МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1.

Давайте рассмотрим в каких степенях 2 и 7 входят в a, b и c.

Пусть: $a = 2^x \cdot 7^k \cdot \alpha$, где α, β и γ – множители, не содержащие 2 и 7.
$b = 2^y \cdot 7^l \cdot \beta$
$c = 2^z \cdot 7^m \cdot \gamma$ (2 и 7 – взаимнопростые числа)

Тогда из условия:
$ab : 2^{14} \Rightarrow x + y \geq 14$
$bc : 2^{17} \Rightarrow y + z \geq 17$ (1)
$ca : 2^{20} \Rightarrow z + x \geq 30$

Аналогично для 7-ки:
$ab : 7^{10} \Rightarrow k + l \geq 10$
$bc : 7^{17} \Rightarrow l + m \geq 17$ (2)
$ca : 7^{37} \Rightarrow k + m \geq 37$

Чтобы abc было минимальным, степени вхождения 2 и 7 в это число должны быть минимальными ($\Rightarrow x+y+z \to \min$ и $k+l+m \to \min$), α, β и γ принимают наименьшее возможное значение – 1.

$x + z \geq 30 \Rightarrow x + y + z \geq 30$, т.к. $x, y, z \geq 0$
~~достигается при $x = 14$, $z = 17$~~

$x + y + z \geq 31$ – если сумма $x + z = 30$, то $y \geq 1$, тогда $x + y + z \geq 31$; если сумма $x + z = 31$, то $y \geq 0$, тогда $x + y + z \geq 31$; если сумма $x + z > 31$, то $x+y+z > 31$
$\Rightarrow$ минимальное значение для $x + y + z = 31$
и достигается при $x = 14$, $z = 17$, $y = 0$, удовлетворяющих всем неравенствам (1).

Аналогично для 7-ки:
$k + m \geq 37 \Rightarrow k + m + l \geq 37$. т.к. $k, m, l \geq 0$ 37 достигается при $k = 10$, $l = 0$, $m = 27$, что удовлетворяет (2).

Значит, наименьшее возможное значение для abc:
$7^{10} \cdot 7^0 \cdot 7^{27} \cdot 2^{14} \cdot 2^0 \cdot 2^{17} = 7^{37} \cdot 2^{31}$

Ответ: $abc = 2^{31} \cdot 7^{37}$ – наименьшее значение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2.

$\frac{a}{b}$ - несократима, $\Rightarrow$ НОД$(a, b) = 1$.

Числитель и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ можно сократить на m, $\Rightarrow$ $a+b = km$, $k \in \mathbb{N}$

Тогда $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = \frac{km}{(km)^2-8ab}$

$\Rightarrow$ $8ab \,\vdots\, m$. Заметим, что НОД$(a, m) = 1$ и НОД$(b, m) = 1$, т.к. иначе. НОД$(a, m) = t$ $\Rightarrow$ $\underset{\vdots t}{a} + b = \underset{\vdots t}{k \cdot m}$ $\Rightarrow b \,\vdots\, t \Rightarrow$ $\Rightarrow$ НОД$(a, b) = t$ - противоречие
(аналогично для НОД$(b, m) = t$)

$\Rightarrow$ максимальное значение для $m = 8$.
Это достигается, например, при $a = 1$ и $b = 7$.

$\frac{\overset{\vdots 8}{1+7}}{\underset{\vdots 8}{(1+7)^2} - \underset{\vdots 8}{8 \cdot 7}}$

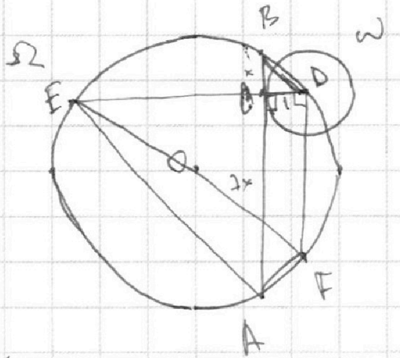
Ответ: $m = 8$ - максимальное значение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3.



Дано:
(т. D - центр ω, ∈ окр. Ω)
$AC : CB = 7$
$r(\omega) = 1$
$R(\Omega) = 5$
$AB - ?$

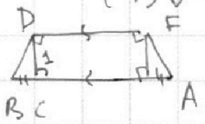
Решение: Пусть $BC = x$, тогда $CA = 7x$ (из отношения)
Продлим DC до пересечения с Ω в т. F.

$\angle ABD = \angle AED = \frac{1}{2} \smile AD$
как вписанные углы
$\Rightarrow \triangle CEA \sim \triangle CBD$ по 2-м углам
($\angle ECA = \angle BCD = 90^\circ$
т.к. BA - касательная к ω в т. C)
$\Rightarrow BC \cdot CA = EC \cdot CD$
(из подобия)
$\Rightarrow 7x^2 = EC \cdot 1 \Rightarrow EC = 7x^2$

Проведём DF ∥ BA
DF ∥ BA ⇒ DF ⊥ ED (т.к. BA ⊥ ED)

DF ∥ BA и ~~отрез~~ хорды Ω

⇒ BDFA - р/б трапеция
(BD = FA).



DC - высота трапеции,
$BC = x$, $BA = 8x$
$\Rightarrow DF = 8x - x - x = 6x$.

$\angle EDF = 90^\circ$ (по доказанному) и
вписанный, ⇒ EF - диаметр Ω
По теореме Пифагора: $ED^2 + DF^2 = EF$

$(7x^2+1)^2 + (6x)^2 = (5+5)^2$
$49x^4 + 14x^2 + 1 + 36x^2 = 100$
$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$(x^2-1)(\underset{}{\overset{>0}{49x^2+99}}) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 1 \quad ; AB = 8x = 8$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

Пусть $2x^2-5x+3 = a$, $2-7x = b$.

Тогда:

$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b \Rightarrow \underset{1)}{a \geq 0}; \quad \underset{2)}{a \geq b}$

$\sqrt{a} + b = \sqrt{a-b} \quad \uparrow^2$

$a - 2\sqrt{a}\,b + b^2 = \cancel{a} - b$

$b^2 - 2\sqrt{a}\,b = -b$

1) $b=0$ – уд. 2) $b \neq 0$

1) $b=0$ $\quad 2-7x=0$ $\quad x = \frac{2}{7}$ – уд.

2) $b \neq 0$

$b - 2\sqrt{a} = -1$

$b+1 = 2\sqrt{a}$ $\rightarrow$ $b+1 \geq 0$ $\quad 3-7x \geq 0$ $\quad x \geq \frac{3}{7}$

$b^2+2b+1 = 4a$

$4\cdot(2x^2-5x+3) = (2-7x)^2 + 2\cdot(2-7x)+1$

$8x^2 - 20x + 12 = 4 - 14x + 49x^2 + 4 - 14x + 1$

$41x^2 - 8x - 3 = 0$

$D = 64 + 4\cdot 3\cdot 41 = 64 + 492 = 556 = 4\cdot 139$

$x_1 = \frac{8-2\sqrt{139}}{82}$ – неуд.: $\frac{4-\sqrt{139}}{41} < \frac{3}{7}$

$28 - 7\sqrt{139} < 123$ – верно

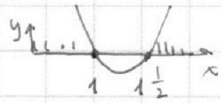
$x_2 = \frac{8+2\sqrt{139}}{82}$ – неуд.

1) $2x^2-5x+3 \geq 0$

$D = 25 - 2\cdot 4\cdot 3 = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$

$x_2 = \frac{5+1}{4} = 1\frac{1}{2}$



$\Rightarrow x \leq 1$ или $x \geq 1\frac{1}{2}$

2) $2x^2+2x+1 \geq 0$

$D = 4 - 4\cdot 2 < 0$

$\Rightarrow 2x^2+2x+1 > 0$ при всех x.

$\frac{4+\sqrt{139}}{41} < \cancel{\frac{3}{2}}\ 1$

$4 + \sqrt{139} < 41$

$\sqrt{139} < 37$

$139 < 37^2$ – верно

$\frac{4+\sqrt{139}}{41} \geq \frac{3}{7}$

$7\sqrt{139} \geq 95$ – неверно

$\Rightarrow x_2 < \frac{3}{7}$ $\Rightarrow$ неуд.

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

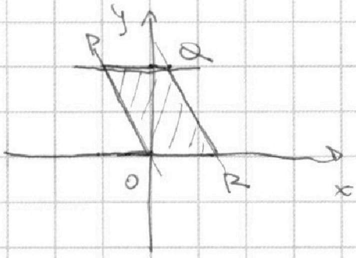
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5.



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$
$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12.$$

Параллелограмм на плоскости задаётся следующими неравенствами:

$y \geq 0$ (выше OR) $\quad y \leq 24$ (~~PQ~~ ниже PQ)

$y \leq 30 - 2x$ (левее QR) $\quad y \geq -2x$ (правее PO)

=> координаты точек A и B удовлетворяют этим неравенствам.

$2x+y \leq 30 \qquad 2x+y \geq 0.$

При этом $\underbrace{2x_2+y_2}_{\leq 30,\ \geq 0} = \underbrace{2x_1+y_1}_{\leq 30,\ \geq 0} + 12$

=> $12 \leq 2x_2+y_2 \leq 30$; $0 \leq 2x_1+y_1 \leq 28$

– При каждом значении $2x_2+y_2$ однозначно определяется сумма $2x_1+y_1$.

Вариантов выбора $2x_1+y_1$ – 29 (от 0 до 28 включительно)

При этом, если $2x_1+y_1=t$, то $y_1=t-2x_1$, $t\in[0;28]$ и целое

=> $x_1 \in [0;14]$ и целое.

На любом отрезке нашей прямой $y=t-2x$, ограниченном параллелограммом, находится 13 точек, удовлетворяющих условиям. (y принимает значения от 0 до 24 включительно с шагом 2.)

Значит, способов выбрать значение для $2x_1+y_1$ – 29, выбрать точки x_1 и y_1 – 13 способов, и выбрать подходящие x_2 и y_2 – тоже 13 способов, значит всего способов $29\cdot 13\cdot 13$.

Ответ: всего таких пар точек $29\cdot 13^2$.

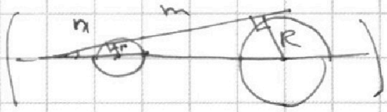
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $\sqrt{R^2+(n+m)^2}-\sqrt{r^2+n^2}=8$



$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{R}{n+m}=\dfrac{r}{n}=\dfrac{2}{n+m}=\dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow 2n=n+m \Rightarrow n=m$

$\sqrt{4+\cancel{2}4n^2}-\sqrt{1+n^2}=8$

$2\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+n^2}=8$

$\sqrt{1+n^2}=8$

$1+n^2=64 \qquad n=\sqrt{63}$

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{r}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{63}}=a$

4) Прямая симметрична относительно ox,

$\Rightarrow a=-\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{63}}$

Ответ: $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{63}},\ a_2=-\dfrac{1}{\sqrt{63}},\ a_3=\dfrac{3}{\sqrt{55}},\ a_4=-\dfrac{3}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

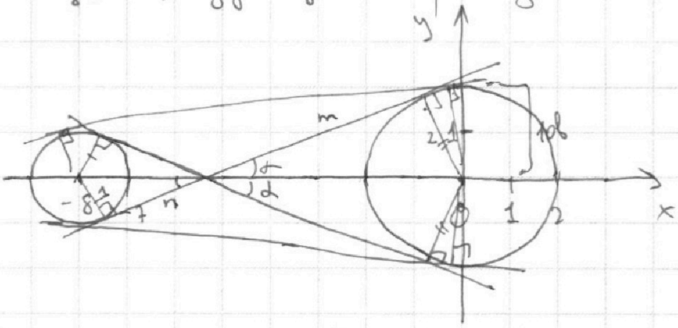
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \le 0 \end{cases}$$

Заметим, что второе неравенство системы решается в виде следующего рисунка:



При этом нам подходят точки, лежащие внутри кругов и на ~~поверх~~ окружностях. (Поверхность внутри круга ~~и не окружности~~ даёт отрицательное значение у соотв. скобки, точка на окружности даёт значение скобки = 0.)

Окружности: $(x+8)^2+y^2=1 = r^2$
и
$x^2+y^2=4 = R^2$

Замечаем, что первое равенство задаёт прямую $y = ax + 10b$. По условию у этой прямой и двух окружностей должны быть две общих точки (чтобы было равно два решения). Значит, эта прямая должна касаться каждой из этих двух окружностей. Значит, для a есть всего 4 варианта.

$a = \operatorname{tg}\alpha$ (понятно, что в ним подобрались: см. рисунок.)

1) По теореме Пифагора:

$\sqrt{R^2+m^2} + \sqrt{r^2+n^2} = 8$

Из подобия треугольников:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{m} = \frac{1}{n}$ $2n = m$

$\sqrt{4+4n^2} + \sqrt{1+n^2} = 8$

$2\cdot\sqrt{1+n^2} + \sqrt{1+n^2} = 8$ $3\cdot\sqrt{1+n^2} = 8$ $1+n^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2$

$a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{6\frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{55}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{55}} \Leftarrow n = \sqrt{7\frac{1}{9}-1}$

2) Прямая симметрична относительно Ox

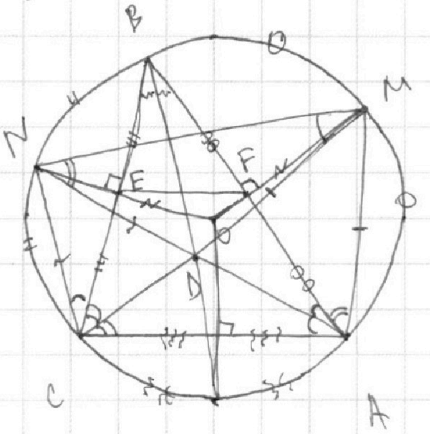
$\Rightarrow a = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7.



AD — ?

MF = 4,5; NE = 2

Решение:

$MF^2 + FA^2 = MA^2$ (по Пифагору)

$NE^2 + EC^2 = NC^2$

$BF \cdot FA = FM \cdot (2R - FM)$ (пересечение хорд)

$BE \cdot EC = NE \cdot (2R - NE)$

$4,5^2 + FA^2 = MA^2$

$2^2 + EC^2 = NC^2$

$FA^2 = 4,5 \cdot (2R - 4,5)$

$CE^2 = 2 \cdot (2R - 2)$

$4,5^2 - 4,5^2 + 4,5 \cdot 2R = MA^2$

$2^2 - 2^2 + 4R = NC^2$

$MA^2 = 9R$

$NC^2 = 4R$

$\frac{AD}{CD} = \frac{MA}{NC}$ (из подобия △ CND и DMA)

$\frac{AD^2}{CD^2} = \frac{MA^2}{NC^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow AD : CD = 3 : 2$

$2AD = 3CD$

□ OEBF — вписанный, (т.к.

$\angle OEB = 90°$ и $\angle BFO = 90$ — противоположные)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

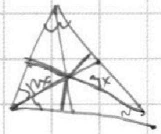
2

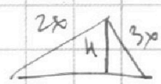
$AB = 4{,}5$

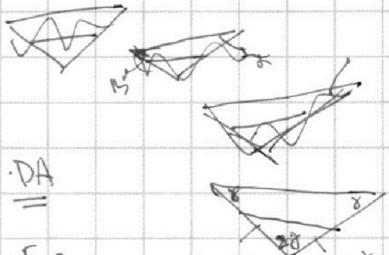
$AC = 2$

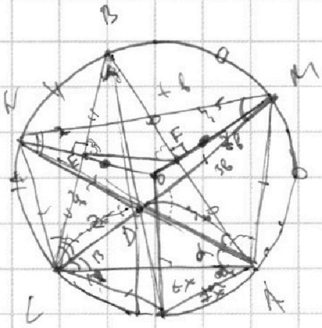
$ME = 4{,}5$

$NF = 2$









$MD \cdot CD = ND \cdot DA$

$MF + FD = NE + ED$

$4{,}5 + FD = 2 + ED$

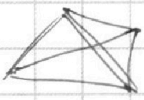
$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$

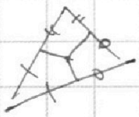
$\alpha + \gamma - \beta \qquad \beta + \gamma - \alpha$

$\gamma = 45^\circ$?

$(4{,}5)^2 + (\;)^2 = (\;)^2$

$2^2 + (\;)^2 = (\;)^2$

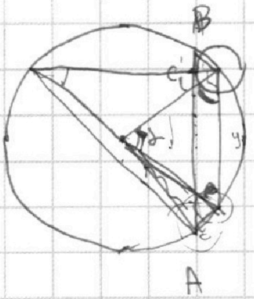


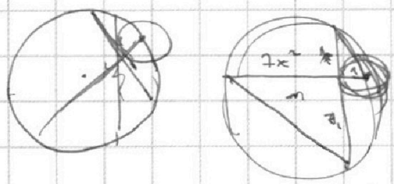


$(\;)^2 = 4{,}5 \cdot (2R - 4{,}5)$

$(\;)^2 = 2 \cdot (2R - 2)$

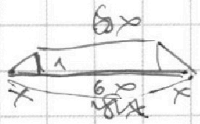
$(\;) \cdot AD = CD \cdot (\;)$





$8x < 10$

8 ✓



$(1 + 7x^2)^2 + y^2 = 100$

$1 + 14x^2 + 49x^4 + 36x^2 = 100$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \qquad (a-1)(49a+99) = 0$

$49a^2 + 50a - 99 = 0$

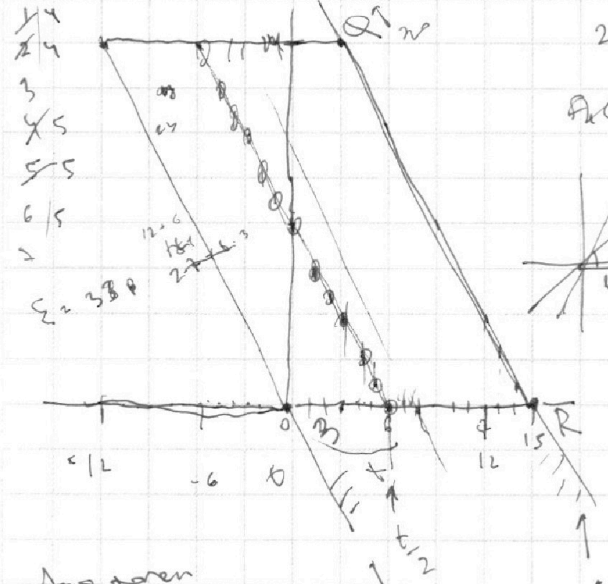
$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

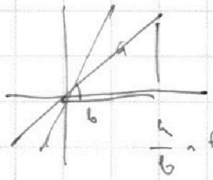
МФТИ



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$2x + y = t$

$y = 2x - t$



$2x_2 + y_2 = a_2$

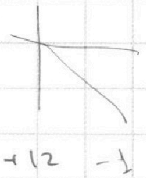
$2x_1 + y_1 = a_1$

$a_2 - a_1 = 12$

$a_2 = a_1 + 12$

$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12$

$y \geq 0$



$y \leq 30 - 2x$

Для каждой точки должны быть условия:

$y \leq 30 - 2x$

$y \geq 0 \quad y \leq 24$

$y \geq -2x$

$\to y \geq 0 \quad y + 2x \leq 30$

$y \leq 24 \quad y + 2x \geq 0$

$\frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$

$\begin{cases} 2x_2 + y_2 = 12 \\ 2x_1 + y_1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x_2 + y_2 = 30 \\ 2x_1 + y_1 = 18 \end{cases}$

28 бан

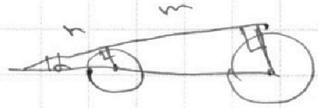
Сколько способов набрать $2x + y = t$?

$y = t - 2x$

$2x + y = t$

$y = t - 2x$

$y = -2x$



$y = 12 - 2x$

13 бан

$y = 0 - 2x$

→ на 13 вариантов.

28 бан. на $12 \cdot 12$

$4 + x^2 + 1 + y^2 = 8$

$x^2 + y^2 = 3$

$\frac{2}{x} = \frac{1}{y} \quad 2y = x$

6.

$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$

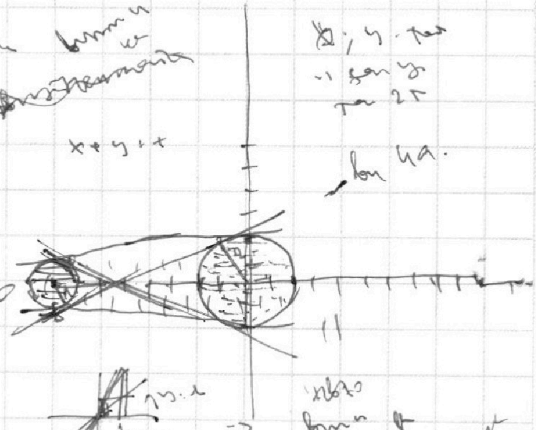
$(x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

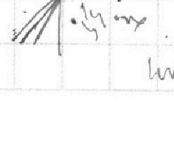
$(t + 16x + 64 - 1)(t - 4) \leq 0$

$x^2 + y^2 = 4$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$

$y = ax + 10b$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

1) a, b, c – нат. $ab : 2^{14}7^{10}$, $bc : 2^{17}7^{17}$, $ac : 2^{30}7^{37}$

$2^x\ 2^y\ 2^z$ min abc – ?

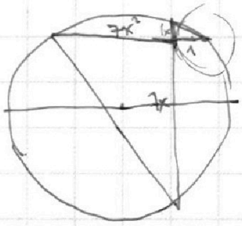
$7^k\ 7^l\ 7^m$

$x+y \geq 14$ $k+l \geq 10$

$y+z \geq 17$ $l+m \geq 17$

$z+x \geq 30$ $k+m \geq 37$

min $x+y+z$ – ? min $k+l+m$ – ?



$z+x \geq 30$

=> y – min

$x+2y+z \geq 31$

=> $y \geq 1$

при $y=0$:

$x+y = 21$

$x=14$ $z=17$ $y=0$

$x+1 \geq 14$

$z+1 \geq 17$

$z+x \geq 30$

$x=14$ $z=16$ $y=1$

$=31$

$k+m \geq 37$

$k+2l+m \geq 27$

$l=0$ v

~~$37 = 16+21$~~

$k=10$ v

$m=27$

$k+m=37$

2) $\frac{a}{b}$ несокр. (a и $b \in$ Natural)

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$a \neq b$

a и b не имеют общ. дел.

max m такого, что

$a+b : m$

и $a^2-6ab+b^2 : m$

$a+b : m$ $a+b = mk$

mk

$(mk)^2 - 8ab$

$: m$

m – нат. m

=> abc min:

$2^{14}\cdot 7^{10}$ 1 $2^{17}\cdot 7^{27}$

$8ab : m$ => max $=8ab$

~~$a+b = 8ab$~~

m и a не могут иметь общих делителей.

и $a+b = mk$

=> max $m=8$

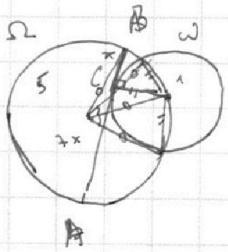
$a+b=8k$

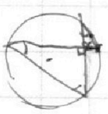
$64k^2 - 8ab$

$\frac{8}{1+7}$

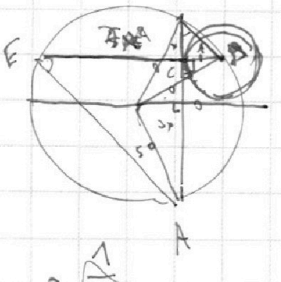
$64-8\cdot7$

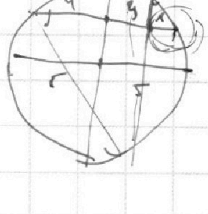
3. Ω ω AB – ?

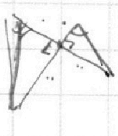




x – ?







$\frac{BC}{CA} = \frac{1}{7}$ $7BC = CA$

$\frac{BC}{CB} = \frac{EC}{CA}$ $\frac{BC}{}$

$\frac{1+7x^2}{49x^2+45x^2} = \frac{1}{45x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [x] 3 [x] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

$\sqrt{a}-\sqrt{a-b}=b$

$\sqrt{a}+b=\sqrt{a-b}$

$a+2\sqrt{a}b+b^2=a-b$

$2\sqrt{a}b+b^2=-b$

$2\sqrt{a}+b=-1$

$2\sqrt{a}=-(1+b) \to -b-1\geq 0$

$b+1\leq 0 \quad b\leq -1 \quad 3-7x\leq 0$

1) $b=0$ — нз. $7x=2$ $x=\frac{2}{7}$

$7x\geq 3$

$x\geq\frac{3}{7}$

$4a=1+2b+b^2$

$4\cdot(2x^2-5x+3)=1+2\cdot(2-7x)+(2-7x)^2$

$8x^2-20x+12=1+4-14x+4-28x+49x^2$

$0=41x^2-22x-3$

$41x^2-22x-3=0$

$D=22^2+4\cdot 41\cdot 3=484+492=976=(4\sqrt{61})^2$

$x_1=\frac{22+4\sqrt{61}}{82}$ — уд.

$x_2=\frac{22-4\sqrt{61}}{82}$ — нет

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ и $\frac{3}{7}$

$77+14\sqrt{61}$ и 123

$14\sqrt{61}>46 \quad 8>\sqrt{61}>7$

$A(x_1;y_1)$

$B(x_2;y_2)$

x и y — цел.

$13>\sqrt{139}>12$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

$2x^2+2x+1>0$

$D=4-4\cdot 2$

$2\cdot\frac{4}{49}-\frac{10}{7}+3$

$\frac{8}{49}-\frac{70}{49}+\frac{}{49}$

$\frac{4+\sqrt{139}}{41}$

$8\cdot 2\cdot 4=64$

16

$-12 \quad 8$

$8+2\sqrt{139}$

$2\sqrt{139}$

$\frac{123}{145}$

$4<\sqrt{139}$

$\frac{41}{37}$

$\frac{3}{7} \quad 1 \quad 1\frac{1}{2}$

$95\cdot 95=9025$

$22\cdot 22=484$

$41\cdot 12=492$

$492+484=976$

$139\cdot 4=556$

$976:2=488$, $488:4=122$, $122:2=61$

$123-77=46$

$13\cdot 13=169$

$492\cdot 64$

$41\cdot 12=82+410=492$

$a>b$

$a\geq 0$