



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Дано: $a = 2^x \cdot 7^k \cdot \alpha$, где α , β и γ - множители, не содержащие 2 и 7 .

Также: $b = 2^y \cdot 7^l \cdot \beta$
 $c = 2^z \cdot 7^m \cdot \gamma$ (2 и 7 - непримитивные единицы)

Тогда из условия:

$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \Rightarrow x+y \geq 14 \\ bc &: 2^{17} \Rightarrow y+z \geq 17 \quad (1) \\ ca &: 2^{20} \Rightarrow z+x \geq 20 \end{aligned}$$

Аналогично для β -ии:

$$\begin{aligned} ab &: 7^{10} \Rightarrow k+l \geq 10 \\ bc &: 7^{17} \Rightarrow l+m \geq 17 \quad (2) \\ ca &: 7^{37} \Rightarrow k+m \geq 37 \end{aligned}$$

После abc есть ограничения, степени вхождения
 2 и 7 в это произведение должны быть нечетными
 $(\Rightarrow x+y+z \rightarrow \min \text{ и } k+l+m \rightarrow \min)$, а α , β и γ
>принимают наименьшее возможное значение - 1.

$$x+z \geq 30 \Rightarrow x+y+z \geq 30, \text{ т.н. } x, y, z \geq 0$$

~~составляющая суммы~~ $x=14, z=17$

$$x+y+z \geq 31 \quad - \text{ если сумма } x+z=30, \text{ то } y \geq 1,$$

$$\text{тогда } x+y+z \geq 31; \text{ если сумма } x+z=31, \text{ то } y \geq 0,$$

$$\text{тогда } x+y+z \geq 31, \text{ если сумма } x+z=31, \text{ то } x+y+z \geq 31$$

$$\Rightarrow \text{минимальное значение для } x+y+z = 31$$

и получается при $x=14, z=17, y=0$, поэтому первое
>все ограничения (1).

Аналогично для β -ии:

$$\begin{aligned} k+m &\geq 37 \Rightarrow k+m+l \geq 37. \quad 37 \text{ достигается при} \\ k &= 10, l=0, m=27, \text{ что удовлетворяет (2).} \end{aligned}$$

Значит, наименьшее возможное значение для abc:

$$2^{10} \cdot 7^0 \cdot 7^{27} \cdot 2^{14} \cdot 2^0 \cdot 2^{17} = 7^{37} \cdot 2^{31}$$

Ответ: $abc = 2^{31} \cdot 7^{37}$ - наименьшее значение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$\frac{a}{b}$ - несократима, $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$.

Умножим и уменьшим обеи
на m , $\Rightarrow ab = km$,
 $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{ab}{a^2 - 6ab + b^2} \quad \text{можно сократить}$$

$$\text{Тогда } \frac{ab}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{ab}{a^2 + 2ab + b^2 - 8ab} = \frac{ab}{(a+b)^2 - 8ab} = \frac{km}{(km)^2 - 8ab}$$

$\Rightarrow 8ab : m$. Заметим, что $\text{НОД}(a, m) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(b, m) = 1$,

т. к. иначе $\text{НОД}(a, m) = t \Rightarrow a+b = k \cdot m$
(аналогично для $\text{НОД}(b, m) = t$)

$$: t \quad : t \Rightarrow b : t \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = t$
- противоречие

\Rightarrow максимальное значение для $m = 8$.

То есть, выполним проверку для $a=1$ и $b=7$.

$$\begin{array}{r} 1+7 \\ \hline (1+7)^2 - 8 \cdot 7 \\ : 8 \quad : 8 \end{array}$$

Ответ: $m = 8$ - максимальное значение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

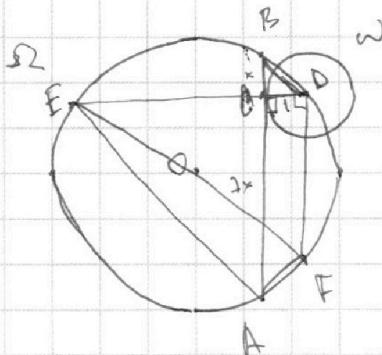
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3.



Дано:

1) D - центр ω , E окр. Δ

$$AC \cdot CB = 7$$

$$r(\omega) = 1$$

$$R(\Delta) = 5$$

$$AB = ?$$

Решение:
Пусть $BC = x$, тогда
 $CA = 7x$ (из отмечено)
Прямая DC со пересечением с Δ в F .

$$\begin{aligned} \angle ABD &= \angle AED = \frac{1}{2} \angle CAD \\ &\text{как вписанные углы} \\ \Rightarrow \triangle CEA &\sim \triangle CBD \text{ по 2-м углам} \\ \angle ECA &= \angle BCD = 90^\circ \\ \text{тк } BA &- \text{касательная к } \omega \text{ в } C \end{aligned}$$
$$\Rightarrow BC \cdot CA = EC \cdot CD$$

(из подобия)

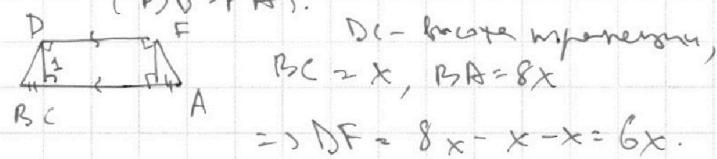
$$\Rightarrow 7x^2 = EC \cdot 1 \Rightarrow EC = 7x^2$$

Найдем $DF \parallel BA$
 $DF \parallel BA \Rightarrow DF \perp ED$ ($\angle BAE = \angle LED$)

$DF \parallel BA$ ~~направление~~ \rightarrow

$\Rightarrow BDFA$ - п/з трапеция

$$(BD = FA).$$



$$\Rightarrow DF = 8x - x - x = 6x.$$

$\angle EDF = 90^\circ$ (из отмечено) и

биссектрисы, $\Rightarrow EF$ - гипотенза Δ

По теореме Пифагора: $ED^2 + DF^2 = EF^2$

$$(7x^2 + 1)^2 + (6x)^2 = (5 + 5)^2$$

$$49x^4 + 14x^2 + 1 + 36x^2 = 100$$

$$49x^4 + 52x^2 - 99 = 0$$

$$(x^2 - 1)(49x^2 + 99) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1; AB = 8x = 8$$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\text{Пусть } 2x^2 - 5x + 3 = a, \quad 2 - 7x = b.$$

Тогда:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b \Rightarrow a \geq 0; \quad a \geq b$$

$$\sqrt{a} - b = \sqrt{a-b} \quad |^2$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b^2 = a - b$$

$$b^2 - 2\sqrt{ab} = -b$$

$$1) b = 0 \quad \text{-нр.} \quad 2) b \neq 0$$

$$1) b = 0 \quad 2 - 7x = 0 \quad x = \frac{2}{7} \quad \text{-нр.}$$

$$2) b \neq 0$$

$$b - 2\sqrt{a} = -b$$

$$b + b = 2\sqrt{a}$$

$$b^2 + 2b + 1 = 4a$$

$$4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) = (2 - 7x)^2 + 2 \cdot (2 - 7x) + 1$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 4 - 14x + 49x^2 + 4 - 14x + 1$$

$$41x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$D = 64 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 64 + 492 = 556 = 4 \cdot 139$$

$$x_1 = \frac{8 - 2\sqrt{139}}{82} \quad \text{-нр.} \quad \frac{8 - 2\sqrt{139}}{41} < \frac{3}{7}$$

$$x_2 = \frac{8 + 2\sqrt{139}}{82} \quad \text{-нр.} \quad 28 - 7\sqrt{139} < 123 \quad \text{-нр.}$$

$$\frac{4 - \sqrt{139}}{41} < \frac{3}{7} \quad 1$$

$$4 + \sqrt{139} < 41$$

$$\sqrt{139} < 37$$

$$139 < 37^2 \quad \text{-нр.}$$

$$\frac{4 + \sqrt{139}}{41} > \frac{3}{7}$$

$$7\sqrt{139} > 95 \quad \text{-нр.}$$

$$\Rightarrow x_2 < \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \text{нр.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

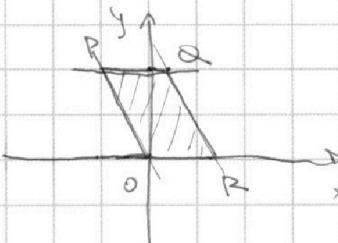


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12.$$

Для решения задачи не тривиальны
задаются следующими неравенствами:

$$y \geq 0 \quad y \leq 2x$$

(ниже OR) (выше PQ)

$$y \leq 3x - 2x \quad y \geq -2x$$

(ниже QR) (выше PO)

\Rightarrow возможные точки A и B

получают верхнюю
сторону неравенствам.

$$2x + y \leq 3x$$

$$2x + y \geq 0$$

Или же

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12$$

$$\begin{array}{cc} \text{II} & \text{VI} \\ 3x & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{II} & \text{VI} \\ 3x & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 3x ; 0 \leq 2x_1 + y_1 \leq 28$$

- При каких значениях $2x_2 + y_2$ возможна отсечка
линии $2x_1 + y_1$.

Возможные выборы $2x_1 + y_1 = 28$ (от 0 до 28 включительно)

Или же, если $2x_1 + y_1 = t$, то $y_1 = t - 2x_1$, $t \in [0, 28]$
и выше

$\Rightarrow x_1 \in [0, 14]$ и выше.

На рисунке отмечены прямые $y = t - 2x$,
ограниченные параллельными линиями 13 точек,
одинаково расположенные вертикально. (Учитывая, что от 0 до 28
включительно с шагом 2.)

Значит, способов выбрать значение t для

$2x_1 + y_1 = 28$, выбрать такие x_1 и y_1 - 13 способов,

а каждая из них x_1 и y_1 - тоже 13 способов,

итаки все способы $28 \cdot 13 \cdot 13$.

Ответ: бесконечно многих пар точек $28 \cdot 13^2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

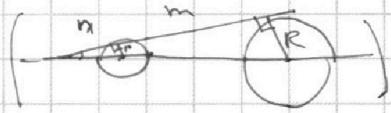
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \sqrt{R^2 + (n+m)^2} - \sqrt{R^2 + m^2} = 8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{n+m} = \frac{R}{n} = \frac{2}{n+m} = \frac{1}{n}$$



$$\Rightarrow 2n = n+m \Rightarrow n = m$$

$$\sqrt{4 + 4m^2} - \sqrt{1 + m^2} = 8$$

$$2\sqrt{1+m^2} - \sqrt{1+m^2} = 8$$

$$\sqrt{1+m^2} = 8$$

$$1+m^2 = 64 \quad m = \sqrt{63}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n} = \frac{1}{\sqrt{63}} = a$$

4) Приведем кратчайшее отстояние от x ,

$$\Rightarrow a = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\text{Ответ: } a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}, \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{63}}, \quad a_3 = \frac{3}{\sqrt{55}}, \quad a_4 = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

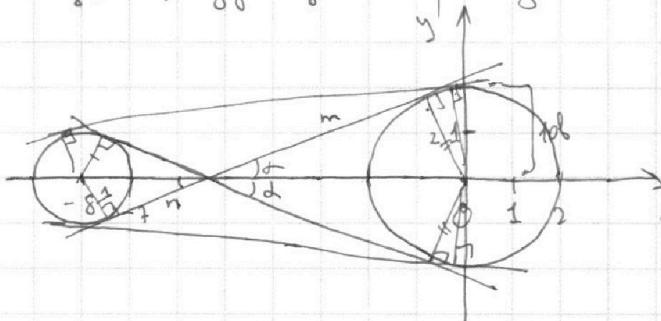
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Запомни, что в таком виде неравенство системы решается
в две следующие части.



Ограничения: $(x+8)^2 + y^2 - 1 = n^2$
 $x^2 + y^2 - 4 = R^2$

При этом нам приходится
также, исключить внутреннюю
окружность и не включать
окружности.

(Поверхность внутренней
окружности не ограничена
законом y соотв. склон.,
тогда на окружности
закон ограничения склонов = 0.)

Значит, первое неравенство задает прямую
 $y = ax + 10b$. Но уравнение y этой прямой и двух
окружностей должны быть одновременно

(чтобы быть для решения). Значит, эта прямая
должна касаться концов из этих двух окружностей.
Значит, где а есть бары \neq вспомогательное.

$a = \operatorname{tg} \alpha$ (Значит, что в краткое подобрано: см. рисунок.)

1) Для первого неравенства:

$$\sqrt{r^2 + m^2} + \sqrt{R^2 + b^2} = 8$$

Из первого неравенства:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{m} = \frac{1}{n} \quad 2n = m$$

$$\sqrt{4 + 4n^2} + \sqrt{1 + n^2} = 8$$

$$2 \cdot \sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+n^2} = 8$$

$$3 \cdot \sqrt{1+n^2} = 8 \quad 1+n^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{55}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$n = \sqrt{7 \frac{1}{3} - 1}$$

И первое неравенство ограничено ох

$$\Rightarrow a = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

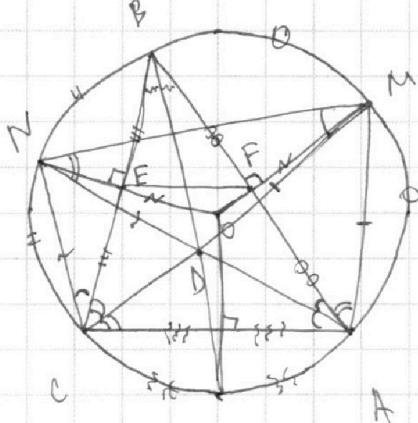
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7.



AD?

$$MF = 4,5; NE = 2$$

Решение -

$$MF^2 + FA^2 = MA^2$$

$$NE^2 + EC^2 = NC^2 \quad (\text{по Пифагору})$$

$$BF \cdot FA = FM \cdot (2R - FM) \quad (\text{пересечение хорд})$$

$$BSE \cdot EC = NE \cdot (2R - NE)$$

$$4,5^2 + FA^2 = MA^2$$

$$2^2 + EC^2 = NC^2$$

$$FA^2 = 4,5 \cdot (2R - 4,5)$$

$$CE^2 = 2 \cdot (2R - 2)$$

$$4,5^2 + 4,5^2 + 4,5 \cdot 2R = MA^2$$

$$2^2 + 2^2 + 4R = NC^2$$

$$MA^2 = 9R$$

$$NC^2 = 4R$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{MA}{NC} \quad (\text{из подобия } \triangle CMN \text{ и } \triangle DMA)$$

$$\frac{AD^2}{CD^2} = \frac{MA^2}{NC^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow AD : CD = 3 : 2$$

$$2AD = 3CD$$

□ DEBF - вписанный, (т.к.)

$\angle OEB = 90^\circ$ и $\angle BFO = 90^\circ$ - прямые перпендикульры

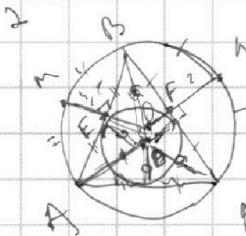
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



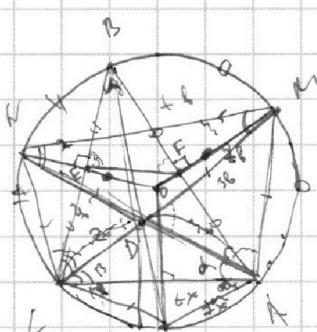
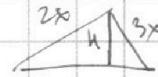
$$AB = 4,5$$

$$\text{os} \approx 2 \Rightarrow AB = 4,5$$

$$AC = 2$$

$$ME = 4,5$$

$$NF = 2$$

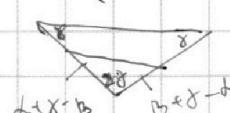


$$MD \cdot CN = ND \cdot DA$$

$$MF + FO = NE + EO$$

$$4,5 + FO = 2 + EO$$

$$2 + \beta + \gamma = 90^\circ$$



$$2x + x + 3x = 180^\circ$$

$$6x = 180^\circ$$

$$x = ?$$

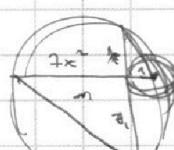
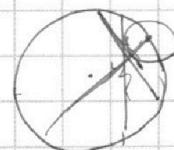
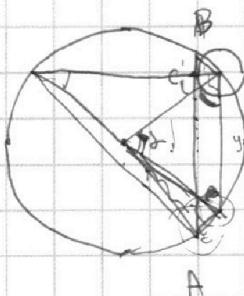
$$(4,5)^2 + (-\alpha)^2 = (+)^2$$

$$2^2 + (-\alpha)^2 = (-\beta)^2$$

$$(-\alpha)^2 = 4,5^2 \cdot (2R - 4,5)$$

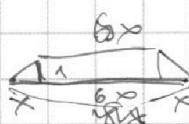
$$(-\alpha)^2 = 2 \cdot (2R - 2)$$

$$\text{or } (-\beta) \cdot AD = CD \cdot (+)$$



$$8x < 10$$

$$8x > 0$$



$$(x, (1+7x^2)^2 + y^2 = 100)$$

$$1 + 14x^2 + 49x^4 + 36x^2 = 100$$

$$x = 1 \quad x = -1$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \quad (x-1)(49x^2+99)=0$$

$$49x^2 + 99 = 0$$

$$\therefore 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

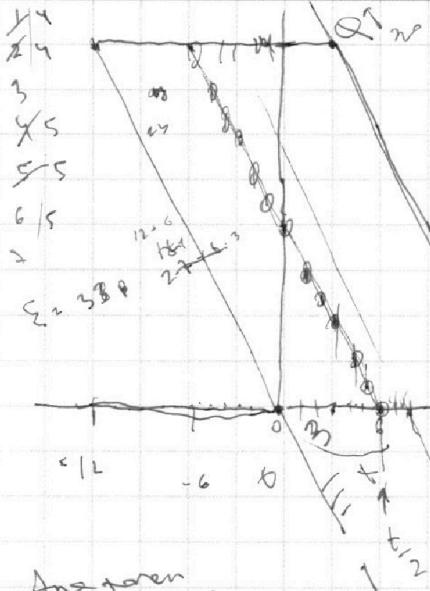
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Analogem
dannem form
anwendung:

$$y \leq 2x - 2x_0$$

$$y \geq 2x - 2x_0$$

$$\frac{64}{3} = 7\frac{1}{3} = 6\frac{1}{3}$$

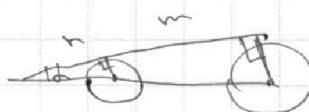
$$y \geq 0 \quad y \leq 2x$$

$$y \geq -2x$$

$$\rightarrow y \geq 0 \quad y + 2x \leq 2x_0$$

$$y \leq 2x \quad y + 2x \geq 0$$

Следовательно неравенство $2x + y = t$:



$$y = 12 - 2x$$

(3 km).

$$y = 0 - 2x$$

\rightarrow to 13 вероятн.

6. In 6 m, сумма

номер.

в квадрате - 2 км в квадрате

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - y + 10 = 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$(x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1) \leq 0$$

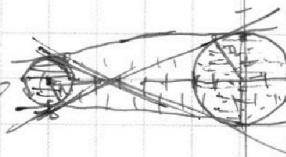
$$(x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$t \leq 11$$

$$y = 6x + 10$$



Любое из них Квадрат

11

11

11

11

11

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

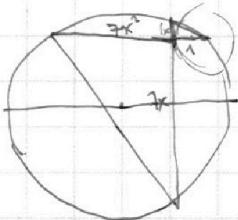
$$1) a, b, c - \text{нав.} ab = 2^{14}7^{10}, bc = 2^{14}7^{12}, ac = 2^{20}7^{22}$$

$$\begin{array}{r} \times \\ 2^2 \\ \times \\ 2^2 \\ \hline 2^2 \end{array} \quad \min abc - ?$$

$$\begin{array}{r} \times \\ 2^2 \\ \times \\ 2^2 \\ \hline 2^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+y \geq 14 \\ y+z \geq 17 \\ z+x \geq 20 \end{array} \quad \begin{array}{l} k+l \geq 10 \\ l+m \geq 17 \\ k+m \geq 37 \end{array}$$

$$\min x+y+z - ? \quad \min k+l+m - ?$$



$$z+x \geq 20$$

$$\Rightarrow y = m+k$$

$$x+2y+z \geq 31$$

$$\Rightarrow y \geq 1$$

$$\min y = ?$$

$$x+y = ?$$

$$x=14 \quad z=16 \quad y=1$$

$$k+m \geq 37$$

$$k+2l+m \geq 23$$

$$l=r=2$$

$$37=16+23$$

$$37=16+21$$

$$k=10 \quad r=10$$

$$m=27 \quad r=2$$

$$k+m=37$$

2) $\frac{a+b}{ab}$ $\text{некон} (\text{анф} \in \text{Матем})$

$$\frac{a+b}{a^2 - bab + b^2}$$

$$a \approx b$$

анф в некон док.

$$\max m \text{ при } ab = 1$$

$$ab = m$$

$$a^2 - bab + b^2 = m$$

$$ab = m \quad ab = m$$

$$m \leq m \leq m$$

$$\Rightarrow abc \text{ нкн}$$

$$2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 7$$

$$8abc : m \Rightarrow m = 8abc$$

$$abc = 8abc$$

м в а некон
некон збуж
демонстрирует

$$\Rightarrow m = 8$$

$$a=b=8k$$

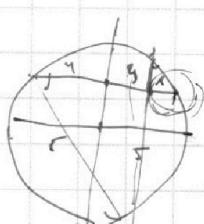
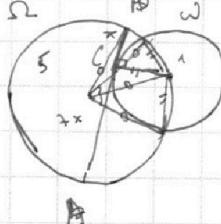
$$8k \cdot 8k \cdot 8k = 8abc$$

$$\frac{8k}{8k} \cdot \frac{8k}{8k} \cdot \frac{8k}{8k} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

$$\frac{BC}{CA} = \frac{1}{7} \quad \angle BCA = \angle CA$$

$$\frac{BC}{CB} = \frac{EC}{CA} \quad \frac{BC}{CA}$$

3. Ω B ω $HB - ?$



$$1 - \frac{\alpha}{2\pi} x^2$$

$$45x^2 - 45x^2$$

$$45x^2 - 45x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$
$$\frac{\cancel{x^2} - 5x + 3}{\cancel{x^2} + 2x + 1} = 2 - 7x$$
$$-7x = 2 - 7x$$
$$0 = 2$$
$$x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b$$

$$\frac{\cancel{x^2} - 5x + 3}{\cancel{x^2} + 2x + 1} = 2 - 7x$$
$$-7x = 2 - \frac{2}{7}$$
$$-7x = \frac{12}{7}$$
$$x = -\frac{12}{49}$$

$$\sqrt{a} + b = \sqrt{a+b}$$

$$b = 0 \quad \text{т.к. } 7x = 2 \quad x = \frac{2}{7}$$

$$a + 2\sqrt{ab} + b^2 = a+b$$

$$12 \cancel{x^2} + 48x + 144 = 49x + 49$$
$$12x^2 + 48x + 95 = 49x$$
$$12x^2 - x - 95 = 0$$

$$2\sqrt{ab}b + b^2 = -b$$

$$2\sqrt{a^2} + b = -b$$

$$2\sqrt{a} - (b+1) = -b$$

$$b+1 \leq 0 \quad \text{так как } 3-7x \leq 0$$

$$4a^2 = 4x^2 + 2b^2 + b^2$$

$$7x \geq 2$$

$$x \geq \frac{2}{7}$$

$$4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) = 2 + 2 \cdot (2 - 7x) + (2 - 7x)^2$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 1 + 4 - 14x + 4 - 28x + 49x^2$$

$$0 = 41x^2 - 42x - 3$$

$$-\frac{9}{8} \cancel{x^2} \quad \frac{2}{41} \cancel{x^2} \quad \frac{1}{41} \cancel{x^2}$$

$$41x^2 - 42x - 3 = 0$$

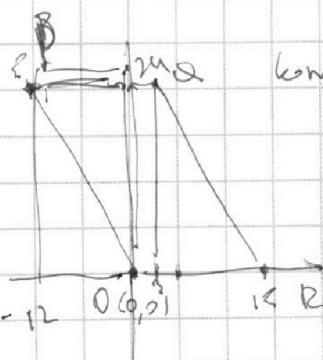
$$\Delta = 22^2 - 4 \cdot 41 \cdot 3 = 484 + 484 = 968 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x_1 = \frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} \quad x_2 = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{82}$$

$$\frac{22 + 4\sqrt{61}}{41} \quad x = \frac{3}{7}$$

$$-\frac{12}{8} \cancel{x^2} \quad \frac{2}{41} \cancel{x^2} \quad \frac{1}{41} \cancel{x^2}$$

$$14\sqrt{61} > 46 \quad 8\sqrt{61} > 7$$



координаты точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

$x_1 y_2 - y_1 x_2 = 12 > \sqrt{135} > 12$
точка наружу

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\frac{13}{41} \cancel{x^2} \quad \frac{12}{41} \cancel{x^2} \quad \frac{12}{41} \cancel{x^2}$$

$$2 \cdot \frac{y_1 - 10}{7} + 12 = 12$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\frac{13}{41} \cancel{x^2} \quad \frac{12}{41} \cancel{x^2} \quad \frac{12}{41} \cancel{x^2}$$

$$+\frac{8}{41} \cancel{x^2} + \frac{20}{41} \cancel{x^2}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\frac{13}{41} \cancel{x^2} \quad \frac{12}{41} \cancel{x^2} \quad \frac{12}{41} \cancel{x^2}$$

$$\frac{41}{41} \cancel{x^2}$$

$$8 \cdot 2 \cdot 4 = 64$$

$$-12 \quad 8$$

$$\frac{12}{41} \cancel{x^2}$$

$$\frac{8 \cdot 2 \sqrt{135}}{2 \sqrt{135}}$$

$$\frac{12}{135}$$

$$\frac{16}{\sqrt{135}}$$

$$-12 \quad 8$$

$$\frac{12}{41} \cancel{x^2}$$