МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right)\leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11} \\ bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18} \\ ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39} \end{cases} \Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac \vdots (2^{15}\cdot 2^{17}\cdot 2^{23}) \Leftrightarrow (abc)^2 \vdots 2^{55} \Rightarrow abc \vdots 2^{28}$$

$a = 2^{a_2}\cdot 7^{a_7}$

$b = 2^{b_2}\cdot 7^{b_7}$

$c = 2^{c_7}\cdot 7^{c_7}$

$a_2+b_2+c_2 \geq 28$

$(abc)^2 \vdots (7^{11}\cdot 7^{18}\cdot 7^{39}) \Leftrightarrow (abc)^2 \vdots 7^{68} \Rightarrow abc \vdots 7^{34}$, но $ac \vdots 7^{39}$

Тогда $abc \vdots 7^{39}$

$a_7+b_7+c_7 \geq 39$

$abc = 2^{a_2+b_2+c_2}\cdot 7^{a_7+b_7+c_7} = 2^{28}\cdot 7^{39}$ — минимально возможное значение.

Пример: $a = 2^{10}\cdot 7^{16}$

$b = 2^5\cdot 1$

$c = 2^{13}\cdot 7^{23}$

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

(!) $\frac{ab}{a+b} \notin \mathbb{Z}$, a,b - взаимно простые

$a = k \cdot n$, k - простое

$$\begin{cases} ab \vdots k \\ a \vdots k \\ b \not\vdots k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \vdots k \\ a+b \not\vdots k \end{cases}$$ - и так для любого простого K

Получается что ~~ab и~~ ab и a+b взаимно просты, $ab \neq 1$, $a+b \neq 1$

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь $\Leftrightarrow$ a,b - взаимно простые

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cancel{9ab}\,(a+b)^2-9ab \vdots a+b \Leftrightarrow 9ab \vdots a+b \Leftrightarrow 9 \vdots a+b$$

Если взять за $m = a+b$, то это макс. число на которое можно сократить дробь т.к. в числителе остаётся 1.

$$\begin{cases} 9 \vdots m \\ m - \text{макс.} \end{cases} \Rightarrow m = 9$$

Пример: $a=4$, $b=5$

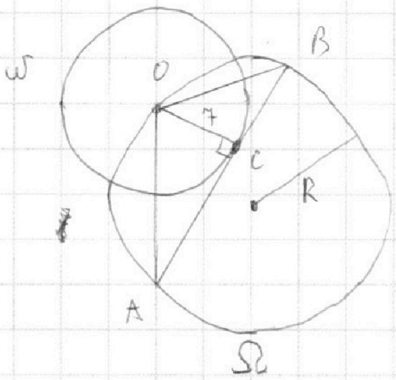
Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



$OC = 7$

$R = 13$

$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$

$OC \perp AB$ т.к. AB - касат. ω

$\begin{cases} \frac{AC}{BC} = \frac{17}{7} \\ AC + BC = AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC = \frac{17}{24} AB \\ BC = \frac{7}{24} AB \end{cases}$

$\triangle AOB$ вписан в Ω. Площадь $\triangle AOB$ $S = \frac{AB \cdot AO \cdot OB}{4R}$

$AO = \sqrt{7^2 + AC^2} = \sqrt{49 + \frac{17^2}{24^2} AB^2}$

$BO = \sqrt{7^2 + BC^2} = \sqrt{49 + \frac{7^2}{24^2} AB^2}$

$S = \frac{OC \cdot AB}{2} = \frac{7AB}{2}$

$\frac{AB \cdot AO \cdot BO}{4R} = S = \frac{7AB}{2} \Leftrightarrow AO \cdot BO = 14R \Leftrightarrow \sqrt{49 + \frac{17^2}{24^2} AB^2} \sqrt{49 + \frac{7^2}{24^2} AB^2} = 14 \cdot 13 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB = 24$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}\right)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)=$$

$$=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right) \Leftrightarrow (3x^2-6x+2)-(3x^2+3x+1)=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-9x=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1 \end{array}\right.$$

При $x=\frac{1}{9}$, $\begin{cases} 3x^2-6x+2\geq 0 \\ 3x^2+3x+1\geq 0 \end{cases}$

$$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2-6x+2}\leq 1 \\ \sqrt{3x^2+3x+1}\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+2\leq 1 \\ 3x^2+3x+1\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+1\leq 0 \\ 3x^2+3x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\leq 0 \\ x(x+1)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[\frac{3-\sqrt{6}}{3};\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right] \\ x\in[-1;0] \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

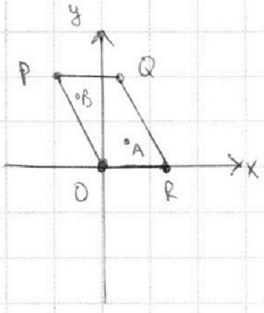
$$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1 \Rightarrow x\in\varnothing$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{9}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0;0)$
$P(-13;26)$
$Q(3;26)$
$R(16;0)$
$A(x_1,y_1)$
$B(x_2,y_2)$

$A,B \in PORQ \Rightarrow 0 \le y_1, y_2 \le 26$

$PO:\ y=-2x$

$QR:\ y=-2x+32$

$$A,B \in PORQ \Rightarrow \begin{cases} y_2 \le -2x_2+32 \\ y_1 \le -2x_1+32 \\ y_1 \ge -2x_1 \\ y_2 \ge -2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2 \le y_2 \le -2x_2+32 \\ -2x_1 \le y_1 \le -2x_1+32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y_2+2x_2 \le 32 \\ 0 \le y_1+2x_1 \le 32 \end{cases}$$

$$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14 \Leftrightarrow 2x_2+y_2=14+2x_1+y_1$$

$$0 \le y_2+2x_2 \le 32 \Leftrightarrow 0 \le y_1+2x_1+14 \le 32 \Leftrightarrow -14 \le y_1+2x_1 \le 18$$

$$0 \le y_1+2x_1 \le 32 \Leftrightarrow 0 \le y_2+2x_2-14 \le 32 \Leftrightarrow 14 \le y_2+2x_2 \le 46$$

$$\begin{cases} 0 \le y_1+2x_1 \le 32 \\ -14 \le y_1+2x_1 \le 18 \\ 0 \le y_2+2x_2 \le 32 \\ 14 \le y_2+2x_2 \le 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y_1+2x_1 \le 18 \\ 14 \le y_2+2x_2 \le 32 \end{cases}$$

Необходимо найти кол-во способов выбрать $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что:

$$\begin{cases} 0 \le y_1+2x_1 \le 18 \\ 14 \le y_2+2x_2 \le 32 \\ 0 \le y_1, y_2 \le 26 \\ 2x_2+y_2 = 14+2x_1+y_1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

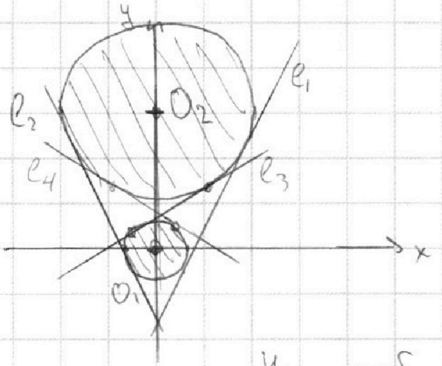
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0 \end{cases}$$

Отметим на коорд. плоскости мн-во точек, которое задаётся по превому: $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2\leq 1 \\ x^2+(y-12)^2\leq 16 \end{array}\right.$



Это мн-во представляет собой два круга с центрами $O_1(0;0)$, $O_2(0;12)$ и радиусами $1; 12$ соотв.

Если $A(x;y)$ попадает в мн-во, то $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leq 0$

M – мн-во

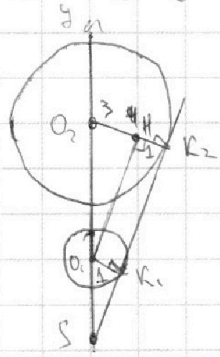
$ax+y-8b=0 \Leftrightarrow y=-ax+8b$ – прямая, l. ~~Если~~

Если $A(x,y)\in l, M$, то для x,y выполняется система из усл.

Нам необх. чтобы система имела лишь 2 реш. $\Leftrightarrow$ l пересекает M только в двух точках.

Все такие прямые отмечены на рисунке.

Найдем $tg\,\angle$ угла наклона l_1.



K_2, K_1 – соотв. точки касания. $O_1H \perp O_2K_2$

$O_1K_1K_2H$ – прямоугольник $\Rightarrow HK_2=1 \Rightarrow O_2H=3$

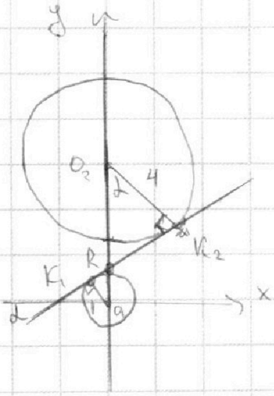
$O_1H=\sqrt{O_1O_2^2-O_2H^2}=\sqrt{144-9}=3\sqrt{15}$

$tg\angle O_2O_1H=\frac{3}{3\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15} \Rightarrow ctg\angle O_2O_1H=\sqrt{15}$

$O_1H \parallel K_1K_2 \Rightarrow O_1H, K_1K_2$ имеют одинак. углы наклона к оси абсцисс. $tg\angle = ctg\angle O_2O_1H=\sqrt{15}$

Тангенс угла наклона прямой равен коэф. стоящему при x.

$a_1=\sqrt{15}$. В силу симметрии l_2 имеет коэф. $a_2=-a_1=-\sqrt{15}$



Найдем $tg\angle$ для l_3. $\triangle K_1O_1R \sim \triangle K_2O_2R$

$$\begin{cases} \frac{O_2R}{O_1R}=\frac{O_2K_2}{O_1K_1} \\ O_1R+O_2R=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} O_2R=\frac{48}{5} \\ O_1R=\frac{12}{5} \end{cases}$$

$RK_2=\sqrt{\frac{48^2}{5^2}-4^2}=\sqrt{\frac{48^2-20^2}{5}}=\frac{4}{5}\sqrt{119}$

$tg\angle=tg\angle RO_2K_2=\frac{RK_2}{O_2K_2}=\frac{\frac{4}{5}\sqrt{119}}{4}=\frac{\sqrt{119}}{5}=a_3$

Коэф. в уравнении l_4 $a_4=-a_3=-\frac{\sqrt{119}}{5}$ в силу симметрии

Получилось 4 знач. параметра a, для каждого из которых можно найти подходящее b. Для $a=\pm\sqrt{15}$, $b=-O_1S$, для $a=\pm\frac{\sqrt{119}}{5}$, $b=O_1R$

Ответ: $\left\{\pm\sqrt{15}; \pm\frac{\sqrt{119}}{5}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$

$bc : 2^{14} \cdot 7^{18}$

$ac : 2^{22} \cdot 7^{39}$

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-6x+2-3x^2-3x-1}{\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}} = 1-9x \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \end{array}\right.$

$3x^2+3x+1$ $\qquad \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

$3 \cdot \dfrac{1}{4} - 3 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$ $\qquad \dfrac{3}{4} + 3 + 2$

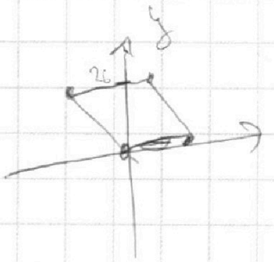
$\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ $\quad \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ $\quad x$

$\dfrac{6}{6}$

$3x^2+3x+1 \geq 1 \Leftrightarrow 3x^2+3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \geq 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-3}}{3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$ $\qquad x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$

$3x^2-6x+2 \geq 1 \Leftrightarrow 3x^2-6x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{6}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$



$0 \leq y \leq 26$

$~~y = -2x~~$

$~~y \geq -2x~~$

$-2x \leq y \leq -2x+32$

$26 = -13c \Leftrightarrow c = -2$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \Leftrightarrow 2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$

$0 \leq y_1 \leq 26$

$0 \leq y_2 \leq 26$

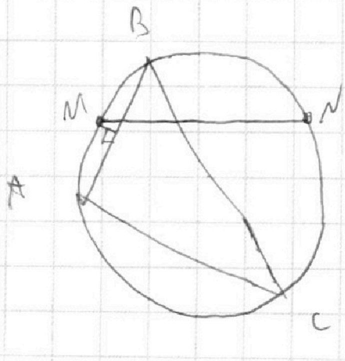
$-2x_1 \leq y_1 \leq -2x_1+32$

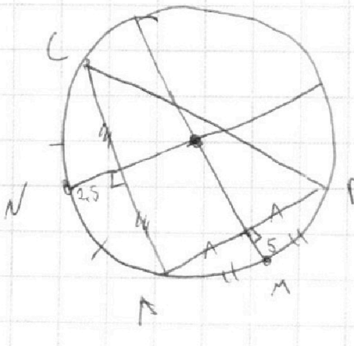
$-2x_2 \leq y_2 \leq -2x_2+32 \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 \leq y_1+2x_1 \leq 32 \\ 0 \leq y_2+2x_2 \leq 32 \end{array} \Leftrightarrow$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 \leq 40$

$14 - 2x_1 \leq 40 \Leftrightarrow x_1 \geq -13$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1+2x_1 \leq 32 \\ -14 \leq y_1+2x_1 \leq 18 \end{cases} \Leftrightarrow$





$0 \leq y_1+2x_1 \leq 18$

$14 \leq y_2+2x_2 \leq 32$

$0 \leq y_1 \leq 26$

$0 \leq y_2 \leq 26$

$2x_2+y_2 = 2x_1+y_1+14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

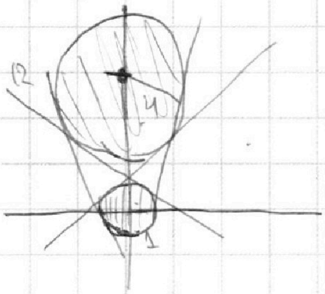
1 2 3 4 5 6 7

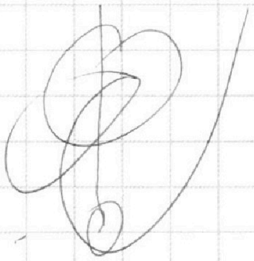
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

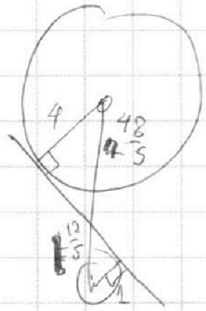
$ax+y-8b=0$

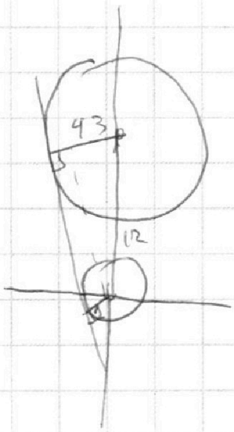
$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0$

$y=-ax+8b$







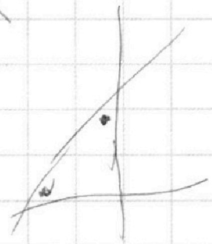


$144-9=135=9\cdot 15$

$3\sqrt{15}$

$tg\,\beta = \frac{\sqrt{15}}{15}$

$\frac{\sin(\pi-\beta)}{\cos(\pi-\beta)} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = ctg = \sqrt{15}$



$68\cdot 28 = 4\cdot 40\cdot 7\cdot 17$

$17\cdot 7 = 119$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{\frac{a}{b}}{a-7b+\frac{b^2}{a}}$

ab

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}\right)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)=$

$=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right) \Leftrightarrow 3x^2-6x+2-(3x^2+3x+1)=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-9x=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-9x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}\\ \sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1\end{array}\right.$

При $x=\frac{1}{9}$, $\begin{cases}3x^2-6x+2\geq 0\\ 3x^2+3x+1\geq 0\end{cases}$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{3x^2-6x+2}\leq 1\\ \sqrt{3x^2+3x+1}\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-6x+2\leq 1\\ 3x^2+3x+1\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-6x+1\leq 0\\ 3x^2+3x\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{$

$b_2=5$

$a_2=10$

$C_2=13$

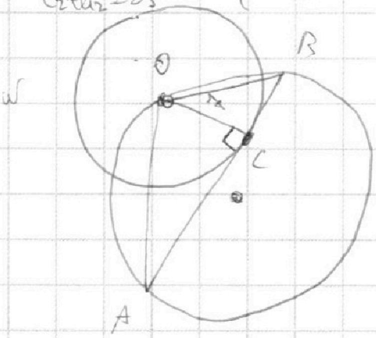
14
17
119
17
289

$a_2+b_2=15$
$b_2+c_2=17 \Leftrightarrow \begin{cases}a_2+b_2=15\\ a_2-b_2=5\end{cases}$
$c_2+a_2=23$

$AO=\sqrt{49+AC^2}$

$BO=\sqrt{49+BC^2}$

14
13
42
14
182



Ω

$S=\frac{7\cancel{AB}}{2}=\frac{\sqrt{49+AC^2}\sqrt{49+BC^2}\cancel{AB}}{24\cdot 13} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 182=\sqrt{49+AC^2}\sqrt{49+BC^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 182=\sqrt{49+\frac{17^2}{24^2}AB^2}\cdot\sqrt{49+\frac{7^2}{24^2}AB^2}=$

$\Leftrightarrow 26\cdot 24=\sqrt{49+\frac{17^2}{24^2}AB^2}\sqrt{24^2+AB^2}$

338 | 2
169 | 13

$C=7^{18}\cdot 2^{17}$

$b=1$

$a=$

$a^2b^2c^2 : 2^{15}7^4\cdot 2^{17}\cdot 7^{18}\cdot 2^{23}\cdot 7^{33} \Leftrightarrow (abc)^2 : 2^{55}7^{68} \Leftrightarrow abc : 2^{28}\cdot 7^{34}$

a_2c_2

$a=2^{10}\cdot 7^{16}$

$b=2^5\cdot 1$

$c=2^{13}\cdot 7^{23}$

$a_2+c_2=23$

$a_2+b_2=15$

$b_2+c_2=17$

$a+b+c=28$

$a_2=11$

$b_2=5$

$c_2=12$

$a=2^{11}\cdot 7^{16}$

$b=2^5$

$c=2^{12}\cdot 7^{23}$

$abc=$

$a_7+b_7+c_7=34$

$a_7+b_7=11$

$c_7=23$

$a_7=16$

$b_7=0$