МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab \vdots 2^{14}7^{10}$, $bc \vdots 2^{17}7^{17}$, $ac \vdots 2^{20}7^{37}$, тогда:

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{51}7^{64}$, т.е. $(abc)^2 \vdots 2^{51}7^{64}$

abc ~~будет~~ $\in \mathbb{N}$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, тогда abc будет минимальным натур. числом после $\sqrt{2^{51}\cdot 7^{64}} = 7^{32}\cdot 2^{25}\sqrt{2}$, ~~состоящим~~ являющимся произведением только из 2 и 7, и это будет $7^{32}\cdot 2^{26}$

Ответ: abc - минимальное значение это $7^{32}\cdot 2^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \Leftrightarrow$$

ОДЗ
$2x^2-5x+3\geq 0$
$2x^2+2x+1\geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2-5x+3+(7x-2)}=2-7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2-5x+3-(2-7x)}=2-7x \Leftrightarrow$$

$t=2x^2-5x+3$
$m=2-7x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t}-\sqrt{t-m}=m \Leftrightarrow \sqrt{t}=m+\sqrt{t-m} \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \cancel{t}=m^2+2m\sqrt{t-m}+\cancel{t}-m \Leftrightarrow m^2-m+2m\sqrt{t-m}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=-2\sqrt{t-m} \\ m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1\leq 0 \\ m^2-2m+1=4t-4m \end{cases} \\ m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\leq 1 \\ m^2+2m+1=4t \end{cases} \\ m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\leq 1 \\ (m+1)^2=4t \end{cases} \\ m=0 \end{array}\right.$$

$t=2x^2-5x+3$
$\Leftrightarrow$
$m=2-7x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-7x\leq 1 \\ (2-7x+1)^2=4(2x^2-5x+3) \end{cases} \\ 2-7x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \overset{\geq}{\cancel{\leq}} \frac{1}{7} \\ 9-42x+49x^2= \Leftrightarrow \\ =8x^2-20x+12 \end{cases} \\ x=\cancel{\frac{4}{2}}\frac{2}{7} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq \frac{1}{7} \\ 41x^2-22x-3=0 \end{cases} \\ x=\frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq \frac{1}{7} \\ x=\frac{22\pm\sqrt{121\cdot 4+4\cdot 3\cdot 41}}{2\cdot 41} \end{cases} \\ x=\frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

↑
См. прод.
след. лист.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{22 \pm 2\sqrt{121 + \cancel{164}\,123}}{2 \cdot 41} \end{cases} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{11 \pm \sqrt{\cancel{285}\;244}}{41} \end{cases} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} \end{cases} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right. \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right.$$

$// \frac{11-2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7} \Leftrightarrow 77 - 14\sqrt{61} < 41 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36 < 14\sqrt{61} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36^2 < 14^2 \cdot 61 \Leftrightarrow$

[illegible]

$\Leftrightarrow 1296 < 11956$ - ис. //

$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \geq \frac{1}{7} \Leftrightarrow 77 + 4\sqrt{61} \geq 41 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{36}_{\geq 0} \geq \underbrace{-4\sqrt{61}}_{\leq 0}$ - ис. //

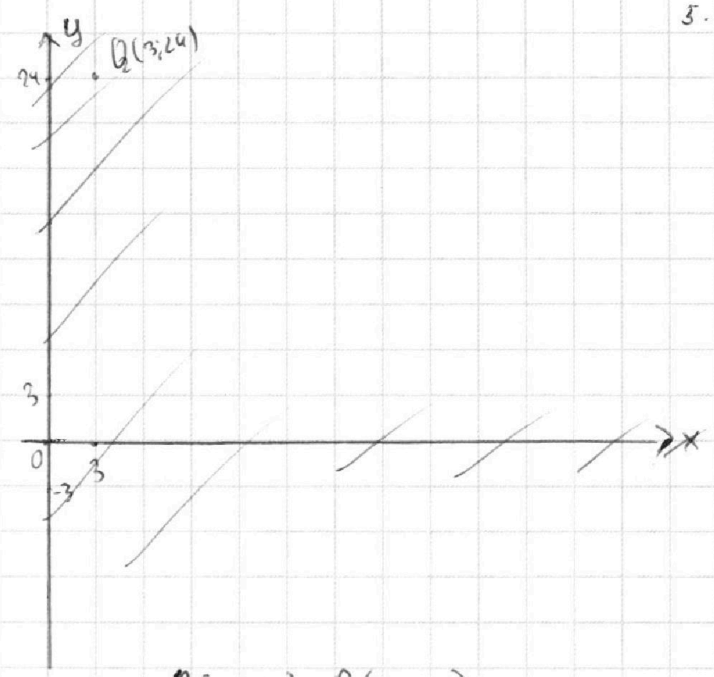
Ответ: $\left\{\frac{2}{7}; \frac{11+2\sqrt{61}}{41}\right\}$

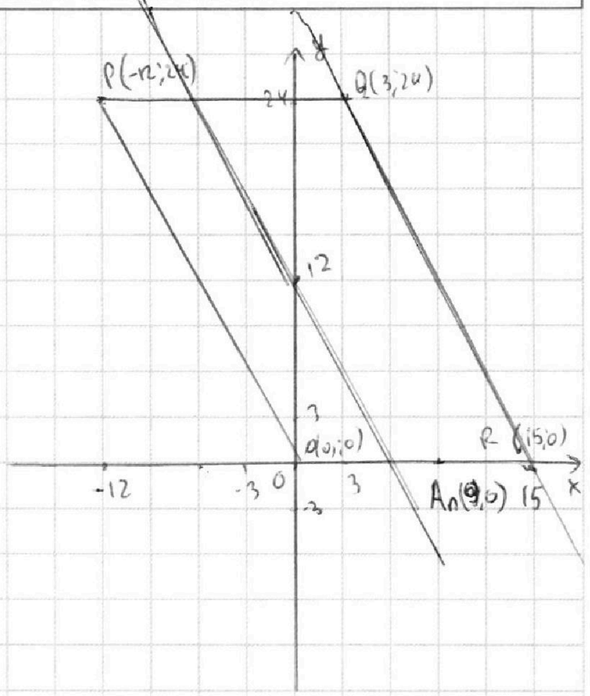
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.





$A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12 \Leftrightarrow 2x_2+y_2-(2x_1+y_1)=12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x_2+y_2=12+(2x_1+y_1)$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12 \Leftrightarrow y_2-y_1=12-2(x_2-x_1)$

построим прямую: $y=12-2x$

A и $B \in PQRO$

тогда нам подходят все такие точки, что $C(x_2-x_1;y_2-y_1)$ лежит на этой прямой

* тогда заметим, что для $A_1(0;0)$ подойдут все B точки с целыми координатами на прям: $y=12-2x$, ~~для~~ для $A_2(1;0)$ все точки на прямой $14-2x=y$, ~~для~~ и т.д. до $A_n=(9;0)$, для которых подойдет $30-2x=y$ и на каждой из этих прямых ~~будет~~ в параллелограмме будет равно кол-во точек $-4\cdot3=12$ //дальше прямая уже не будет входить в параллелограмм//

тогда для 9 точек A_n в сумме будет $12\cdot9=108$

Теперь заметим, что ~~для~~ если мы будем рассматривать точки $B_1(0;0)$; $B_2(-1;2)$; $B_3(-2;4)$ … $B_n(-12;24)$ то для них всех будет по 108 точек, т.е. общ. кол-во $-108\cdot12=1296$

Ответ: 1296 пар точек A и B.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=ax+10b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases}(x+8)^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2\le 4\end{cases} \\ \begin{cases}(x+8)^2+y^2\le 1\\ x^2+y^2\ge 4\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \leftarrow ①$$

$(x+8)^2+y^2\ge 1$ - график всех точек не входящих в круг, с ~~координатами~~ центром в $(-8;0)$ и радиусом 1 и лежащих на окружности с такими же параметрами

$x^2+y^2\le 4$ - график всех точек, лежащих в ~~окр~~ круге с ~~координатами~~ центром в $(0;0)$ и рад. 2

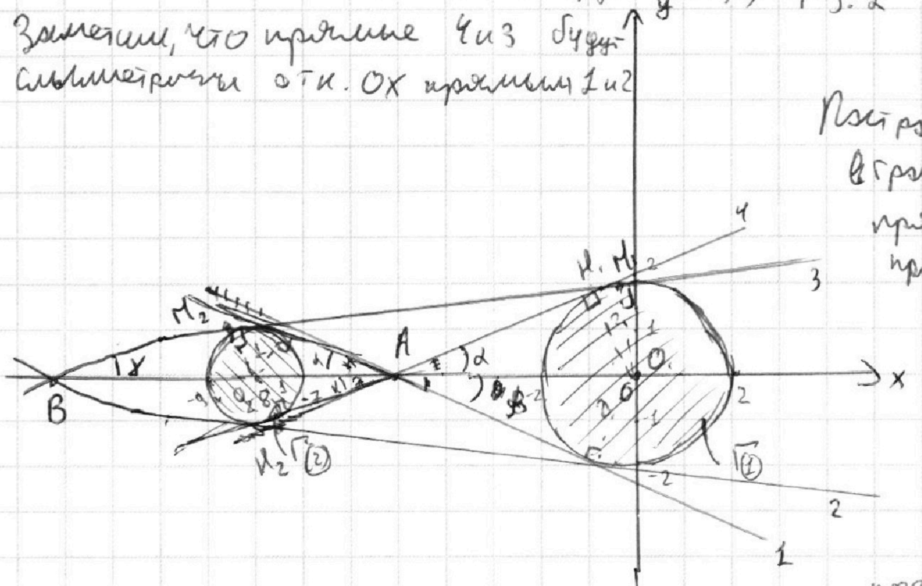
Тогда их пересечение - окружн. в $(0,0)$ с рад. 2

$(x+8)^2+y^2\le 1$ - график всех точек круга с центром в коорд. $(-8;0)$ и рад 1

$x^2+y^2\ge 4$ - график всех точек а не входящих в круг, с центром в $(0,0)$ и рад. 2, но вход. в окружность с такими же параметрами.

Тогда их пересеч. это окружн. в $(-8;0)$ с рад. 1

Заметим, что прямые 4 и 3 будут симметричны отн. Ox прямым 1 и 2



Построим график, тогда в графиками возможных прямых $ax+10b=y$, будут прямые 1, 2, 3, 4 (с граф.)

~~Т.к. они все касаются окружностей то будут им будут принадлежать точки касания, которые подходят под~~

~~расстояние до центра окружности от этой прямой будет равно их радиусу.~~

~~им будут принадлежать точки, подходящие под ур-е:~~ $\begin{cases} ax+10b=y \\ ((x-8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$ ②

$(\cdot)O_2$ - рад окр. с центром в $(-8;0)$

$(\cdot)O_1$ - рад. окр. в с центром в $(0,0)$

$(\cdot)A$ - точка пересечения прямых 4 и 1

~~на~~ в графике ~~$tg\alpha\cdot tg\beta$~~ $=a$, и угол графика прямой с осью OX $1+tg\alpha-tg\beta$

Они пересекутся в одной точке, т.к. симметричны отн. Ox

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

⑥ ~~$\begin{cases} y=ax+10b \\ \left[\begin{array}{l} (x+8)^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$~~ ⇔ ~~$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=ax+10b \\ x^2+16x+64+a^2x^2+20abx+100b^2-1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \\ \end{cases} \end{array}\right.$~~

① проведем высоты b из центров обоих окр. в точки касания с прямыми $\perp$ ~~AM~~, они будут равны радиусам соответсв. окр.
$(O_1K_1$ и $O_2K_2)$

~~[illegible]~~ отн. ох

~~$AO_2=8-AO_1$~~

~~из т. Пифагора: $AO_2^2=A$~~ $\begin{cases} \angle O_2AK_2=\angle O_1AK_1, \text{ (верт.)} \\ \angle O_2K_2A=\angle O_1K_1A \ (=90^\circ) \end{cases}$ ⇒

~~из т. Пифагора:~~

$\Rightarrow \triangle O_2K_2A \sim \triangle O_1K_1A \Rightarrow$

$\Rightarrow \overset{O_2}{AK_2} : \overset{O_1}{AK_1} = O_2K_2 : O_1K_1 = 1:2 \Rightarrow$

$\underset{O_2\ \ O_1}{AK_2+AK_1=8} \Rightarrow \begin{cases} A\overset{O_2}{K_2}=\frac{8}{3} \\ A\overset{O_1}{K_1}=\frac{16}{3} \end{cases}$

из т. Пифагора: $AO_1^2=O_1K_1^2+\underbrace{AK_1}_{\text{обозн за } x}{}^2$, тогда: $\frac{16^2}{3^2}-4=x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{16^2-3^2\cdot4}{3^2}=x^2 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{\sqrt{(16-6)(16+6)}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{22\cdot10}}{3} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{55}}{3}$

тогда $tg\,\alpha=\frac{2}{\left(\frac{2\sqrt{55}}{3}\right)}=\frac{3\sqrt{55}}{55}$

из св-в графика прямой: $ax+10b=y$, $tak=tg\,\alpha$, значит

a может принимать значения $\pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$
в силу симметрии отн. ох

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② В – точка пересечения прямых 3 и 2 с осью OX, они пересекутся в одной точке, т.к. симметричны отн. OX.

проведем высоты из центров на прямую 4 – O_1M_1 и O_2M_2,

Они равны радиусам соот. окр.

Р/м △M_1O_1B и △M_2O_2B

$\angle M_2BO_2$ – общ.
$\angle BM_2O_2 = \angle BM_1O_1 \ (=90^\circ)$ $\Big\} \Rightarrow \triangle BM_2O_2 \sim \triangle BM_1O_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow BO_1 : BO_2 = OM_1 : OM_2 = 2:1 \Rightarrow BO_1 = 2BO_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} BO_1 = BO_2 + O_2O_1 \\ BO_1 = 2BO_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BO_2 = \overset{8}{\cancel{18}} \\ BO_1 = \cancel{8}16 \end{cases}$

из т. Пифагора: $BO_2^2 = M_2O_2^2 + BM_2^2 \Leftrightarrow 8^2 = 1^2 + \overset{BM_2}{\cancel{MO_2}}{}^2 \Leftrightarrow \overset{BM_2}{\cancel{MO_2}} = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$

Тогда $tg\gamma = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{63}}{63}$

из свойств графика $y = ax + 10b$, $tg\alpha = tg\gamma = \frac{\sqrt{63}}{63}$, а значит

в силу симметрии a может принять значения $\pm\frac{\sqrt{63}}{63}$

итого $a \in \left\{\pm\frac{\sqrt{63}}{63}; \pm\frac{3\sqrt{55}}{55}\right\}$

Ответ: $a \in \left\{\pm\frac{\sqrt{63}}{63}; \pm\frac{3\sqrt{55}}{55}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\Leftrightarrow \left(\frac{3\sqrt{4R-9}}{2}\right)^2 \cdot 9 = 9x + 20{,}25 \Leftrightarrow 9(4R-9) = 18x + 40{,}5 \Leftrightarrow$~~

$x = R - 4{,}5$

~~$\Leftrightarrow 36R - 81 = 18R - 18 \cdot 4{,}5 + 40{,}5 \Leftrightarrow 36R - 40{,}5 = 18R - 81 -$~~

Rx

~~$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{R-1}\right)^2 = 2(2R-2) \cdot 2 \Leftrightarrow 4(R-1) = 4(R-1)$~~

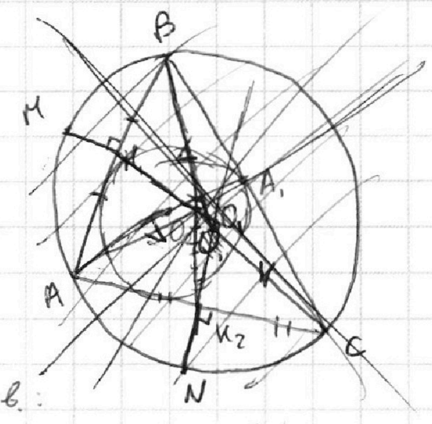
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\breve{AM} = \breve{MB}$, т.к. M-сер. $\breve{AB}$ $\quad AO_2$-?

$\breve{AN} = \breve{NC}$, т.к. ()N-сер $\breve{AC}$



$MK_1 = 4,5$, т.к. MK_1-расст.

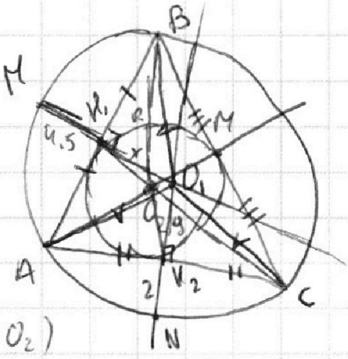
$NK_2 = 2$, т.к. NK_2-расст.

O_1 - центр опис. окр.

1) Тогда по теореме о трёх равн. уд.:

$$\begin{cases} AK_1 = K_1B \\ K_1 \in MO_1 \end{cases}$$

аналог. $\begin{cases} AK_2 = K_2C \\ K_2 \in AC \end{cases}$



2) проведем AO_2 до пересеч. с BC

$(M = BC \cap AO_2)$

тогда, т.к. O_2 лежит на медиане ∠BAC т.к. SO_2-впис. окр.

$BM = MC$

т.к. O_2 -центр пересеч. мед., то $AO_2 : O_2M = 2:1 \Rightarrow AO_2 = \frac{2}{3}AM$

Обозначим K_1O_1 за x, тогда $x + 4,5 = R$

(R-рад. больш. окр.)

обозначим O_1K_2 за y, тогда $y + 2 = R$

2) $\begin{cases} x^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 \text{ (из } \triangle AK_1O_1) \\ y^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = R^2 \text{ (из } \triangle AK_2O_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{R^2} - 9R + 20,25 = \cancel{R^2} - \frac{AB^2}{4} \\ \cancel{R^2} - 4R + 16 = \cancel{R^2} - \frac{AC^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 36R - AB^2 = 81 \\ 16R - AC^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = 36R - 81 \\ AC^2 = 16R - 16 \end{cases} \overset{AC>0,\ AB>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} AB = 3\sqrt{4R-9} \\ AC = 4\sqrt{R-1} \end{cases}$

$AK_2 \cdot K_2C = (2R-2) \cdot 2$

~~из т. о пром. отр.~~ ~~$AK_1 \cdot K_1B = 4,5 \cdot (2x + 4,5)$~~ ~~(из т. о пром. отр. в круге)~~ $\Leftrightarrow$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Leftrightarrow$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x-1 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2+2x+0{,}5+0{,}5} = 2-7x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2(x+0{,}5)^2+0{,}5} = 2-7x \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$

$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (x-1)(2x-3) + 2(x+0{,}5)^2+0{,}5 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0{,}5)^2+0{,}5)} = (2-7x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+3+2x^2+2x+1 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0{,}5)^2+0{,}5)} =$

$\frac{2}{7}-1 \quad \frac{4}{7}-3$

$= 4-28x+49x^2 \Leftrightarrow 4x^2-3x+4-2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0{,}5)^2+0{,}5)} =$

$= 4-28x+49x^2 \Leftrightarrow 45x^2-25x = -2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)} \Leftrightarrow$

$(x-1)(2x-3)$ <0

$\frac{(2\sqrt{61}-30)}{41}$ >0

3

$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (5x(9x-5))^2 = 4(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1) \Leftrightarrow$

$36 \quad 2\times3$

$\Leftrightarrow 25x^2(81x^2-90x+25) = 4(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) \Leftrightarrow$

$\times\begin{array}{r}36\\36\\\hline 216\\108\\\hline 1296\end{array}$

$\frac{22+4\sqrt{61}-123}{41} \Leftrightarrow 25\cdot81\cdot x^4 - 90\cdot25\cdot x^3 + 25^2 \cdot x^2$

$3t^2$

$m^2(m^2+2m+1) + 4t^2 - 4m^2t - 4mt =$

$= t^2 - mt \; 0$

$2x^2-5x+3 = (x-1)(2x-3)$

$m^2(m^2+2m+1) +$

$+3t^2-4m^2t-3mt=0$

$t(3t$

$\times\begin{array}{r}14\\14\\\hline 56\\14\\\hline 196\end{array}$

$2x^2+2x+1 = 2x^2-5x+3+3x-2 = (x-1)(2x-3)+(3x-2) =$

$2x^2-5x+3$

$2x^2+2x+1 =$

$= (2x^2-5x+3) + (7x-2) =$

$\times\begin{array}{r}61\\196\\\hline 1176\\196\\\hline 11956\end{array}$

$(m(m+1)-2t)^2 =$

$(x-1)(2x-3) = -(2-7x)$

$t(t-m) \Leftrightarrow$

t^2-tm

$\Leftrightarrow m^2(m+1)^2+4t^2-$
$-4mt(m+1) =$
$= t(t-m)$

$(x-1)(2x-3) + (x-1)(2x-3) - (2-7x) -$
$-2\sqrt{(x-1)(2x-3)((x-1)(2x-3)-2-7x)} = (2-7x)^2$

$\sqrt{t} - \sqrt{t-m} = m \Leftrightarrow$

$t = m^2 + t - m + 2m\sqrt{t-m} \Leftrightarrow m^2 - m = -2m\sqrt{t-m} \quad m-1 = -2\sqrt{t-m} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2-2m+1 = 4t-4m$

$\Leftrightarrow t+t-m-\sqrt{t(t-m)} = m^2 \Leftrightarrow m^2-2t+m = 2\sqrt{t(t-m)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$m^2+2m+1 = 4t$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a, b, c \in \mathbb{N}$ $\quad ab \vdots 2^{14}7^{10}$, $bc \vdots 2^{17}7^{17}$, $ac \vdots 2^{20}7^{37}$

~~т.к. нам нужно наименьшее значение произведения авс, нам нужно, чтобы: $ab = 2^{14}7^{10}$, $bc = 2^{17}7^{17}$, $ac = 2^{20}7^{37}$, т.к. если они будут больше, то~~

$\frac{a\,3}{16}$ ⑲ $\frac{5}{16}$ 21

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{14}7^{10} \\ bc \vdots 2^{17}7^{17} \\ ac \vdots 2^{20}7^{37} \end{cases} \Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{51}7 \qquad 2^{51}7^{64}$$

$a+b \vdots m$

$8ab \vdots m$

$\frac{a}{b}+1 \vdots \frac{m}{b}$

$8a \vdots \frac{m}{b}$ $\quad \frac{2}{7} = k$

$2\cdot 7k$

$\frac{2+7}{4-6\cdot 2\cdot 7+49} = \frac{9}{53-84} = \frac{9}{-31}$

$a = mt - b$

$8(mt-b)b = km$

$a = bk$ $\quad bk = k+1$

$ab = 2^{14}7^{10}$

$bc = 2^{17}7^{17}$

$ac = 2^{20}7^{37}$

$\frac{a}{c} = \frac{1}{2^3 7^7} \Rightarrow a = c \cdot 2^3 \cdot 7^7$

$13 \cdot 19 =$

$ab \vdots a+b$

$b^2k = bk + b$

$\exists k (a+b) k^2 = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^3 \cdot 7^7}$

$ab = m \cdot 2^{14}7 \quad 8ab \vdots k$

$a+b \vdots m$

$a+b \vdots 8$

$\Rightarrow a = \frac{2^{14}\cdot 7^{10}}{bm} \Rightarrow \frac{2^{14}\cdot 7^{10}\cdot c}{bm} \vdots 2^{20}\cdot 7^{37} \Leftrightarrow$

$8mt - 8b^2 = km$

$\frac{c}{bm} \vdots 2^6 7^{27}$ $\Rightarrow$

$-8b = m(k-8)$

$(a+b)^2 - 8ab \vdots m$

$\vdots m \quad \vdots m$

$\frac{a}{b}$ нечр, $a, b \in \mathbb{N}$

$a = mt + b$

$$\begin{cases} a+b \vdots 8 \Leftrightarrow \\ m > 8 \\ a+b \vdots m \end{cases}$$

$ab \vdots m + b$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a+b \vdots mt \\ 8ab \vdots m \end{cases}$$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+b^2+2ab-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} =$

$\frac{8}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$

$a = kb$

$= \frac{b(k+1)}{b^2(k+1)^2-8b^2k} = \frac{b(k+1)}{b^2((k+1)^2-8k)} =$

$\frac{(a+b)^2-8ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b} =$

$= \frac{k+1}{b((k+1)^2-8k)} =$ $\quad k+1 \vdots m$

$$\begin{cases} b(k+1) \vdots m \\ 8b^2k \vdots m \end{cases}$$

$= \frac{k+1}{b(k^2+2k+1-8k)} = \frac{k+1}{b(k^2-6k+1)}$

$$\begin{cases} a+b = mt \\ 8ab = km \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

O_1-центр ω

O_2-центр Ω

$R_\Omega =$

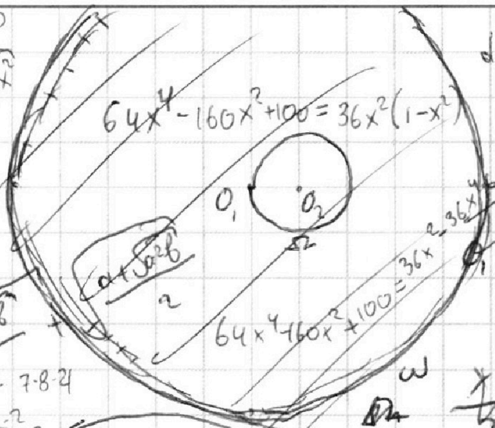
$\Leftrightarrow 25x^4-31x^2+25=0$

$8x^2-10=-6x\sqrt{1-x^2}$ $\Leftrightarrow$

$100x^4-1\overset{24}{96}x^2+100=0$ $\Leftrightarrow$

$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}= \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$

$7\cdot8\cdot2$



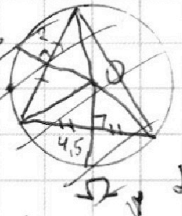
$64x^4-160x^2+100=36x^2(1-x^2)$

$64x^4-160x^2+100=36x^2-36x^4$

$d^2=\frac{1}{4}-x^2$

$8x^2+6x\sqrt{1-x^2}=10$

$7x^2+6x\sqrt{1-x^2}=1+x^2=9$



$x^2=1+d^2$

~~AF·FB=9~~

$2x_2-2x_1+y_2-y_1$

100

$=\frac{3\sqrt{(R-9)(R-1)}-(R-2)(R-4,5)}{R^2}$

$112\cdot2$

$56\cdot2$

$100-64x$

$4\sqrt{2\sqrt{41}-2}=$

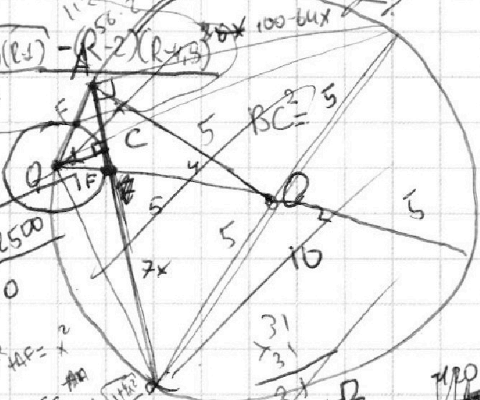
$x=\frac{-3d+\sqrt{16d+63}}{7}$

$=\sqrt{32\sqrt{41}-32}$

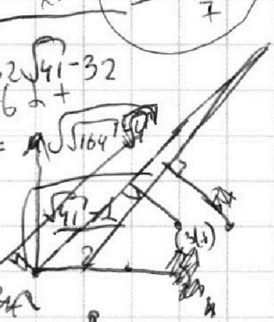
$-6d+$

190

$=\sqrt{\sqrt{164}}$



$BC^2=5$



$x=\frac{\sqrt{41}-1}{2}$

19

19

$\frac{1,5\sqrt{4R-9}}{R}$

$AB=8\sqrt{\frac{\sqrt{41}-1}{2}}$

$t=\frac{31\pm\sqrt{31^2-2500}}{50}$

$\frac{2\sqrt{R-1}}{R}$

$100-64x^2$

$AF^2+AF=x^2$

$AF=$

$\frac{-1\pm\sqrt{1+4x^2}}{2}$

$\frac{R-2}{R}\cdot\frac{R-4,5}{R}$

31

31

31

93

Ω

420

$\frac{-6d\pm2\sqrt{9d^2+7d^2+63}}{7}$

$\frac{-1\pm\sqrt{41}}{2}$

$7x^2-xd+7xd$

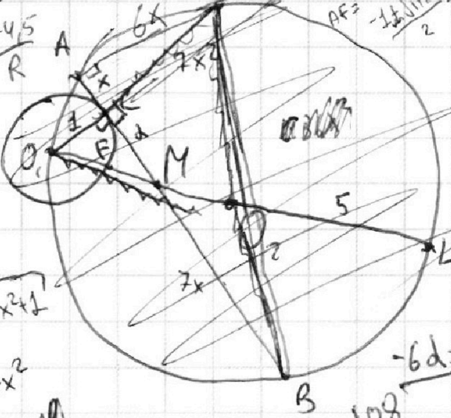
$\sqrt{401_2}$ $x-y=0$

$-d=\frac{0-0+1}{\sqrt{2}}$

$\frac{3-1}{\sqrt2}=\frac{2}{\sqrt2}=7x^2+d^2$

$10-\sqrt{1+d^2}$

961



$LM\cdot MO_1=AM\cdot MB=(x+d)\cdot(7x-d)=9$

$\sqrt{1+d^2}$

$x=\frac{+6d\pm\sqrt{36d^2-}}{}$

$-1=9$

$\frac{-6d\pm\sqrt{36d^2+28(1^2+9)}}{14}$

$(10-\sqrt{1+d^2})\sqrt{1+d^2}=(x+d)(7x-d)\Leftrightarrow$

$7x\sqrt{x^2+1}$

x^4+x^2

108

$\times12$

16

$\Leftrightarrow 10\sqrt{1+d^2}-1-d^2=7x^2+7xd-xd-d^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{1+d^2}-1=7x^2+6xd\Leftrightarrow$

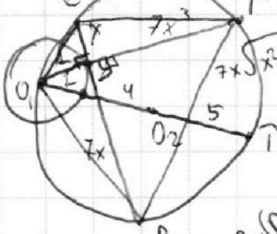
$O_1K\cdot CT=7x^2$

$\begin{cases}(x+8)^2+y^2-1=0\\x^2+y^2-4=0\end{cases}$

$CT=7x^2$

$7x^2+6xd-(d^2+9)$

$\Leftrightarrow 7x^2+6xd-(10\sqrt{1+d^2}-1)=0$



$100=49x^2+49x^4$

1080

216

$\Leftrightarrow 96$

$x=\frac{6d\pm\sqrt{36d^2+28(10\sqrt{1+d^2}-1)}}{}$

$\Leftrightarrow 49t^2+49t-100=0\Leftrightarrow$

$t=x^2$

$\frac{-49\pm49\sqrt{1+40}}{2\cdot49}$

$\Leftrightarrow t=\frac{-49\pm\sqrt{7^4+4\cdot7^4\cdot100}}{2\cdot49}$

$R^2=(R-2)^2+2\sqrt{R-1}^2$

$4(R-1)$

$r^2=R^2$

$\frac{|ax_0+by_0+c|}{}$