



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем t могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на t ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1 $ab : 2^{14 \cdot 7^{10}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} bc : 2^{17 \cdot 7^{17}}, \text{ где } a, b, c \in N. \text{ Тогда} \\ ac : 2^{20 \cdot 7^{37}} \end{array} \right.$$

$$m = \frac{ab}{2^{14 \cdot 7^{10}}}$$

$$h = \frac{bc}{2^{17 \cdot 7^{17}}}, \text{ тогда } \cancel{\text{запись}}$$

$$k = \frac{ac}{2^{20 \cdot 7^{37}}}$$

$$m, h, k \in N. \text{ Тогда } a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} m n k, \text{ т.к. } \left\{ \begin{array}{l} a, b, c \in N \\ m, h, k \in N \end{array} \right., \text{ т.о.}$$

$$abc = 2^{25} \cdot \sqrt[32]{2mnk}, \text{ т.к. } ac : 2^{20 \cdot 7^{37}}, \text{ т.о. } abc : 2^{20 \cdot 7^{37}},$$

$$\text{а значит } \sqrt[32]{2mnk} : 7^5, \text{ т.к. } abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt[32]{2mnk}.$$

$$\text{abc - min, если } \sqrt[32]{2mnk} - \text{min}, \text{ т.е. тогда } \left\{ \begin{array}{l} mnk : 2^{(I)} \\ \sqrt[32]{2mnk} : 7^{32} \cdot 5^{(II)} \end{array} \right.$$

(I) должно выполняться, т.к. $abc \in N$, а значит и $\sqrt[32]{2mnk} \in N$,

$$\text{тогда } \cancel{mnk : 2^{25}} \quad abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt[32]{2 \cdot (2 \cdot 7^{10})} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Множие не может быть, т.к. иначе $\sqrt[32]{2mnk} \notin N$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \quad \frac{a}{b} - \text{некор.} \quad \frac{(a+b)}{a^2 - 6ab + b^2} \quad \cancel{\text{задача}}$$

$$m - \text{нацд., если} \quad \frac{(a+b)}{a^2 - 6ab + b^2} = 1, \text{ т.е. } m = (a+b) = a^2 - 6ab + b^2$$

$$a+b = a^2 - 6ab + b^2 \quad (=) \quad a^2 - a(6b+1) + b^2 - b = 0$$

$$\Delta = (6b+1)^2 - 4(b^2 - b) = 32b^2 + 16b + 1$$

$$a = \frac{6b+1 \pm \sqrt{32b^2 + 16b + 1}}{2}, \text{ т.к. } a, b \in \mathbb{N}, \text{ то } 32b^2 + 16b + 1$$

$$\begin{cases} (a+b) = mk \\ a^2 - 6ab + b^2 = mh \end{cases}, \text{ т.е. } \frac{k}{n} - \text{некор. дроб, т.е. } \text{НОД}(k, n) = 1. \quad \text{и} \quad \text{НОД}(a, b) = 1.$$

$$a = mk - b$$

$$m^2k^2 + b^2 - 2mkb - 6mkb + 6b^2 + b^2 = mh$$

$$m^2k^2 - 8mkb + 8b^2 - mh = 0 \quad (=) \quad k^2 \cdot m^2 - m(8kb + h) + 8b^2 = 0.$$

$$\Delta = (8bk + h)^2 - 4k^2 \cdot 8b^2 = 64b^2k^2 + h^2 + 16bkh - 32b^2k^2 = 16(2b^2k^2 + bkh) + h^2.$$

$$f'(m) = 2mk - 8kb + h \quad \cancel{\text{задача}} \quad f'(m) = 0 \quad (=) \quad m = \frac{8bk - h}{2k} = 4b - \frac{h}{2k}$$

$$(a+b) = mk = \frac{8bk - h}{2}$$

$$m \text{ нацд, если } a^2 - 6ab + b^2 : (a+b), \text{ т.е. } (a+b)^2 - 8ab : (a+b) \Rightarrow 8ab : a+b, \text{ т.е.}$$

$$8ab = ka + kb \quad (=) \quad \cancel{a} \quad \cancel{b} \quad a(8-k) = \frac{a \cdot k}{8-a}, \text{ т.е. } a, k \in \mathbb{N}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \end{cases}, \text{ тогда } m = (a+b) = 10.$$

$$\text{Ответ: } m = 10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

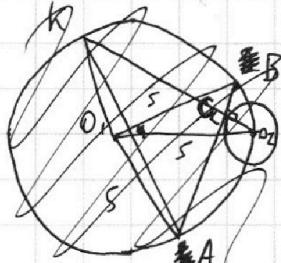
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O_1 - ~~секущая~~ \odot
 O_2 - ~~касательная~~ w

т.к. AB - кас. w , то $\angle O_2CB = 90^\circ$ (т.к. O_2C -
 $(O_2C) \cap \odot = \{K\}$ радиус w)

$$AC \cdot CB = O_2C \cdot CK \quad (\text{по } \angle O_2CB)$$

Пусть $CB = x$, тогда из условия $\frac{AC}{CB} = 7 \Rightarrow AC = 7x$.

$O_2C = 1$, как радиус w . Тогда $7x \cdot x = 1 \cdot CK \Leftrightarrow CK = \frac{7x^2}{1}$.

Проделем AK : $\angle ACK = 90^\circ$, как ~~взаимно перпендикулярны~~ с углом $\angle O_2CB$

$$\frac{\angle AK + \angle O_2B}{2} = 90^\circ \quad (= \angle KCA), \text{ т.е.}$$

$$\angle AK + \angle O_2B = \angle KCB + \angle O_2A = 180^\circ$$

$$\begin{cases} BK = \frac{x}{2} \sqrt{49x^2 + 1} \\ O_2A = \sqrt{49x^2 + 1} \end{cases} \text{ по т. Пифагора.}$$

По т.косинусов:

$$\begin{cases} BK^2 = O_1K^2 + O_1B^2 - 2O_1K \cdot O_1B \cdot \cos \angle KO_1B \\ O_2A^2 = O_2O_1^2 + O_1A^2 - 2O_2O_1 \cdot O_1A \cdot \cos \angle O_2O_1A \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$$\angle KO_1B + \angle O_2O_1A = 180^\circ \quad (\text{т.к. } \angle KCB + \angle O_2A = 180^\circ).$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}(49x^2 + 1) = 25 - 50 \cdot \cos \angle KO_1B \\ \frac{49x^2 + 1}{1 + 2 \cos \angle KO_1B} = 25 - 50 \cdot \cos \angle O_2O_1A \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{1 - 2 \cos \angle KO_1B}{1 + 2 \cos \angle KO_1B}, \text{ т.е.}$$

$$x = \sqrt{\frac{1 - 2 \cos \angle KO_1B}{1 + 2 \cos \angle KO_1B}} \cdot 1 \quad \text{или} \quad x = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos \angle O_2O_1A}{1 - 2 \cos \angle O_2O_1A}} \cdot 1$$

$$AK = \sqrt{8x^2(49x^2 + 1)} = \frac{7x\sqrt{x^2 + 1}}{1}, \text{ тогда } x = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos 90^\circ}{1 - 2 \cos 90^\circ}} = 1.$$

$$AB = 8x = 8.$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N4. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

Рассмотрим первую часть: $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 \quad (=)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{- нет решений, т.к. } 2x^2 + 2x + 1 = 0 \quad D = -4 < 0.$$

При $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = \frac{(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$$

$$= \frac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = \frac{2 - 7x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}.$$

Имеем: $\frac{2 - 7x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x \quad (=)$

$$\Leftrightarrow (2 - 7x) \frac{1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 0 \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2 - 7x \neq 0} \quad \left[\begin{array}{l} 2 - 7x = 0 \quad (I) \\ \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad (II) \end{array} \right]$$

$$(II): \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases}, \quad \cancel{2x^2 + 2x + 1 \geq 0} \quad (f(x) = 2x^2 + 2x + 1) \\ f'(x) = 4x + 2, \quad f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}, \quad \text{i.e. } 2x^2 + 2x + 1 \geq 0, \quad \text{т.к.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 7x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \\ x \geq \frac{1}{7} \end{cases} \quad (=)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0 \quad (\text{III}) \quad (\text{III}): \quad 41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{7} \leq x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

$$\Delta = (-22)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 41 = 484 + 492 = 976$$

$$\begin{cases} x = \frac{22 + \sqrt{976}}{2 \cdot 41} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{22 - \sqrt{976}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \end{cases},$$

тогда $\begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}, \text{ т.к. } \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < 0.$

Имеем: $\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \end{cases}$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$ или $x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

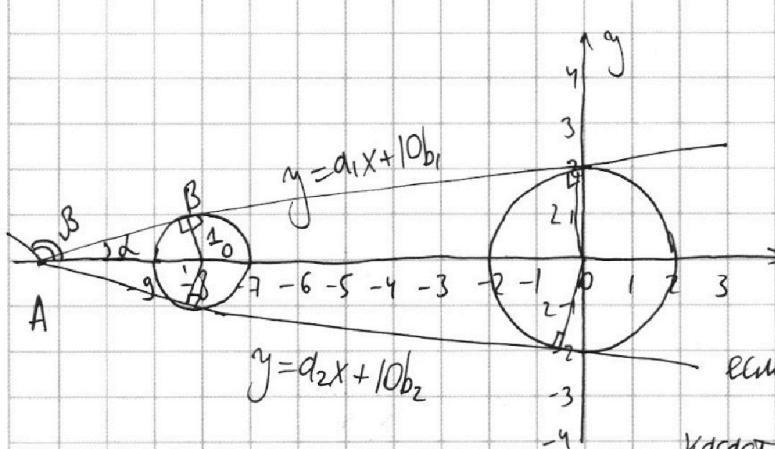
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



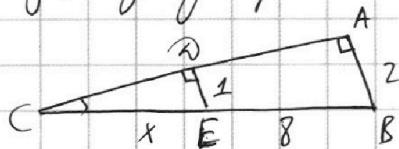
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \quad (I) \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \quad (II) \\ x^2 + y^2 = 4 \quad (III) \end{cases}$$

(I) : $y = ax + 10b$.

Два решения достигаются,
если прямая $y = ax + 10b$
касается обеих окружностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ если}$$

она не пересекает одну из них, то решения бесконечные как ∞ , если
касается только одной, то 1 решение, если не касается ни одной, то 0 решений,
т.е. существует два решения (без касательного)



$\triangle DCE \sim \triangle ACB$ по 2 умнож., т.е.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB}. \quad \frac{1}{2} = \frac{x}{x+8} \Rightarrow x = 8.$$

Тогда $A(-16, 0)$

$$O = -(6a_1 + 10b_1) \Rightarrow 10b_1 = 16a_1. \quad \text{Тогда } y = a_1x + 16a_1.$$

Делаем: $\begin{cases} y = a_1x + 16a_1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ (поскольку окружности)

из графика

$$a_1 = \operatorname{tg} \angle, \text{ где } \operatorname{tg} \angle = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{\sqrt{AO^2 + OB^2}}$$

$$\operatorname{tg} \angle = \frac{OB}{AB} = \frac{OB}{\sqrt{AO^2 + OB^2}} \quad (\text{по т. Пифагора } AB = \sqrt{AO^2 + OB^2}, \text{ т.к. } OB \text{- радиус к кас.})$$

$$\operatorname{tg} \angle = \frac{1}{\sqrt{64-1}} = \frac{1}{\sqrt{63}}, \text{ т.е. } a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}.$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\pi - \angle) = -\operatorname{tg} \angle = -\frac{1}{\sqrt{63}}. \quad \text{Однако: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

1

2

3

4

5

6

7

$\frac{1}{b}$ - некратична

$HOK(a,b) = 1$.

$a \in N$

$\cancel{\exists} HOK(a,b) = ab$.

$b \in N$.

$$m(a+b) = a^2 - 6ab + b^2 \quad m - ?$$

$$a^2 - 6ab - am + b^2 - bm = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \frac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} =$$

$$= \frac{-7x + 2}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - \frac{7x}{7} \text{, t.e. } 2 = \frac{7x}{7} - \text{решение}$$

$$x = \frac{2}{7} !$$

если нет, то $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$ - нет решения!

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad D = 25 - 24 = 1$$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ \hline 164 \\ \cancel{x^4} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{16} \\ \hline 18 \\ \cancel{x^{16}} \\ \hline 3 \\ 492 \end{array}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad 2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$-7x + 1 = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad 49x^2 + 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 + 6x - 3 = 0 \quad D = 36 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 36 + 492 = 528$$

$$x = \frac{-6 \pm 4\sqrt{33}}{2 \cdot 41} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{33}}{41} \quad -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f = 4x + 2 \quad f' = 4 \quad f'(0) \neq 0 \quad f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

$$41x^2 + 6x - 3$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \hline 44 \\ \cancel{44} \\ \hline 484 \end{array}$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \hline 82 \\ \cancel{41} \\ \hline 492 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$2\left(x^2 - 2,5x + \frac{25}{16}\right) - 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$$3 - \frac{25}{18} = 32 - \frac{25}{18} = \frac{29}{18}$$

$$-\frac{1}{8}$$

$$\sqrt{2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}} - \sqrt{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}} = 2 - 7x$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0. \end{cases}$$

a, b - ? Для a находится b, что есть 2 решения

$$a$$

$$b$$

$$c$$

$$d$$

$$e$$

$$f$$

$$g$$

$$h$$

$$i$$

$$j$$

$$k$$

$$l$$

$$m$$

$$n$$

$$o$$

$$p$$

$$q$$

$$r$$

$$s$$

$$t$$

$$u$$

$$v$$

$$w$$

$$x$$

$$y$$

$$z$$

$$A$$

$$B$$

$$C$$

$$D$$

$$E$$

$$F$$

$$G$$

$$H$$

$$I$$

$$J$$

$$K$$

$$L$$

$$M$$

$$N$$

$$O$$

$$P$$

$$Q$$

$$R$$

$$S$$

$$T$$

$$U$$

$$V$$

$$W$$

$$X$$

$$Y$$

$$Z$$

$$a$$

$$b$$

$$c$$

$$d$$

$$e$$

$$f$$

$$g$$

$$h$$

$$i$$

$$j$$

$$k$$

$$l$$

$$m$$

$$n$$

$$o$$

$$p$$

$$q$$

$$r$$

$$s$$

$$t$$

$$u$$

$$v$$

$$w$$

$$x$$

$$y$$

$$z$$

$$A$$

$$B$$

$$C$$

$$D$$

$$E$$

$$F$$

$$G$$

$$H$$

$$I$$

$$J$$

$$K$$

$$L$$

$$M$$

$$N$$

$$O$$

$$P$$

$$Q$$

$$R$$

$$S$$

$$T$$

$$U$$

$$V$$

$$W$$

$$X$$

$$Y$$

$$Z$$

$$a$$

$$b$$

$$c$$

$$d$$

$$e$$

$$f$$

$$g$$

$$h$$

$$i$$

$$j$$

$$k$$

$$l$$

$$m$$

$$n$$

$$o$$

$$p$$

$$q$$

$$r$$

$$s$$

$$t$$

$$u$$

$$v$$

$$w$$

$$x$$

$$y$$

$$z$$

$$A$$

$$B$$

$$C$$

$$D$$

$$E$$

$$F$$

$$G$$

$$H$$

$$I$$

$$J$$

$$K$$

$$L$$

$$M$$

$$N$$

$$O$$

$$P$$

$$Q$$

$$R$$

$$S$$

$$T$$

$$U$$

$$V$$

$$W$$

$$X$$

$$Y$$

$$Z$$

$$a$$

$$b$$

$$c$$

$$d$$

$$e$$

$$f$$

$$g$$

$$h$$

$$i$$

$$j$$

$$k$$

$$l$$

$$m$$

$$n$$

$$o$$

$$p$$

$$q$$

$$r$$

$$s$$

$$t$$

$$u$$

$$v$$

$$w$$

$$x$$

$$y$$

$$z$$

$$A$$

$$B$$

$$C$$

$$D$$

$$E$$

$$F$$

$$G$$

$$H$$

$$I$$

$$J$$

$$K$$

$$L$$

$$M$$

$$N$$

$$O$$

$$P$$

$$Q$$

$$R$$

$$S$$

$$T$$

$$U$$

$$V$$

$$W$$

$$X$$

$$Y$$

$$Z$$

$$a$$

$$b$$

$$c$$

$$d$$

$$e$$

$$f$$

$$g$$

$$h$$

$$i$$

$$j$$

$$k$$

$$l$$

$$m$$

$$n$$

$$o$$

$$p$$

$$q$$

$$r$$

$$s$$

$$t$$

$$u$$

$$v$$

$$w$$

$$x$$

$$y$$

$$z$$

$$A$$

$$B$$

$$C$$

$$D$$

$$E$$

$$F$$

$$G$$

$$H$$

$$I$$

$$J$$

$$K$$

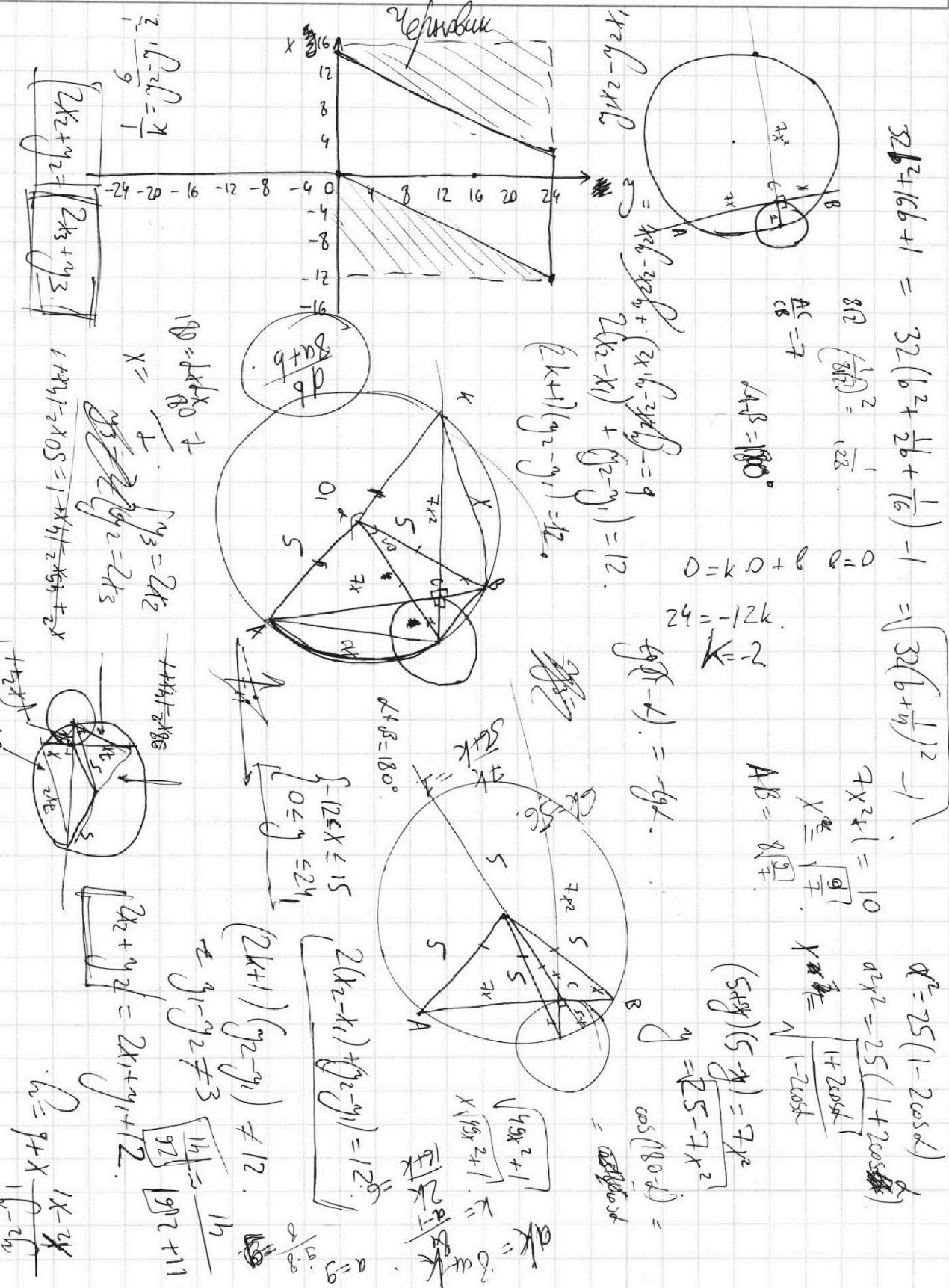
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k \quad a^2 b^2 c^2 = mnk \cdot 2^{51} \cdot 7^{66} \quad 32$$
$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot n \quad abc = 7^{30} \cdot 2^{25} \cdot \sqrt{2mnk!}$$
$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot m \quad \text{т.к. } a, b, c \in N, \text{ т.о. } \sqrt{2mnk!} \in N,$$

2 задача $m, n, k \in N$ и $\sqrt{2mnk!}$ - минимальн.

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2}$$

$$\sqrt{2mnk!} \geq \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}} = \frac{4mnk}{mnk + 2mh + 2nk + 2mk}$$

$$\min(abc), \text{ если } \sqrt{2mnk!} = \sqrt{4!}, \text{ т.е. } \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ k=2 \end{cases}, \text{ тогда } abc = 7^{51} \cdot 2^{26}.$$

$$a^2 - 6ab + b^2. \quad \square = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2.$$

$$a = \frac{6b \pm 4\sqrt{2}b}{2} = [3b \pm \sqrt{2}b] \quad (a - 3b - \sqrt{2}b)(a - 3b + \sqrt{2}b).$$

$$(a+b)^2 - 8ab. \quad \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} \quad m - \text{найд, если } \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} = 1.$$

$$(\Rightarrow) a^2 - 6ab - a + b^2 - b = 0. \quad \square = 36b^2 + 12b + 1 - 4b^2 + 4b = 32b^2 + 16b + 1$$

$$a = \frac{6b + 1 \pm \sqrt{32b^2 + 16b + 1}}{2} \quad 32b^2 + 16b + 1 - \text{наимен квадрат.}$$

$$b=0. \quad b=1. \quad b=$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

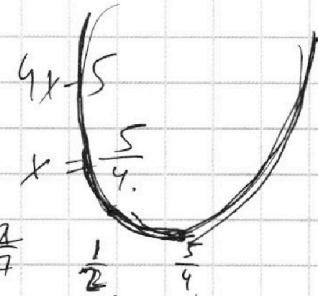
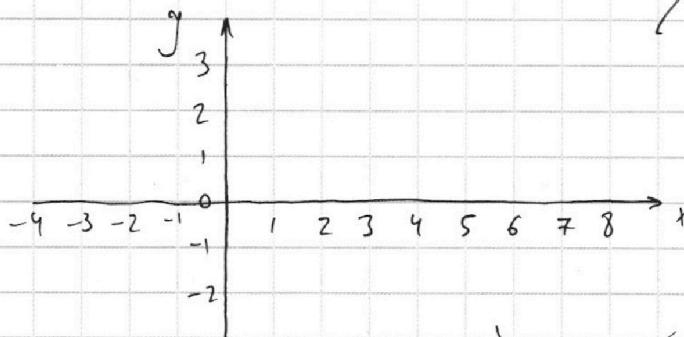
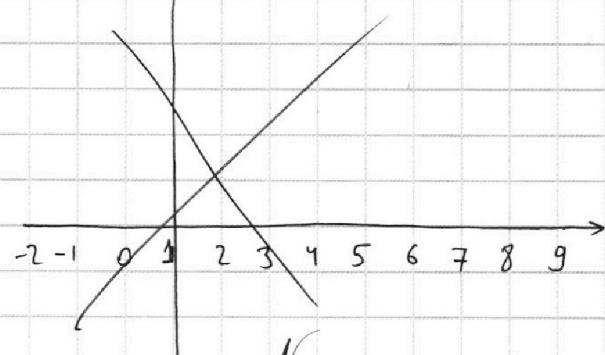
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$n^6 \int dx - y + 10b = 0 \quad (I)$$

$$(x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (II)$$

$$(I): y = ax + 10b.$$

$$(II): \begin{array}{l} (x+8)^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 - 4 \end{array}$$



$$\frac{2(y_2 - y_1)}{12 - (y_2 - y_1)} = \frac{-2((2 - y_2 - y_1))}{12 - (y_2 - y_1)} + 24 = -2 + \frac{24}{12(y_2 - y_1)}$$

$$\approx \frac{26}{41}, \quad 2 \cdot \left(\frac{26}{41}\right)^2 - 5 \cdot \frac{26}{41} + 3 = \frac{8}{9} - \frac{20}{9} + 3 = \frac{15}{9}.$$

$$4 \cdot \frac{8}{9} + \frac{12}{9} + 1 = \frac{39}{9}.$$

$$\frac{(15 + \sqrt{39})^6}{3} = \frac{g}{3}. \quad (15 + \sqrt{39})^6 \approx 10.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

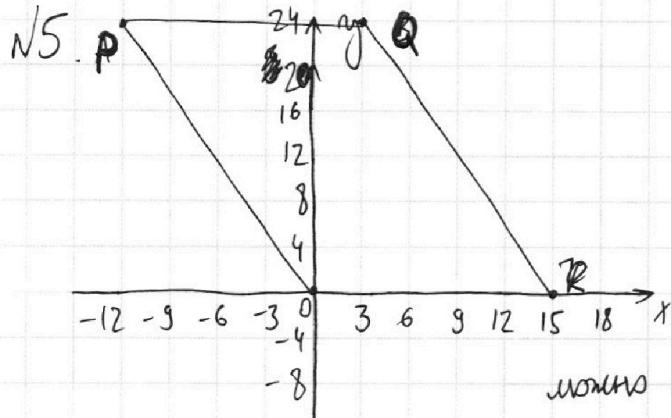
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 12 \leq x \leq 15 \\ 0 \leq y \leq 24 \end{cases}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

т.к. через любые две точки можно пройти прямую и наклоном

также оценю, т.к.: $y = kx + b$, где $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{k} + 1 \right) (y_2 - y_1) = 12 \\ (2+k)(x_2 - x_1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \\ k = \frac{12}{y_2 - y_1} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = \frac{2y_2 - 2y_1}{12 - (y_2 - y_1)} \\ k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \Delta x = 7 & k = -\frac{2}{7}, \Delta y = -2 \\ \Delta x = 8 & k = -\frac{1}{4}, \Delta y = -4 \\ \Delta x = 9 & k = \\ \Delta x = 10 & k = \\ \Delta x = 11 & k = \\ \Delta x = 12 & k = \\ \Delta x = 13 & k = \end{array}$$

Пусть $\begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases}$. Тогда:

$$\Delta x = 1 : k = 10, \Delta y = 10$$

$$\Delta x = 2 : k = 4, \Delta y = 8$$

$$\Delta x = 3 : k = 2, \Delta y = 6$$

$$\Delta x = 4 : k = 1, \Delta y = 4$$

$$\Delta x = 5 : k = 0,4, \Delta y = 2$$

$$\Delta x = 6 : k = 0, \Delta y = 0 \quad \text{но } \Delta y$$

показавшим образом получим k , наклоном, тогда
ко-во накр. $24 \cdot 2 = 48$ (коэффициент наклона гипотенузы)

Ответ: ~~8~~ 48 накр. 48 накр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ