



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассчитаем $a^2 b^2 c^2 = (ab) \cdot (bc) \cdot (ac)$ $\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{52} \cdot 7^{64} \Rightarrow$
 $: 2^{26} \cdot 7^{32} : 2^{26} \cdot 7^{32} : 2^{26} \cdot 7^{32}$

$(abc)^2 \approx 2^{52} \cdot 7^{64}$ $\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{52} \cdot 7^{64}$, ведь квадрат не
может делиться на четное число $\Rightarrow a^2 b^2 c^2 \approx 2^{26} \cdot 7^{32} \Rightarrow$
m:n abc = $2^{26} \cdot 7^{32}$
Ответ: $2^{26} \cdot 7^{32}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Вспомогательная алгоритмом Евклида:

$$(a^2 - 6ab + b^2, a+b) = (a^2 - 6ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2, a+b) = (-8ab, a+b),$$

где (e, f) - НОД чисел e и f . Я тогда, бедолага, бедолага, по сути, прошу найти его.

Оценим итог: $\exists p$ -какой-то делитель числа a . Если такого не нашлось рассмотрим позже. $\frac{a}{p}$ несократима $\Rightarrow b \not\equiv p \Rightarrow a+b \not\equiv p, a - 8ab \equiv p$. Аналогично с b . Тогда искомого числа 8 или 4 или 2 или 1.

Если не нашлось для a , но нашлось для b , то как и в предыдущем случае. Если не нашлось ни для a , ни для b , то $a=b=1$. Смотрим так его: $\frac{2}{-4} \Rightarrow \text{НОД}(2, -4) = 2$

Из оценки видно, что $\max m = 8$. Просто показать, что так

возможно: $a=11, b=5 : \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{16}{121+25-330} = \frac{16}{-184} \cdot a$

$16 : 8$ и $184 : 8 = 23$, причем, $\text{НОД}(2, 23) = 1$, но $(16, 184) = 8$.

Итак, наибольшее $m = 8$.

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



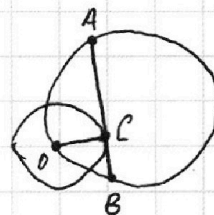
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

Дано:



Центр ω лежит на Ω , AB — хорда Ω ;
 AC касается ω в C . $\frac{AC}{CB} = 7$; $R_\omega = 1$; $R_\Omega = 5$.

Найти: AB — ?

Решение:

$\exists CB = x \Rightarrow$ так как $\frac{AC}{CB} = 7$, то $AC = 7x$

$OC \perp AB$ (радиус ω , проведенный в точку касания $C \perp$ касательной AB , касающейся ω в C). $OC = R_\omega = 1$

По Th Пифагора: $AO = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{1 + 49x^2}$; $BO = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + 1}$

$\sin \angle OAB = \sin \angle OAC = \frac{OC}{AO} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 49}}$

По Th \sin для $\triangle AOB$, считая, что он вписан в Ω :

$\frac{OB}{\sin \angle OAB} = 2R_\Omega \Rightarrow OB = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 49}} \cdot 10$, но $OB = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 49} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = 10 \Leftrightarrow (x^2 + 49)(x^2 + 1) = 100$, так $10 > 0$.

$\exists x^2 = t > 0$, значит $t^2 + 50t - 51 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - \text{подходит} \\ t = -51 < 0 - \text{не подходит} \end{cases}$

Итак, $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ (-1 не подходит, ведь длина отрезка есть неотрицательное число).

$AB = AC + CB = 8x = 8$.

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

П.к.в.р: $2x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x+1)^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0$

Разложим обе части на сомножители:

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 7x = 2 - 7x (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$2 - 7x = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

также $2 - 7x = 0$

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 1 > \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 1 > \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 1 - 7x = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 1 > \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 7x > 1 \\ 49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 1 > \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 7x > 1 \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 1 > \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 7x > 1 \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{cases}$$~~

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 7x = 0 & (1) \\ 1 > \sqrt{2x^2 + 2x + 1} & (2) \\ 7x > 1 & (3) \\ x = \frac{\pm 4\sqrt{61} + 22}{41 \cdot 2} & (4) \end{cases}$$

Заметим $x = \frac{2}{7}$ - корень, ведь при нем обе корня существуют $\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ \exists всегда, а $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{\frac{8}{7} - \frac{10}{7} + 3}$, положительное значение всегда больше 0.

Заметим, $x = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{41 \cdot 2}$ тоже не корень, ведь $44 < 976 \Rightarrow 22 < \sqrt{61} \Rightarrow$ это число < 0 , то тогда (3) неверно

Заметим, $976 > 961 \Rightarrow \sqrt{976} > \sqrt{961} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{61} + 22}{41 \cdot 2} > \frac{53}{41 \cdot 2} \Rightarrow 2x > \frac{53}{41} \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 > 5 > 1 \Rightarrow$ (2) неверно! $\Rightarrow \frac{4\sqrt{61} + 22}{41 \cdot 2}$ - не корень.

Итак, $\frac{2}{7}$ - единственный корень.

Ответ: $\frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

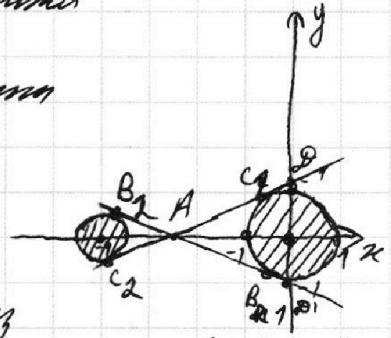


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a x - y + 106 = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Построим в координатах КДП график уравнения $(x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$. см. картинку. Это два пересекающихся круга. Один с центром в $(-8; 0)$ и $R_1 = 2$; второй с центром $(0; 0)$ и $R_2 = 2$ (уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$). Они не пересекаются, ведь



$P(O_1, O_2) > R_1 + R_2$, где O_1, O_2 - их центры. Если эти окружности вышитаются, ведь знак нестационар; если возьмем точку вне каждой из них, то у обеих из $(x+8)^2 + y^2 - 1$ и $x^2 + y^2 - 4$ будет знак > 0 , значит (2) неверно. Если возьмем точку внутри одной из окружностей, то раз они не пересекаются, то она будет вне другой, и такая точка нам не подходит: если она внутри первого круга (первого в числителе выше), то $x^2 + y^2 - 4 < 0$, а $(x+8)^2 + y^2 - 1 > 0 \Rightarrow (2)$ вышита. Если внутри второго - тот же вывод.

Если прямая $y = ax + 106$ пересекает одну из окружностей в 2 точках, то у системы бесконечно много корней, нам не подходит. Вывод, чтобы система имела ровно 2 решения необходимо, чтобы $y = ax + 106$ касалась обеих окружностей. Прямая касается 2-х см. рисунок.

П.к. ок их линии центров, то касательные пересекаются на ней. Из соображений геометрии: $\triangle O_2 B_2 A \sim \triangle O_1 B_1 A \Rightarrow \frac{O_2 A}{O_1 A} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{O_2 A}{O_1 A} = \frac{3}{2} \Rightarrow O_1 A = \frac{8}{3}, A O_2 = \frac{8}{3} \Rightarrow A(-\frac{16}{3}; 0)$
 $A C_1 = \sqrt{A O_1^2 - r_1^2} = \frac{\sqrt{220}}{3}$
 $\triangle A B C_1 \sim \triangle A D O_1 \Rightarrow D O = \frac{A O_1 \cdot O C_1}{A C_1} = \frac{2 \cdot 16}{\sqrt{220}} = \frac{16}{\sqrt{55}} \Rightarrow D(0; \frac{16}{\sqrt{55}})$

D' лежит на другой касательной, линия касательные очевидно симметричны относительно линии центров, значит, D' симметрична D , относительно O , т.е. $D'(0; -\frac{16}{\sqrt{55}})$
 Итак $y = 106 + ax$ проходит через $A(-\frac{16}{3}; 0)$ и $(D'(0; -\frac{16}{\sqrt{55}}))$ или $D(0; \frac{16}{\sqrt{55}})$, имеем систему:

$$\begin{cases} 106 - \frac{16}{3}a = 0 \\ \begin{cases} \frac{16}{\sqrt{55}} = b \\ -\frac{16}{\sqrt{55}} = b \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{16}{30}a \\ \begin{cases} \frac{16}{\sqrt{55}} = b \\ -\frac{16}{\sqrt{55}} = b \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a = \pm \frac{30}{\sqrt{55}} - \text{исканное}$$

Ответ: $\pm \frac{30}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

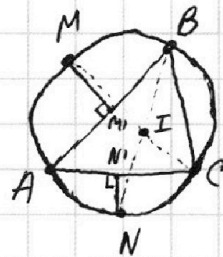
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача N 7.

Дано:

$\triangle ABC$: ω - описанная окружность $\triangle ABC$
 M - середина дуги AB , не содержащей C . N - середина дуги AC , не содержащей B ; $\rho(N; AC) = 2$; $\rho(M; AB) = 4,5$.
 I - центр вписанной окружности $\triangle ABC$.



Найти: $\rho(A; I)$ - ?

Решение:

Наблюдение N1: Очевидно, что $NEBI$, $AMCI$. Это видно так:
 N - середина AC , не содержащей $B \Rightarrow \angle CN = \angle NA \Rightarrow \angle ABN = \angle CBN$, т.е. BN - биссектриса $\angle B$, а центр вписанной окружности = точка пересечения биссектрис $\Rightarrow I \in BN$. Аналогично, $I \in CM$.

Наблюдение N2: $\angle NN' \perp AC$; $MM' \perp AB$. По def $\rho(x; e)$:

$$\rho(M; AB) = MM'; \rho(N; AC) = NN'; \rho(A; I) = AI.$$

Заметим, $\angle CAN = \angle CBN = \frac{\angle B}{2} \Rightarrow NN' = AN \cdot \sin \frac{\angle B}{2}$. Аналогично, $MM' = AM \cdot \sin \frac{\angle C}{2}$.

Наблюдение N3: $\angle AIN = \angle BAI + \angle ABI = \frac{\angle A + \angle B}{2} = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$.
 $\angle MBIM = \angle MBC + \angle CBI = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$

Тогда $\sin \angle AIN = \cos \frac{\angle C}{2}$; $\sin \angle MBIM = \cos \frac{\angle A}{2}$

$$\angle AIM = \angle ICA + \angle IAC = \frac{\angle A + \angle C}{2} = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} \Rightarrow \sin \angle AIM = \cos \frac{\angle B}{2}.$$

По Th sin:

$$\triangle AIM: \frac{AM}{\sin \angle AIM} = \frac{AI}{\sin \angle AMC} \Rightarrow AI = \frac{\sin \angle B \cdot AM}{\cos \frac{\angle B}{2}} = \frac{\sin \angle B \cdot MM'}{\sin \frac{\angle C}{2} \cdot \cos \frac{\angle B}{2}}$$

$$\triangle AIN: \frac{AN}{\sin \angle AIN} = \frac{AI}{\sin \angle ANB} = \frac{AI}{\sin \angle C} \Rightarrow AI = \frac{AN \cdot \sin \angle C}{\cos \frac{\angle C}{2}} = \frac{\sin \angle C \cdot NN'}{\cos \frac{\angle C}{2} \cdot \sin \frac{\angle B}{2}}$$

$$AI^2 = \frac{\sin \angle B \cdot \rho(M; AB) \cdot \sin \angle C \cdot \rho(N; AC)}{\sin \frac{\angle C}{2} \cdot \sin \frac{\angle B}{2} \cdot \cos \frac{\angle C}{2} \cdot \cos \frac{\angle B}{2}} = 4 \cdot \rho(M; AB) \cdot \rho(N; AC)$$

\leftarrow из формулы $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$

$$\rho(A; I) = AI = 2 \sqrt{\rho(M; AB) \cdot \rho(N; AC)} = 6.$$

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + b > a$; $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = a > 0$
 $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2x^2 + 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x$
 $(a-b) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$ + *наше уравнение*
 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b & (1) \\ a+b=1 & (2) \end{cases}$

Решим:

Чертовик

$(a, b) = 0$

$(a^2 - 6ab + b^2, a+b) = (a+b, -8ab) = \max f$

$abc \geq 2^{14} \cdot 7^{10} c$
 $\geq 2^{14} \cdot 7^{17} a$
 $\geq 2^{20} \cdot 7^{37} b$

$b = 2^6 \cdot 7^5$
 $a = 2^9 \cdot 7^{17}$
 $c = \sqrt{2^2 \cdot 7^2}$
 $c = 2^{11} \cdot 7^{10} \cdot \frac{1}{2}$

$a+b:$

$34 \cdot 17$
 51

3

$2^{57} \cdot 7^{64}$

$a+b: 8$

$$\begin{array}{r} 255 \\ 6 \\ \hline 330 \end{array}$$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$

11 5

$- 6 \cdot 5 \cdot 11$

$$\frac{16}{121 - 330 + 25}$$

$c \in$

$330 - 146$

184



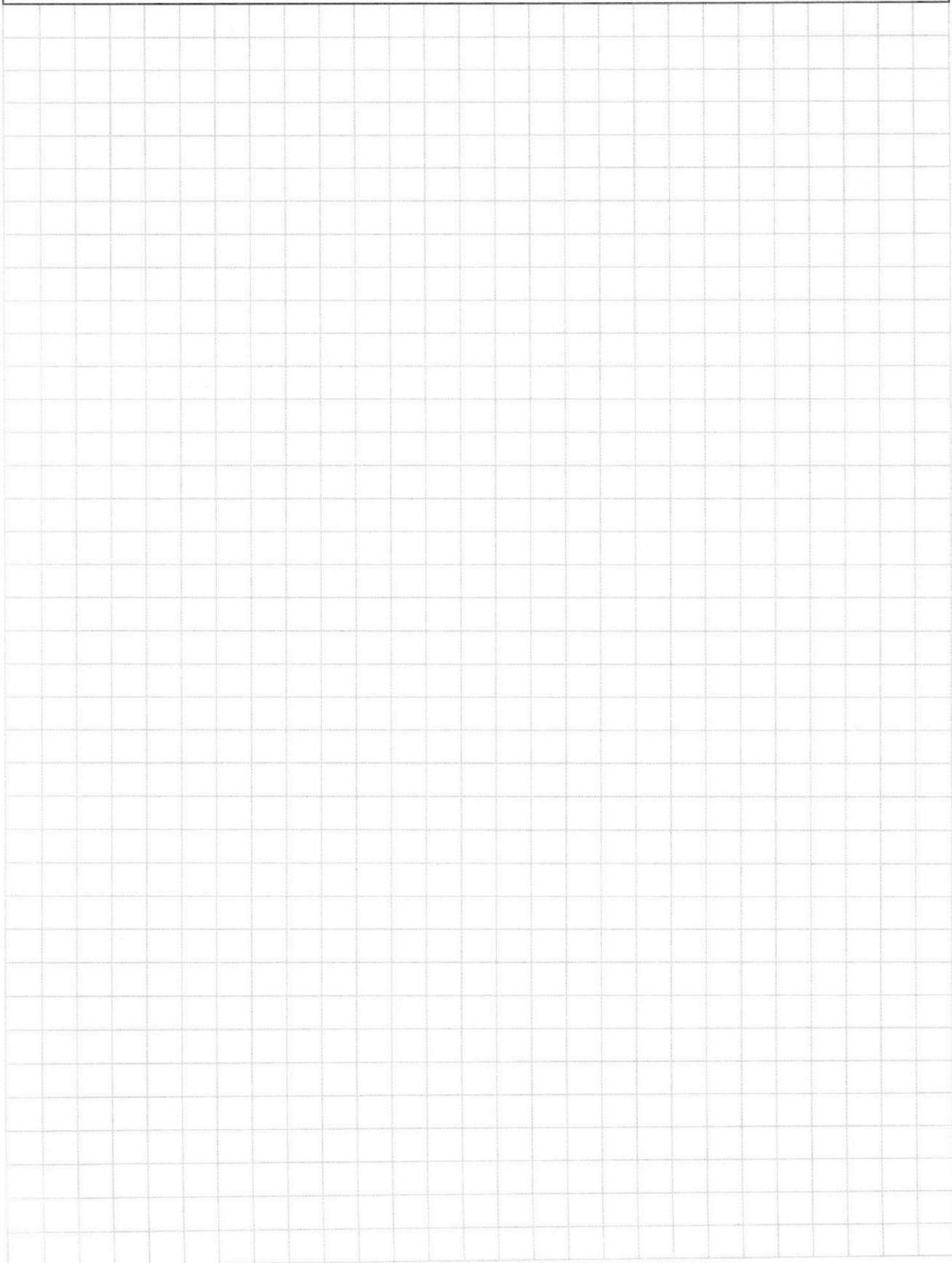
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



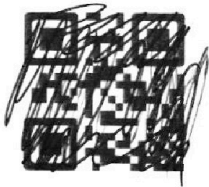
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



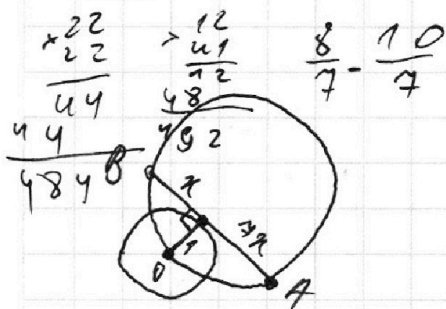
$(a, b) = \emptyset$

$(a+b, a^2 - 6ab + b^2) =$
 $= (a+b, -8ab) = m$

Черновик.

$2x^2 - 5x$
 $a^2 - 6a + 1 = 0 \quad 2(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4}x + 3)$
 $\Delta = 36 - 4$

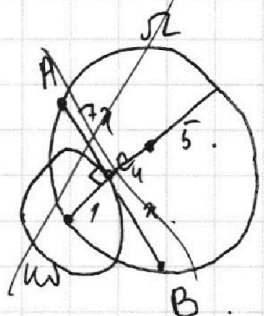
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



$a+b \neq ab \quad 9 \neq 6 = (4\sqrt{61})^2$
 $(a, ab) = a \quad 2 \neq 4$
 $\pm 4\sqrt{61} + 22$
 $n = \pm b = 4 \cdot 2$

$\sqrt{t-1} + \sqrt{t+1} = 1$
 $t + 2\sqrt{t^2-1} = 1$
 $2\sqrt{t^2-1} = 1-t$
 $4t^2 - 4 = t^2 + 1 - 2t$

$\sqrt{2x^2+1} = 5 \cdot 2$
 $\frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$



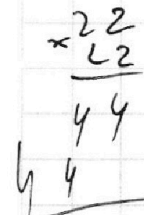
$\sqrt{49t+1}(t+1) = 10$

$\sqrt{2x^2-5x+3} = a$

$a-b = a^2 - b^2$

$\sqrt{2x^2+2x+1} = b$

$(a-b) = (a-b)(a+b)$



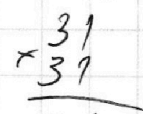
$\begin{cases} a=b \\ a+b=1 \end{cases}$

$3t^2 + 2t - 5 = 0$
 $\sqrt{66}$

$\sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3} = 1$

$2-7x = (2-7x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$

$a \cdot b \quad a+b = -5$



967.

$2^9 = 2^9 + 2^9$

