



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} db : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{N}. \text{ Пусть } \begin{cases} m = \frac{ab}{2^{14} \cdot 7^{10}} \\ n = \frac{bc}{2^{17} \cdot 7^{17}} \\ k = \frac{ac}{2^{20} \cdot 7^{37}} \end{cases}$$

$m, n, k \in \mathbb{N}$. Тогда $a^2/b^2c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk$, т.к. $\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{N} \\ m, n, k \in \mathbb{N} \end{cases}$, то

$abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2mnk}$, т.к. $ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$, то $abc : 2^{20} \cdot 7^{37}$,

а значит $\sqrt{2mnk} : 7^5$, т.к. $abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2mnk}$.

$abc - \min$, если $\sqrt{2mnk} - \min$, ~~тогда~~ тогда $\begin{cases} mnk : 2^{(I)} \\ \sqrt{2mnk} : 7^{5(II)} \end{cases}$

(I) должно выполняться, т.к. $abc \in \mathbb{N}$, а значит и $\sqrt{2mnk} \in \mathbb{N}$,

тогда ~~$abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2 \cdot (2 \cdot 7^{10})^1} = 2^{26} \cdot 7^{37}$~~

Меньше не может быть, т.к. иначе $\sqrt{2mnk} \notin \mathbb{N}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2} \frac{a}{b}$ - несокр. $\frac{(a+b)}{a^2-6ab+b^2}$ ~~не~~

m - натур., если $\frac{(a+b)}{a^2-6ab+b^2} = 1$, т.е. $m = (a+b) = a^2 - 6ab + b^2$.

$a+b = a^2 - 6ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - a(6b+1) + b^2 - b = 0$.

$D = (6b+1)^2 - 4(b^2-b) = 32b^2 + 16b + 1$.

$a = \frac{6b+1 \pm \sqrt{32b^2+16b+1}}{2}$, т.к. $a, b \in \mathbb{N}$, то $32b^2 + 16b + 1$

$\begin{cases} (a+b) = mk \\ a^2 - 6ab + b^2 = mn \end{cases}$, где $\frac{k}{n}$ - несокр. $\frac{a}{b}$, т.е. $\text{НОД}(k, n) = 1$ и $\text{НОД}(a, b) = 1$.

$a = mk - b$, $m, n, k \in \mathbb{N}$.

$m^2k^2 + b^2 - 2mkb - 6mkb + 6b^2 + b^2 = mn$

$m^2k^2 - 8mkb + 8b^2 - mn = 0 \Leftrightarrow k^2 \cdot m^2 - m(8kb+n) + 8b^2 = 0$.

$D = (8bk+n)^2 - 4k^2 \cdot 8b^2 = 64b^2k^2 + n^2 + 16bkn - 32b^2k^2 = 16(2b^2k^2 + bkn) + n^2$

$f'(m) = 2mk - 8kb + n$ ~~$f'(m) = 0$~~ $f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8bk-n}{2k} = 4b - \frac{n}{2k}$

$(a+b) = mk = \frac{8bk-n}{2}$

m натур., если $a^2 - 6ab + b^2 : (a+b)$, т.е. $(a+b)^2 - 8ab : (a+b) \Rightarrow 8ab : (a+b)$, т.е.

$8ab = ka + kb \Leftrightarrow b = \frac{a \cdot k}{8a+k}$, где $a, k \in \mathbb{N}$, т.е.

$\begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \end{cases}$, тогда $m = (a+b) = 10$.

Ответ: $m = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

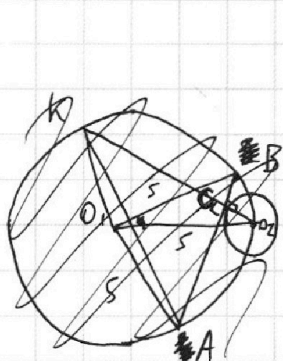
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O_1 - ^{центр} сфера Ω
 O_2 - центр ω

т.к. AB - кас. ω , то $\angle O_2CB = 90^\circ$ (т.к. O_2C - радиус ω)
 $(O_2C) \cap \Omega = \{K\}$

$$AC \cdot CB = O_2C \cdot CK \quad (\text{хорды в } \Omega)$$

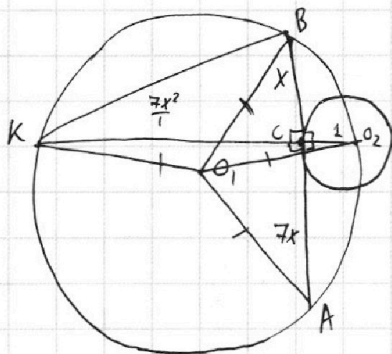
Пусть $CB = x$, тогда из условия $\frac{AC}{CB} = 7 \quad AC = 7x$.

$O_2C = 1$, как радиус ω . Тогда $7x \cdot x = 1 \cdot CK \Leftrightarrow CK = \frac{7x^2}{1}$.

Проведем AK : $\angle ACK = 90^\circ$, как вершинами с углом $\angle O_2CB$

$$\frac{\angle AK + \angle O_2B}{2} = 90^\circ (= \angle KCA), \text{ т.е.}$$

$$\angle AK + \angle O_2B = \angle KB + \angle O_2A = 180^\circ$$



$$\begin{cases} BK = \frac{x}{1} \sqrt{49x^2 + 1} \\ \angle O_2A = \sqrt{49x^2 + 1} \end{cases} \text{ по т. Пифагора.}$$

по т. косинусов:

$$\begin{cases} BK^2 = O_1K^2 + O_1B^2 - 2O_1K \cdot O_1B \cdot \cos \angle KO_1B \\ O_2A^2 = O_1O_2^2 + O_1A^2 - 2O_1O_2 \cdot O_1A \cdot \cos \angle O_2O_1A \end{cases} \text{ где}$$

$\angle KO_1B + \angle O_2O_1A = 180^\circ$ (т.к. $\angle KB + \angle O_2A = 180^\circ$).

$$\begin{cases} \frac{x^2}{1} (49x^2 + 1) = 25 - 50 \cdot \cos \angle KO_1B \\ 49x^2 + 1 = 25 - 50 \cdot \cos \angle O_2O_1A \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{1} = \frac{1 - 2 \cos \angle KO_1B}{1 + 2 \cos \angle KO_1B}, \text{ т.е.}$$

$$x = \sqrt{\frac{1 - 2 \cos \angle KO_1B}{1 + 2 \cos \angle KO_1B}} \cdot 1 \quad \text{или} \quad x = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos \angle O_2O_1A}{1 - 2 \cos \angle O_2O_1A}} \cdot 1$$

$$AK = \frac{7x}{1} \sqrt{49x^2 + 1} = \frac{7x}{1} \sqrt{x^2 + 1}, \text{ тогда } x = \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \cos 90^\circ}{1 - 2 \cos 90^\circ}} \neq 1.$$

$$AB = 8x = 8.$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N4. \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x.$$

Рассм. каждую часть: При $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \end{cases} \text{ - нет решений, т.к. } \begin{cases} 2x^2+2x+1=0 \\ D=-4 < 0. \end{cases}$$

При $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} &= \frac{(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1})(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} \\ &= \frac{2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = \frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}}. \end{aligned}$$

Имеем: $\frac{2-7x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2-7x) \frac{1 - \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-7x=0}{\sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1}} \quad \left[\begin{array}{l} 2-7x=0 \text{ (I)} \\ \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \text{ (II)} \end{array} \right]$$

$$\text{(II): } \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x-1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1} \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{т.к. } \begin{cases} 2x^2+2x+1 \geq 0 \\ f(x) = 2x^2+2x+1 \\ f'(x) = 4x+2, f'(x)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } 2x^2+2x+1 \geq 0, \text{ то}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 7x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \\ x \geq \frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 41x^2 - 22x - 3 = 0 \text{ (III)} \\ \frac{1}{7} \leq x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

$$\text{(IV): } 41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$D = (-22)^2 - 4(-3) \cdot 41 = 484 + 492 = 976$$

$$\begin{cases} x = \frac{22 + \sqrt{976}}{2 \cdot 41} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{22 - \sqrt{976}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}, \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}, \text{ т.к. } \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < 0.$$
$$\begin{cases} \frac{1}{7} \leq x \leq 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7} \text{ мм} \quad x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

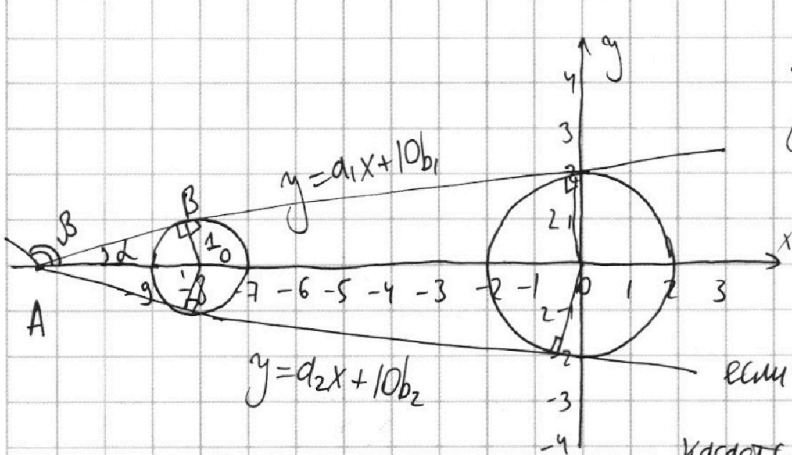
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



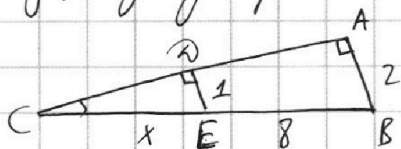
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (I) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 & (II) \end{cases}$$

$$(I): y = ax + 10b.$$

Два решения дадут, если прямая $y = ax + 10b$ касается обеих окружностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ если}$$

она пересекает одну из них, то решений бесконечно кол-во, если касается только одной, то 1 решение, если не касается ни одной, то 0 решений, т.е. существует два решения (две касательные)



$\triangle ACE \sim \triangle ACB$ по 2 углам, т.е.

$$\frac{CE}{AB} = \frac{CB}{CB} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{8}{x+8} \Rightarrow x = 8.$$

Тогда $A(-16; 0)$ ~~$O = -16x + 6a$~~ $B = 8a$.

$$O = -(6a_1 + 10b_1) \Rightarrow 10b_1 = 16a_1. \text{ Тогда } y = a_1x + 16a_1.$$

Или имеем:
$$\begin{cases} y = a_1x + 16a_1 & (\text{точка на окружности}) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$
 ~~из уравнения~~

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{AB}, \text{ т.е. } a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{OB}{\sqrt{AO^2 - OB^2}} \text{ (по т. Пифагора } AB = \sqrt{AO^2 - OB^2}, \text{ т.к. } OB \text{ - радиус кас.)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{64 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{63}}, \text{ т.е. } a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}.$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{63}}. \text{ Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{d^2-6ab+b^2}$$

$\frac{a}{b}$ - несократима

$$\text{НОД}(a,b) = 1.$$

$$\text{НОК}(a,b) = ab.$$

$$a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N}.$$

$$m(a+b) = d^2 - 6ab + b^2 \quad m = ?$$

$$d^2 - 6ab - am + b^2 - bm = 0$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = \frac{2x^2-5x+3-2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} =$$

$$= \frac{-7x+2}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x, \text{ т.е. } 2 = 7x - \text{решение} \\ x = \frac{2}{7}.$$

$$\begin{array}{r} 528 \\ 264 \\ 132 \\ 66 \\ 33 \\ 3 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 11 \\ 13 \\ 1 \end{array}$$

~~если нет, то $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$ - нет решения!~~

$$\begin{array}{r} 484 \\ +492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x^2-5x+3=0 & D=25-24=1 \\ 2x^2+2x+1=0 & D=4-8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 492 \\ +36 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 \\ \hline 164 \\ x^3 \\ \hline 1812 \\ 3 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \quad 2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$-7x+1 = -2\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$49x^2+14x+1 = 8x^2+8x+4$$

$$41x^2+6x-3=0 \quad D=36+4 \cdot 3 \cdot 41 = 36+492=528$$

$$x = \frac{-6 \pm 4\sqrt{33}}{2 \cdot 41} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{33}}{41} \quad -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f = 4x+2 \quad f' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

$$41x^2-22x-3$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ x 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$2x^2-5x+3 \geq 0.$$

$$D = 25-24=1.$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ x 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$2\left(x^2 - 2.5x + \frac{25}{16}\right) \quad 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$$3 - \frac{25}{8} = 2 \cdot 2 + \frac{25}{8} = \frac{29}{8}$$

$$-\frac{1}{8}$$

$$\sqrt{2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}} - \sqrt{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}} = 2 - 7x$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \quad a, b - ? \text{ Для } a \text{ найдется } b, \text{ что есть 2 решения}$$

$$\frac{19}{85} + \frac{36}{85}$$

$$1+x^2$$

$$155$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2\sqrt{61}$$

$$\frac{41}{164} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{164}{164} = 1$$

$$7 \leq \sqrt{61} < 8$$

$$11 + 2\sqrt{61} \approx 11 + 2 \cdot 7.5 = 26$$

$$\frac{26}{41}$$

$$49x^2 + x^2 - 149x^2 = 14x^2$$

$$= 2^7(1+x^2)$$

$$1 - 2\sqrt{61} \approx 1 - 2 \cdot 7.5 = -15$$

$$b = \frac{-16 + \sqrt{2(1+x^2)}}{69}$$

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3} + 3 = \frac{8}{9} - \frac{10}{3} + \frac{45}{9} = \frac{85}{9}$$

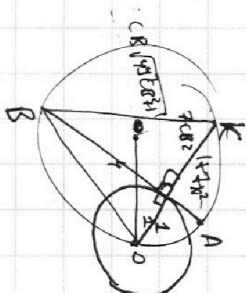
$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{8 + 28 + 45}{45} = \frac{81}{45} = \frac{9}{5}$$

$$2 \left(\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \right)^2 = \frac{2(121 + 122 + 44\sqrt{61})}{1681} = \frac{486 + 44\sqrt{61}}{1681}$$

$$45x^2 + 3 = 2x + 1$$

$$\frac{486 + 44\sqrt{61}}{1681}$$

$$\frac{5 \cdot 41(11 + 2\sqrt{61})}{1681} + 3$$



$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1} \quad AB - ?$$

$$AC \cdot CB = OC \cdot CK$$

$$7 \cdot CB^2 = CK$$

$$\sqrt{49CB^2 + CB^2} = CB \sqrt{49CB^2 + 1}$$

$$CB \sqrt{49CB^2 + 1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4CB^2(49CB^2 + 1) = 25 \Leftrightarrow$$

$$196CB^4 + 4CB^2 - 25 = 0 \quad \Rightarrow 16 + 19600 = 19616$$

$$\frac{49}{4} + \frac{3}{4} = \frac{52}{4} = 13$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

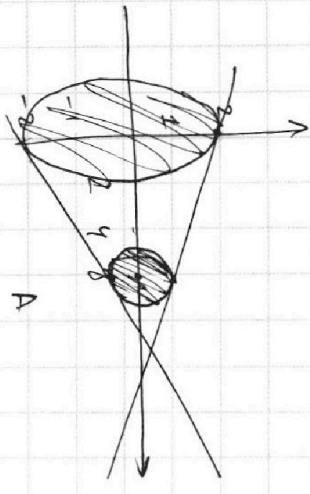
МФТИ



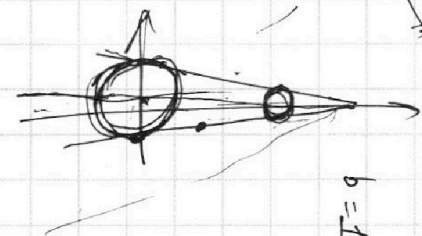
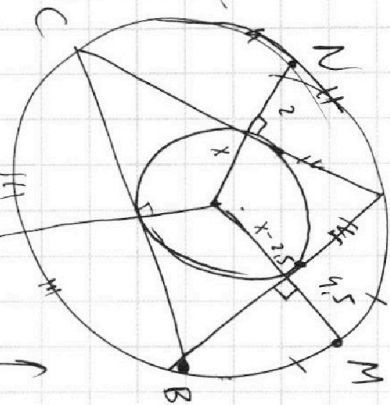
черновик

$0 = -16k + b$ $b = -16k$

$ax - ay + 10b = 0$
 $(x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$



$a^2 - 6ab + b^2 = \dots (a+b)$, т.е. $m = a+b$
 $y = kx - 16k$
 $y^2 + x^2 = ?$



$(x+8)^2 + y^2 - 1 > 0$
 $x^2 + y^2 - 4 < 0$
 $(x+8)^2 + y^2 - 1 < 0$
 $x^2 + y^2 - 4 > 0$

$x^2 + y^2 + 16x + 63 > 0$
 $x^2 + y^2 < 4$

$x > \frac{-63}{16}$
 $ab \geq 2\sqrt{ab}$

$(ab)^2 - 8ab$

можно считать на m.

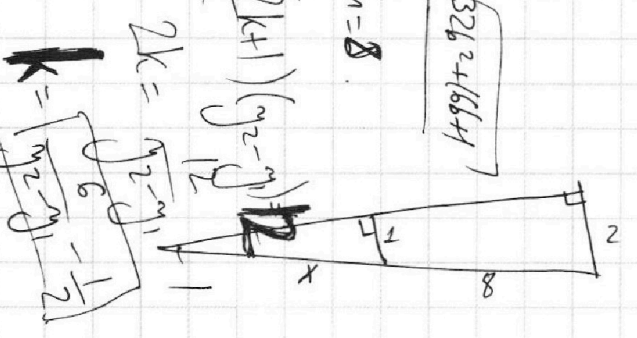
$(ab)^2 - 8ab \geq -4ab$
 m найдено, если $ab = (ab)^2 - 8ab$

$b = 1$: $q = \frac{7+7}{2} = 7$

$a = \frac{6b+1 + \sqrt{32b^2 + 16b+1}}{2}$
 $m = 8$

$\frac{7+1}{8} = \frac{8}{8} = 1$
 $\frac{7+7}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$
 $\frac{14+8}{2} = \frac{22}{2} = 11$

$y = 9.1x + \dots$
 $y = 4 - x^2$



$2(x_1 - x_2) + y_2 y_1 = 12$
 $2(x_1 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 12$

$x^2 + y^2 + 16x + 63 = 0$

$A(-16; 0)$

$k = \frac{1}{2} = \frac{x}{x+8}$
 $x = 8$
 $0 = -16k + b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{aligned}
 db &= 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k & a^2 b^2 c^2 &= mnk \cdot 2^{51} \cdot 7^{66} & 32 \\
 bc &= 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot n & abc &= 7^{30} \cdot 2^{25} \cdot \sqrt{2mnk} \\
 ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot m & \text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, & \text{то } \sqrt{2mnk} \in \mathbb{N},
 \end{aligned}$$

~~a) задача~~ $m, n, k \in \mathbb{N}$ и $\sqrt{2mnk}$ - минимально.

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2}$$

$$\sqrt{2mnk} \geq \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}} = \frac{4mnk}{mk + 2mn + 2nk + 2mk}$$

$\min(abc)$, если $\sqrt{2mnk} = \sqrt{4}$, т.е. $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ k=2 \end{cases}$, тогда $abc = 7^{30} \cdot 2^{26}$.

$$a^2 - 6ab + b^2. \quad \Delta = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2.$$

$$a = \frac{6b \pm 4\sqrt{2}b}{2} = \frac{3b \pm \sqrt{2}b}{1} \quad (a - 3b - \sqrt{2}b)(a - 3b + \sqrt{2}b).$$

$(a+b)^2 - 8ab$. $\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$ m -наиб, если $\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} = 1$.

$$\Leftrightarrow a^2 - 6ab - a + b^2 - b = 0. \quad \Delta = 36b^2 + 12b + 1 - 4b^2 + 4b = 32b^2 + 16b + 1$$

$$a = \frac{6b + 1 \pm \sqrt{32b^2 + 16b + 1}}{2}$$

$32b^2 + 16b + 1$ - полный квадрат.
 $b=0. \quad b=1. \quad b=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

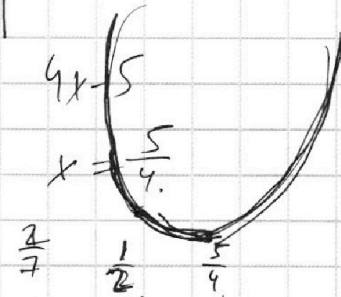
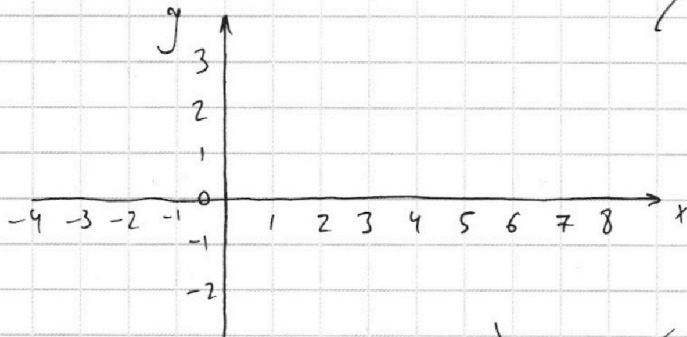
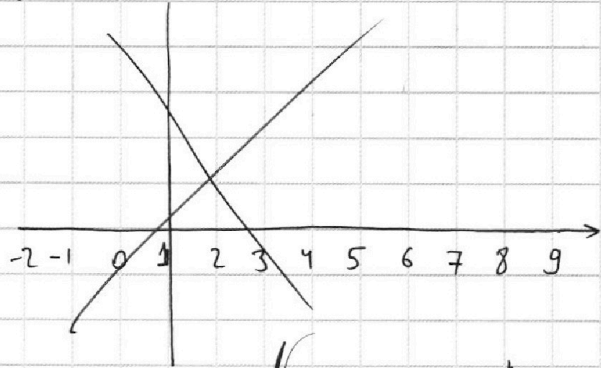
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6. $\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (I) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (II) \end{cases}$ *черновик*

(I): $y = ax + 10b$

(II): ~~$(x+8)^2 + y^2$~~
 ~~$x^2 + y^2 - 4$~~



$$\frac{2(y_2 - y_1)}{12 - (y_2 - y_1)} = \frac{-2(12 - (y_2 - y_1)) + 24}{12 - (y_2 - y_1)} = -2 + \frac{24}{12 - (y_2 - y_1)}$$

$$\approx \frac{26}{41} \quad 2 \cdot \left(\frac{26}{41}\right)^2 - 5 \cdot \frac{26}{41} + 3 = \frac{8}{9} - \frac{20}{9} + 3 = \frac{15}{9}$$

$$4 \cdot \frac{8}{9} + \frac{12}{9} + 1 = \frac{39}{9}$$

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{39}}{3} = \frac{15}{3}$$

$$\sqrt{15} + \sqrt{39} \approx 10$$

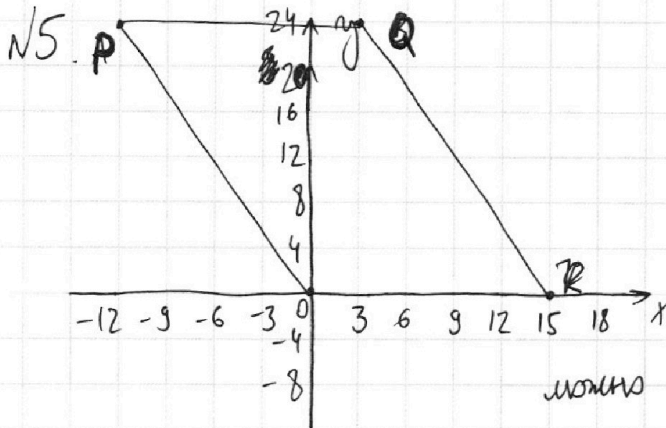
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} -12 \leq x \leq 15 \\ 0 \leq y \leq 24 \end{cases}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Т.к. через любую две точки можно провести прямую и прямую

только одну, то: $y = kx + b$, где

$$\begin{cases} k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}, \text{ где}$$

$$\begin{cases} k_{QR} = 2 = k_{PQ} \\ k_{PR} = 0 = k_{RQ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{k} + 1\right)(y_2 - y_1) = 12 \\ (2 + k)(x_2 - x_1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2$$

$$\begin{cases} k = \frac{1}{y_2 - y_1} - \frac{1}{2} \\ k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2y_2 - 2y_1}{12 - (y_2 - y_1)} \\ k = \frac{12}{x_2 - x_1} - 2 \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases}$. Тогда:

$\Delta x = 1: k = 10 \quad \Delta y = 10$

$\Delta x = 2: k = 4 \quad \Delta y = 8$

$\Delta x = 3: k = 2 \quad \Delta y = 6$

$\Delta x = 4: k = 1 \quad \Delta y = 4$

$\Delta x = 5: k = 0,4 \quad \Delta y = 2$

$\Delta x = 6: k = 0 \quad \Delta y = 0$ (но Δy)

- $\Delta x = 7: k = -\frac{2}{7} \quad \Delta y = -2$
- $\Delta x = 8: k = -\frac{1}{2} \quad \Delta y = -4$
- $\Delta x = 9: k = \dots$
- $\Delta x = 10: k = \dots$
- $\Delta x = 11: k = \dots$
- $\Delta x = 12: k = \dots$
- $\Delta x = 13: k = \dots$

Максимальным образом найдем k , прямая, тогда кол-во нар: $24 \cdot 2 = 48$ (каждая прямая дает две точки)

Ответ: ~~54~~ нар. 48 нар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

