



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m можно оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $a, b = 2^{14} 7^{10}$, $b, c = 2^{17} 7^{17}$, $a, c = 2^{20} 7^{37}$, тогда:

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} 7^{64}, \text{ т.е. } (abc)^2 = 2^{51} 7^{64}$$

$abc \in \mathbb{N}$
 abc будет т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, тогда abc будет минимальным

натуральным числом $\sqrt{2^{51} 7^{64}} = 7^{32} 2^{25} \sqrt{2}$, ~~еще~~
натуральным $\sqrt{\quad}$ только из 2 и 7, и это будет $7^{32} 2^{26}$

Ответ: abc - минимальное
значение это $7^{32} 2^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2-5x+3-(7x-2)} = 2-7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2-5x+3-(2-7x)} = 2-7x \Leftrightarrow$$

$$t = 2x^2 - 5x + 3$$

$$m = 2 - 7x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t} - \sqrt{t-m} = m \Leftrightarrow \sqrt{t} = m + \sqrt{t-m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = m^2 + 2m\sqrt{t-m} + t - m \Leftrightarrow m^2 - m + 2m\sqrt{t-m} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = -2\sqrt{t-m} \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 0 \\ m^2 - 2m + 1 = 4t - 4m \Leftrightarrow \\ m=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m^2 + 2m + 1 = 4t \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ (m+1)^2 = 4t \\ m=0 \end{cases} \begin{cases} t = 2x^2 - 5x + 3 \\ m = 2 - 7x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-7x \leq 1 \\ (2-7x+1)^2 = 4(2x^2-5x+3) \Leftrightarrow \\ 2-7x=0 \end{cases} \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ 9 - 42x + 49x^2 = 8x^2 - 20x + 12 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{22 \pm \sqrt{21 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 41}}{2 \cdot 41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

См. прош.
срещ. мет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(=)

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{22 \pm 2\sqrt{21 + 164} \cdot 123}{2 \cdot 41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{11 \pm \sqrt{285}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases} (=)$$

(=)

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

(=)

$$\begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \\ // \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \end{cases}$$

обз

$$\begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7} (=) 77 - 14\sqrt{61} < 41 (=)$$

$$(=) 36 < 14\sqrt{61} (=)$$

$$(=) 36^2 < 14^2 \cdot 61 (=)$$

~~не выполняется~~

$$(=) 1296 < 11956 - \text{н.с.}$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \geq \frac{1}{7} (=) 77 + 4\sqrt{61} \geq 41 (=)$$

$$(=) \frac{36 \geq -4\sqrt{61} - \text{н.с.}}{30 \leq 0}$$

Ответ: $\left\{ \frac{2}{7}, \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \right\}$

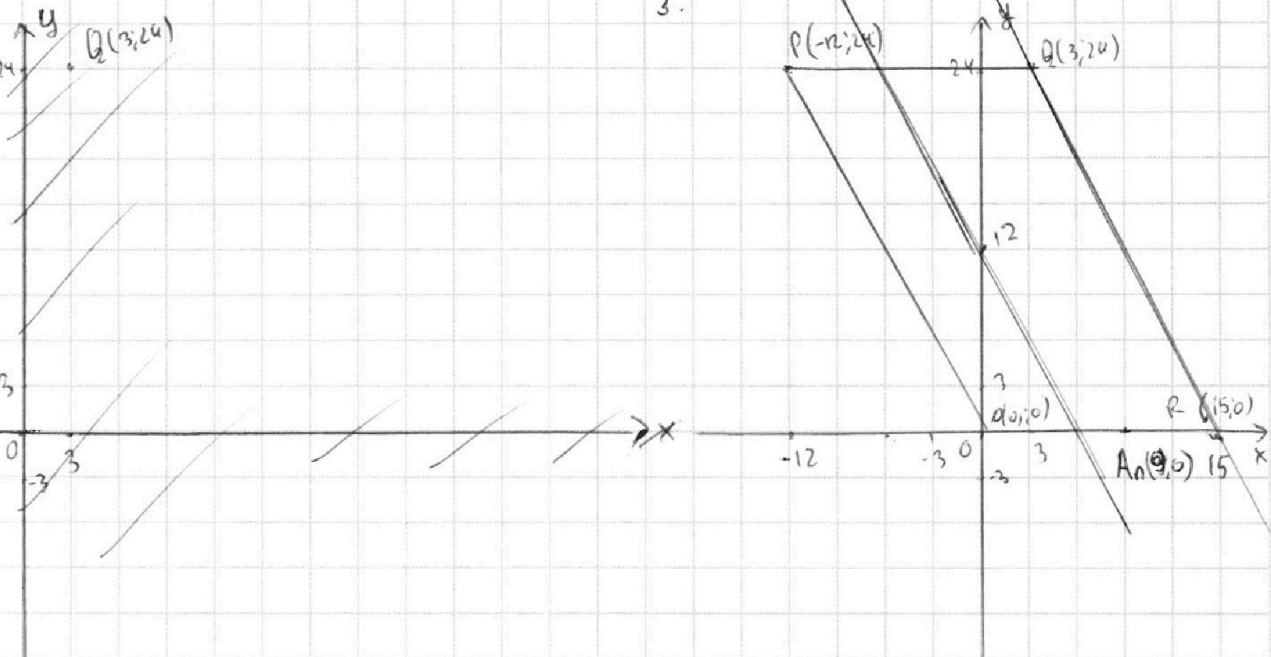
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow 2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_2 + y_2 = 12 + (2x_1 + y_1)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = 12 - 2(x_2 - x_1)$$

найдем прямую: $y = 12 - 2x$

$A_1 B E P A_0$

тогда нам подходит все такие точки, как $C(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

лежит на этой прямой

и тогда заметим, что для $A_1(0, 0)$ подходит все точки

с любым изрезанием на прямой: $y = 12 - 2x$, для

для $A_2(1, 0)$ все точки на прямой $12 - 2x = y$, для и

т.е. для $A_n(1, 0)$, для которых подходит $30 - 2x = y$

и мы получим из этих прямых будет в произведе-
не будет входить в партию, поэтому будет равна исп. в точке $-4 \cdot 3 = 12$

тогда для 9 точек A_n все будет $12 \cdot 9 = 108$

Теперь заметим, что если мы будем рассматривать точки

$B_1(0, 0); B_2(-1, 2); B_3(-2, 4) \dots B_n(-12, 24)$ то для них

всех будет по 108 точек, т.е. всего исп. в $-108 \cdot 12 = 1296$

Ответ: 1296 пар точек A и B .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=ax+10b \\ \begin{cases} (x+8)^2+y^2-1 \geq 0 & \text{--- (1)} \\ x^2+y^2 \leq 4 \\ (x+8)^2+y^2-1 \leq 1 \\ x^2+y^2 \geq 4 \end{cases} \end{cases}$$

$(x+8)^2+y^2 \geq 1$ - график всех точек не входящих в круг, с центром в $(-8; 0)$ и радиусом 1

$x^2+y^2 \leq 4$ - график всех точек, лежащих в ~~от~~ круге с центром в $(0; 0)$ и рад. 2

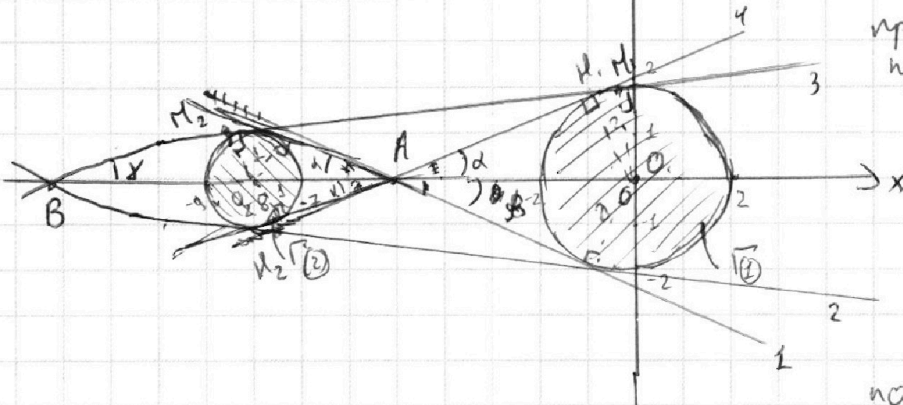
$(x+8)^2+y^2 \leq 1$ - график всех точек круга с центром $(-8; 0)$ и рад. 1

$x^2+y^2 \geq 4$ - график всех точек ~~а не~~ входящих в круг, с центром в $(0; 0)$ и рад. 2

Заметим, что прямые χ и β будут симметричны отн. ОХ и прямой χ и β

в окружность (станете перпендикулярны).

Построим график, тогда в графиках возьмем прямые $ax-y+10b=y$, дадут прямые 1, 2, 3, 4 (с график.)



т.е. они все касаются окружности то будут или будут перпендикулярны, которые пойдут под

расстояние до осей рав окружности от этой прямой будет равна их радиусу.

или будут перпендикулярны, тогда пойдут под углом α $\begin{cases} ax-y+10b=y \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \end{cases}$

- (1) χ_2 - рад. окр. с центром в $(-8; 0)$
- (2) χ_1 - рад. окр. с центром в $(0; 0)$

(A) - точка пересечения прямых χ и β на прямой χ $\begin{cases} ax-y+10b=y \\ ax-y+10b=0 \end{cases}$ \Rightarrow $\begin{cases} ax-y+10b=y \\ ax-y+10b=0 \end{cases}$ они перпендикулярны в точке, симметричны отн. ОХ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(5)
$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+9)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(1) проведем касан. в ц. центров обеих оуп. в точку касан. с касательной L к A_1 , они будут равны радиусам соотв. оуп. (O_1K_1 и O_2K_2)

~~из центра A_2 проведем касан. к A_1 в точку K_3~~
 ~~$AK_3 = 8 - AK_1$~~

из ц. A_2 проведем: $AO_2^2 = AK_1^2 + O_1K_1^2$ $\left\{ \begin{array}{l} \angle O_2AK_1 = \angle O_1AK_1, \text{ (верт.)} \\ \angle O_2K_2A = \angle O_1K_1A (=90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2K_2A \sim O_1K_1A \Rightarrow$

$\Rightarrow AK_2 : AK_1 = O_2K_2 : O_1K_1 = 1 : 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} AK_2 = \frac{8}{3} \\ AK_1 = \frac{16}{3} \end{cases}$

из ц. A_2 проведем: $AO_2^2 = BO_1^2 + AK_1^2$, тогда: $\frac{16^2}{3^2} - 4 = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{16^2 - 3^2 \cdot 4}{3^2} = x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{(16-9)(16+9)}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{22 \cdot 10}}{3} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{55}}{3}$

тогда $\text{tg} \alpha = \frac{2}{\frac{2\sqrt{55}}{3}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

из св-ва касан. прямой: $ax + 10b = y$, $\text{tg} \alpha = \text{tg} \alpha$, значит

а касан. прямая касается окружности $\frac{2\sqrt{55}}{3}$ в точке симметрии радиуса от K_1 $\frac{55}{55}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2) β -точки пересечения прямых 3 и 2 с осью Ox , они принадлежат одной прямой, т.к. симметричны относительно Ox .

проведем высоты из центров на прямую $\gamma - O_1M_1$ и O_2M_2 ,

они равны радиусам соотв. окр.

$$\angle M_2BO_2 = \angle M_1O_1B$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle M_2BO_2 = \angle M_1O_1B \\ \angle BO_2M_2 = \angle BO_1M_1 (=90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BO_2M_2 \sim \triangle BO_1M_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BO_1 : BO_2 = OM_1 : OM_2 = 2 : 1 \Rightarrow BO_1 = 2BO_2 (=8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} BO_1 = BO_2 + O_2O_1 \\ BO_1 = 2BO_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} BO_2 = 8 \\ BO_1 = 16 \end{array} \right.$$

из г. Пифагора: $BO_2^2 = M_2O_2^2 + BM_2^2 \Leftrightarrow 8^2 = 1^2 + M_2O_2^2 \Leftrightarrow M_2O_2 = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$

Тогда $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{63}}{63}$

из вида графика $y = ax + b$, $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} = \sqrt{63}$, а значит

b симметричен a относительно Ox и может принимать значения $\pm \frac{\sqrt{63}}{63}$

$$\text{итого } a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{63}}{63}, \pm \frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{3\sqrt{4R-9}}{2} \right)^2 &= 9x + 20,25 \quad \Rightarrow 9(4R-9) = 18x + 40,5 \quad \Rightarrow \\ x &= R - 4,5 \\ \Rightarrow 36R - 81 &= 18R - 18 \cdot 4,5 + 40,5 \quad \Rightarrow 36R - 40,5 = 18R - 81 - \\ R & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(2\sqrt{R-2} \right)^2 = 2(R-2) \quad \Rightarrow 4(R-2) = 4(R-2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

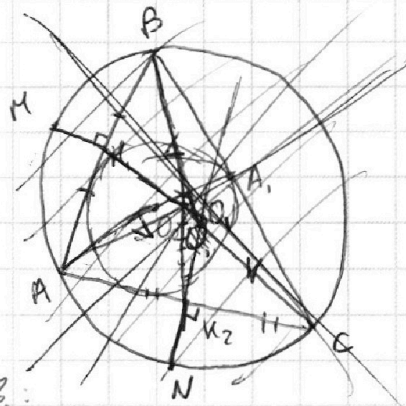
$\tilde{AM} = \tilde{MB}$, т.к. M -сер. AB
 $\tilde{AN} = \tilde{NC}$, т.к. N -сер. AC

AO_2 - ?

$MK_1 = 4,5$, т.к. MK_1 -ради.

$NK_2 = 2$, т.к. NK_2 -ради.

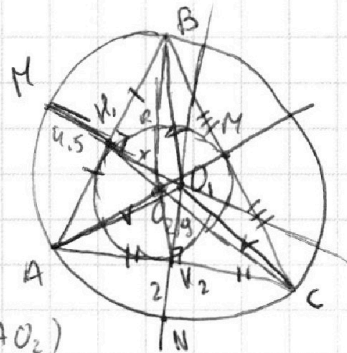
O_1 - центр опис. оуп.



1) Тогда по теореме о хордах равн. члв.:

$$\begin{cases} AK_1 = K_1B \\ \text{хорда } AK_1B \text{ и } MN \text{ бисект. в } O_1 \end{cases}$$

аналог. $\begin{cases} AK_2 = K_2C \\ K_2 \in AC \end{cases}$



2) проведем AO_2 до пересеч. с BC

($M = BC \cap AO_2$)

тогда, т.к. O_2 лежит на медиане AM $\triangle ABC$ т.к. $S_{O_2} = \text{бис. оуп.}$

$BM = MC$

т.к. O_2 - центр пересеч. мед., то $AO_2 : O_2M = 2 : 1 \Rightarrow AO_2 = \frac{2}{3} AM$

обозначим K_1O_1 за x , тогда $x + 4,5 = R$

(R - ради. больш. оуп.)

обозначим O_1K_2 за y , тогда $y + 2 = R$

$$2) \begin{cases} x^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 \quad (O_1 \in AK_1O_1) \\ y^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = R^2 \quad (O_1 \in AK_2O_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 - 9R + 20,25 = R^2 - \frac{AB^2}{4} \\ R^2 - 4R + 16 = R^2 - \frac{AC^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36R - AB^2 = 81 \\ 416R - AC^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = 36R - 81 \\ AC^2 = 416R - 16 \end{cases} \begin{matrix} AC > 0 \\ AB > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 3\sqrt{4R-9} \\ AC = 4\sqrt{R-1} \end{cases}$$

$AK_2 : K_2C = 2 : 1 \Rightarrow (2R - 2) : 2$

$AK_1 : K_1B = 4,5 : 4,5 = (2x + 4,5) : (2x + 4,5)$ (т.к. O_1 центр опис. оуп. бисект.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \Leftrightarrow$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2(x+0,5)^2 + 0,5} = 2 - 7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-3) + 2(x+0,5)^2 + 0,5 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0,5)^2 + 0,5)} = (2-7x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2(x+0,5)^2 + 0,5)} = 4 - 28x + 49x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2 + 2x + 1)} = 4 - 28x + 49x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25x^2(81x^2 - 90x + 25) = 4(x-1)(2x-3)(2x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 \cdot 81 \cdot x^4 - 90 \cdot 25 \cdot x^3 + 25^2 \cdot x^2 = 4(x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$25 \cdot 81 \cdot x^4 - 90 \cdot 25 \cdot x^3 + 25^2 \cdot x^2 = 4(x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 + 3x - 2 = (x-1)(2x-3) + (3x-2) =$$

$$2x^2 + 2x + 1 = (2x^2 - 5x + 3) + (7x - 2) =$$

$$(x-1)(2x-3) = -(2-7x)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 4 + 4m \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t + t - m - \sqrt{t(t-m)} = m^2 \Leftrightarrow m^2 - 2t + m = 2\sqrt{t(t-m)}$$



14
74
56
14
1896
61
1196
1956



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad a, b, c : 2^{14} 7^{10}, \quad b, c : 2^{12} 7^{17}, \quad a, c : 2^{20} 7^{37}$$

т.к. ~~мы хотим наименьшее значение произведения abc, если~~
мы хотим, чтобы: $ab = 2^{14} 7^{10}, \quad bc = 2^{12} 7^{17}, \quad ac = 2^{20} 7^{37}$, т.к. если

они будут больше, то

$$\begin{cases} ab : 2^{14} 7^{10} \\ bc : 2^{12} 7^{17} \\ ac : 2^{20} 7^{37} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{51} 7^{64}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m-n}{n} = k$$

$$\frac{2+7}{4-6-2-7+49} = \frac{9}{53-84} = \frac{9}{-31}$$

$$a = kb \Rightarrow b^2 k = kb + b \Rightarrow b^2 k - b^2 = b \Rightarrow b^2(k-1) = b \Rightarrow b(k-1) = 1$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2^3 7^7} \Rightarrow a = c \cdot 2^3 \cdot 7^7 = \frac{9}{-31}$$

$$a+b : m \Rightarrow (a+b)^2 - 8ab : m \Rightarrow m^2 - 8ab : m \Rightarrow m : m \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{m}{n}$$

$$\frac{2^{14} \cdot 7^{10}}{8m^2} = \frac{2^{14} \cdot 7^{10} \cdot c}{8m^2} \Rightarrow \frac{2^{14} \cdot 7^{10}}{8m^2} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{8m^2} \Rightarrow m^2 = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^6 \cdot 7^{27}$$

$$\begin{cases} a+b : m \\ 8ab : m \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{8ab} = \frac{m}{m} \Rightarrow \frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2} = \frac{m}{m} \Rightarrow \frac{a+b}{a^2 + b^2 + 2ab - 8ab} = \frac{m}{m}$$

$$\frac{a+b}{8m^2} = \frac{a+b}{8m^2} \Rightarrow \frac{a+b}{8m^2} = \frac{a+b}{8m^2} \Rightarrow \frac{a+b}{8m^2} = \frac{a+b}{8m^2}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 8ab}{a+b} = \frac{a^2 + b^2 - 6ab}{a+b}$$

$$= \frac{b(k+1)}{b^2(k+1)^2 - 8b^2k} = \frac{b(k+1)}{b^2((k+1)^2 - 8k)} = \frac{k+1}{b((k+1)^2 - 8k)} = \frac{k+1}{k+1 : m}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} = \frac{a^2 + b^2 - 6ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b} = k$$

$$= \frac{k+1}{b(k^2 + 2k + 1 - 8k)} = \frac{k+1}{b(k^2 - 6k + 1)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O_1 - центр ω
 O_2 - центр Ω
 $R_{\Omega} =$

$25x^2 - 31x^2 + 25 = 0$
 $8x^2 + 6x\sqrt{1-x^2} = 0$
 $7x^2 + 6x\sqrt{1-x^2} = 1+x^2$
 $100x^4 - 196x^2 + 100 = 0$
 $64x^4 - 160x^2 + 100 = 36x^2(1-x^2)$
 $64x^4 + 160x^2 + 100 = 36x^2(1+x^2)$

$2x^2 - 2x + 10 = 4$
 $100 =$

$1.5\sqrt{R_{\Omega}}$
 R
 $AB = 2\sqrt{R^2 - 1}$
 $R_{\Omega} = 100 - 64x^2$
 $\frac{R-2}{R} = \frac{R-4.5}{R}$

$3x \pm \sqrt{3^2 - 2500}$
 50
 $AF \cdot MF = x$
 $AF = 2$

$7x\sqrt{x^2+1}$
 $x^4 + x^2$

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$
 $x^2 + y^2 - 4 = 0$
 $CT = 7x^2$
 $108 + 12 = 16$
 $2x^2 + 6xd + 9$

$100 = 49x^2 + 49x^4 + \frac{1080}{216}$
 $\Rightarrow 96$
 $49t^2 + 49t + 100 = 0$
 $t = \frac{-49 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 7^4 \cdot 100}}{2 \cdot 49}$
 $R^2 = R^2 + 2\sqrt{R^2 - 1} + 1(R-1)$
 $R^2 = R^2 + 2\sqrt{R^2 - 1} + 1(R-1)$

$LM \cdot MO_1 = AM \cdot MB = (x+d) \cdot (7x-d) = 99$
 $x = \frac{6d \pm \sqrt{36d^2 - 2}}{2}$
 $(-6d \pm \sqrt{36d^2 + 28(10\sqrt{1+d^2} - 1)}) \cdot (10\sqrt{1+d^2} - 1) = (x+d)(7x-d)$
 $(\Rightarrow) 10\sqrt{1+d^2} - 1 - 1d^2 = 2x^2 + 7xd - xd$
 $(\Rightarrow) 10\sqrt{1+d^2} - 1 = 7x^2 + 6xd$
 $(\Rightarrow) 7x^2 + 6xd - (10\sqrt{1+d^2} - 1) = 0$
 $x = \frac{6d \pm \sqrt{36d^2 + 28(10\sqrt{1+d^2} - 1)}}{-49 \pm 49\sqrt{1+40}}$
 $\frac{2 \cdot 49}{1ax_0 + by_0 + cz_0}$