 + 32 \\ -2x_1 \leq y_1 \leq -2x_1 + 32 \end{cases} \quad \leftarrow$$

$$\begin{cases} 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \\ 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 32 \end{cases}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \Leftrightarrow 2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \Leftrightarrow 0 \leq y_1 + 2x_1 + 14 \leq 32 \Leftrightarrow -14 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18$$

$$0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 32 \Leftrightarrow 0 \leq y_2 + 2x_2 - 14 \leq 32 \Leftrightarrow 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 46$$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 32 \\ -14 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18 \\ 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \\ 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 46 \end{cases} \quad \leftarrow \quad \begin{cases} 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18 \\ 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \end{cases}$$

Надо найти количество целочисленных выражений  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$  такие, что:

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18 \\ 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \\ 0 \leq y_1 + y_2 \leq 26 \\ 2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

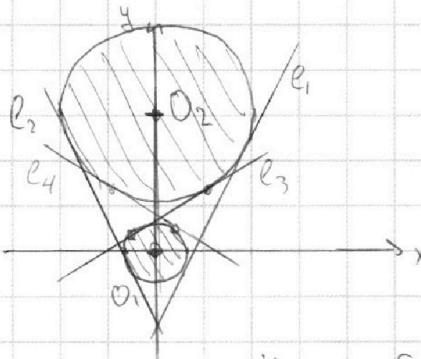
МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-1)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Отметим на коорд. плоскости множество точек, которое задаётся по приведу:



Это множество представляет собой два круга с

центрами  $O_1(0,0)$ ,  $O_2(0,12)$  и радиусами 1; 12 соответ.

Если  $A(x,y)$  попадет в это множество, то  $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0$

М-это

$$ax+by=0 \Leftrightarrow y=-ax/b - \text{прямая } l. \text{ Неск.}$$

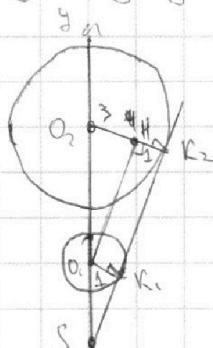
Если  $A(x,y) \in l, M$ , то для  $x,y$  выполняется система из

усл.

Нам need. чтобы система имела либо 2 реш.  $\Leftrightarrow l$  пересекает  
М только в двух точках.

Все такие прямые отмечены на рисунке.

Найдем тангенс угла наклона  $l_1$ .



$K_1, K_2$ -коорд. точки пересеч.  $O_1H \perp O_2K_2$

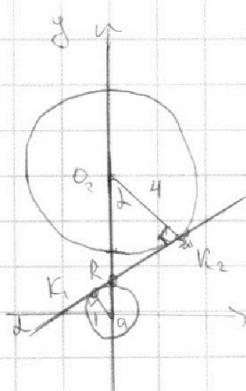
$$O_1K_1K_2H-\text{прямоугольник} \Rightarrow HK_2=9 \Rightarrow O_2H=3$$

$$O_1H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2} = \sqrt{144-9} = 3\sqrt{15}$$

$$\tan \angle O_2O_1H = \frac{3}{3\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \Rightarrow \sin \angle O_2O_1H = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$O_1H \parallel K_1K_2 \Rightarrow O_1H, K_1K_2$  имеют одинак. угол наклона к оси  
абсцисс.  $\tan \angle = \sin \angle O_2O_1H = \frac{\sqrt{15}}{15}$

Приложен угол наклона прямой равен коорд. стороны ему при  $x$ .  
 $a_1 = \frac{\sqrt{15}}{5}$ . В силу симметрии  $O_2$  имеет коорд.  $a_2 = -a_1 = -\frac{\sqrt{15}}{5}$



Найдем тангенс угла  $l_3$ .  $\triangle K_2O_2R \sim \triangle K_2O_2R$

$$\frac{O_2R}{O_1R} = \frac{O_2K_2}{O_1K_2} \Leftrightarrow \frac{O_2R}{O_1R} = \frac{48}{5}$$

$$O_1R + O_2R = 12 \quad O_1R = \frac{12}{5}$$

$$O_2R = \sqrt{O_2K_2^2 - O_1R^2} = \sqrt{\frac{48^2}{5^2} - 4^2} = \sqrt{\frac{48^2 - 20^2}{5^2}} = \frac{4}{5}\sqrt{119}$$

$$\tan \angle = \tan \angle O_2O_1R = \frac{O_1R}{O_2K_2} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{5}\sqrt{119}} = \frac{3}{\sqrt{119}} = \frac{\sqrt{119}}{5} = a_3$$

Коорд. в уравнении  $b_4$  суть  $a_4 = -a_3 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$  в силу симметрии

Получилось 4 знач. параметра  $a$ , где каждого из которых можно найти  
помогающее  $b$ . Для  $a = \pm \frac{\sqrt{15}}{5}$ ,  $b = -0.5$ , где  $a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$ ,  $b = 0.5$

$$\text{Отвр: } \left\{ \pm \frac{\sqrt{15}}{5}; \pm \frac{\sqrt{119}}{5} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ.**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} \cdot 4^4$$

$$bc : 2^{14} \cdot 4^8$$

$$ac : 2^{12} \cdot 4^3$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = (-5x) \Leftrightarrow$$

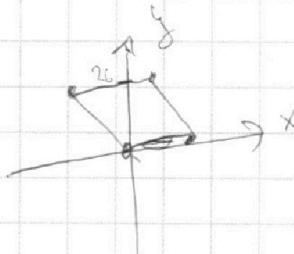
$$x = \frac{-1 + \sqrt{5} - 6}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 6}}{3} \quad \text{D}_{\text{БКР}} \left[ x = \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \quad \text{неко}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \quad \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \quad \text{неко}$$

$$\frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \frac{3+3 \cdot 2}{4}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{9 - 3}}{3} = \frac{3 + \sqrt{6}}{3} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3})(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{3 - \sqrt{6}}{3}] \cup [\frac{3 + \sqrt{6}}{3}, +\infty)$$



$$0 \leq y \leq 26$$

$$y = 2x$$

$$y \geq 2x$$

$$-2x \leq y \leq -2x + 32$$

$$26 = -13x + 11$$

$$L \cap C = -2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \Leftrightarrow 2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$0 \leq y_1 \leq 26$$

$$0 \leq y_2 \leq 26$$

$$-2x_1 + y_1 \leq -2x_1 + 32$$

$$-2x_2 + y_2 \leq -2x_2 + 32 \Leftrightarrow 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 32$$

$$0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18$$

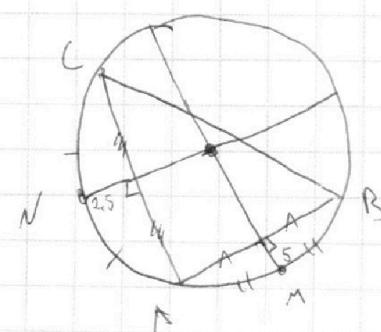
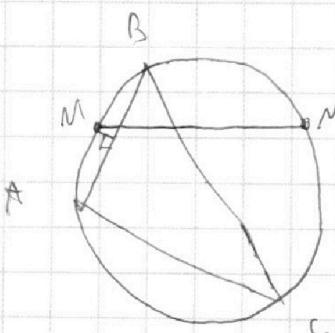
$$0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18$$

$$14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32$$

$$0 \leq y_2 \leq 26$$

$$0 \leq y_2 \leq 28$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

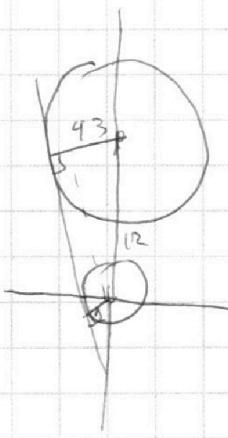
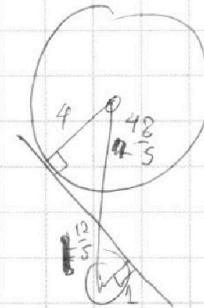
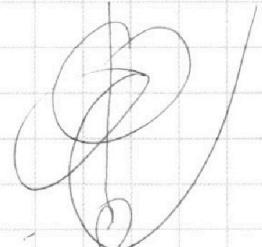
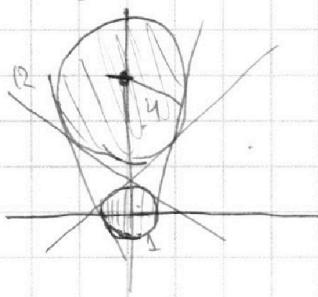
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + b = 0$$

$$(x^2 - y^2 - 1)(x^2 + (y - 1)^2 - 16) \leq 0$$

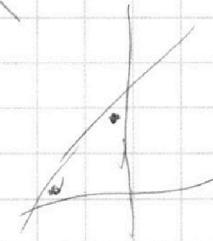
$$y = -ax + b$$



$$144 - 9 = 135 = 9 \cdot 15$$

$$\tan \beta = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{15}$$

$$\frac{\sin(\pi - \beta)}{\cos(\pi - \beta)} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \cot \beta = \sqrt{5}$$



$$68^\circ 26' = 4^\circ 40' 7'' \pi$$

$$\pi$$

$$\frac{14}{15}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 + 2ab} \Rightarrow = \frac{a}{a - 2\sqrt{ab} + b^2}$$

ab

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 3x \Leftrightarrow (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = \\ = (1 - 3x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = (1 - 3x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \Leftrightarrow$$

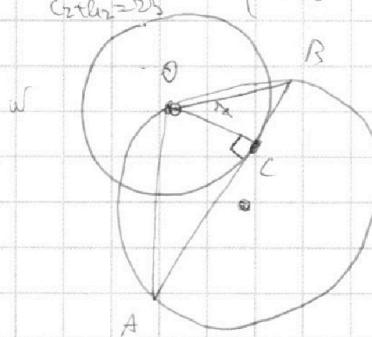
$$\Leftrightarrow 1 - 3x = (1 - 3x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$\text{При } x = \frac{1}{3}, \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \leq 1 \\ 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 1 \leq 0 \\ 3x^2 + 3x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} b_2 = 5 \\ a_2 = 10 \\ c_2 = 13 \\ a_2 + b_2 = 15 \\ b_2 + c_2 = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 = 15 \\ a_2 + c_2 = 13 \end{cases} \\ c_2 + b_2 = 23 \end{array} \right\}$$

$$AO = \sqrt{4a_2 + AC^2} = \frac{14}{\sqrt{13}} \\ BO = \sqrt{4a_2 + BC^2} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$



$$S = \frac{\sqrt{4AB^2 - \sqrt{4a_2 + AC^2} \sqrt{4a_2 + BC^2}}}{2} = \frac{13\sqrt{13}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 13^2 = \sqrt{4a_2 + AC^2} \sqrt{4a_2 + BC^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 169 = \sqrt{4a_2 + \frac{17^2}{24} AB^2} \cdot \sqrt{4a_2 + \frac{17^2}{24} AB^2} =$$

$$\frac{338}{169} = \frac{17}{13} \Leftrightarrow 26 \cdot 21 = \sqrt{4a_2 + \frac{17^2}{24} AB^2} \cdot \sqrt{24^2 + AB^2}$$

$$CF = 4^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \\ a^2 b^2 c^2 = 2^6 \cdot 7^4 \cdot 2^4 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 7^3 \Leftrightarrow (abc)^2 = 2^{18} \cdot 7^{11} \Leftrightarrow abc = 2^9 \cdot 7^5$$

$$a = 2^4 \cdot 7^6 \\ b = 2^5 \cdot 7 \\ c = 2^3 \cdot 7^3$$

$$a_2 + c_2 = 23 \\ a_2 + b_2 = 15 \\ b_2 + c_2 = 17 \\ a_2 + b_2 + c_2 = 28$$

$$a_2 = 11 \\ b_2 = 5 \\ c_2 = 12 \\ a_2 + b_2 + c_2 = 24 \\ abc = \\ a_2 + b_2 = 11 \\ c_2 = 23 \\ a_2 = 16 \\ b_2 = 0$$

$$a = 2^4 \cdot 7^6 \\ b = 2^5 \cdot 7 \\ c = 2^3 \cdot 7^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!