



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$ab : 2^{15} \cdot 7^6$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{13}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^6 \cdot X$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

при X, Y и Z
столбец
ненулев

$$abc : ab, abc : ac \text{ и } abc : bc$$

$$\text{тогда } abc : 2^{23} \cdot 7^{39} \rightarrow (abc)^2 : 2^{56} \cdot 7^{78}$$

перемножим ab , bc и ac

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 7^6 \cdot X \cdot 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$$

$$\text{но } (abc)^2 : 2^{56} \cdot 7^{78}$$

$$\text{тогда } XYZ = k \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot k \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{78} \cdot k$$

abc минимально при $k=1$

$$\text{тогда, } abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

проверим правильность

значений чисел:

$$a = 2^{10} \cdot 7^6$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^6 : 2^{10} \cdot 7^6$$

$$b = 2^5$$

$$\text{тогда } bc = 2^{17} \cdot 7^{13} : 2^{12} \cdot 7^{10}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$\frac{a}{b}$ несократима $HOD(a, b) = 1$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(-a^2+2ab+b^2)+9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2+9ab}$$

дробь максимальна сокращение
из HOD числика и знаменателя

$$HOD((a+b) \cdot (a+b)^2 + 9ab) = HOD(a+b; 9ab)$$

$\therefore (a+b)$

то ~~если~~ $HOD(a+b; 9ab) = 1$

✓

1

$a = n_1^{\alpha_1} \cdot n_2^{\alpha_2} \dots$

$b = k_1^{\beta_1} \cdot k_2^{\beta_2} \dots$

то n_1 и k_1 не имеют общих делителей

числа $(\text{т.к. } HOD(a, b) = 1)$

тогда

$$ab = n_1^{\alpha_1} \cdot n_2^{\alpha_2} \cdots \cdot k_1^{\beta_1} \cdot k_2^{\beta_2} \cdots$$

$$a+b = n_1^{\alpha_1} \cdot n_2^{\alpha_2} \cdots + k_1^{\beta_1} \cdot k_2^{\beta_2} \cdots$$

и ab и $a+b$ нет общих делителей

$\therefore HOD(ab; (a+b)) = 1$

//

тогда $HOD(a+b; 9ab)$ будет наибольшим

если $a+b \mid 9$

$$HOD(a+b; 9ab) = 9 \text{ или } a+b \mid 9$$

приведи пример: $a=4$ $b=5$ $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-7 \cdot 20 + 25} = \frac{9}{41-141} = \frac{9}{-99} = \frac{-1}{11}$$

$m=9$

Ответ: при $m=9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

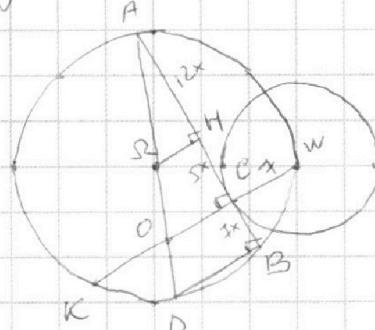
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Запись № 3



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7} \quad AC = 17x \quad CB = 7x \quad AB = 24x$$

I CWRays DK
most four gamblers AD

$\angle ABD = 90^\circ$ in blue, or no d
 $\angle ABK = 90^\circ$ in AFB-kae, CW-R
 (CK & CW grayed)

$$AC \cdot CB = CW \cdot KE \quad CW = r = 7$$

$$17x \cdot 7x = 7 \cdot KC$$

$$KC = 17x^2 \quad] OC = a$$

$$K_0 = 17x^2 - a$$

они есть ΣH - первообразы.

ΩΗ ΤΑC

tu. 2-y. old AB-negcs, STH LAB

$$\therefore \text{AH} = \text{HB} = 12x$$

$$R + 2H \approx R_{OC} \quad R_{S2} = R = 13$$

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AS}{AO} \quad AO = \frac{17x}{17x} \cdot 13 = \frac{17 \cdot 13}{12}$$

$$OD = AD - AO = 26 - \frac{17+3}{12} = \frac{13 \cdot 2 + 12 - 17 \cdot 3}{12} = \frac{13 \cdot 7}{12}$$

$$PO \cdot OP \rightarrow KO \cdot OW$$

$$\frac{17+13}{12} \cdot \frac{13+7}{12} = (17-a)(7+a)$$

$$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{122} = 17 \cdot 7x^2 + 17x^2 \cdot a - 7a - a^2$$

△ ROC -view

$$\text{nos. Prepared } OC^2 = AO^2 + AC^2 \\ a^2 = \left(\frac{17 \cdot 13}{12}\right)^2 - (17x)^2 = \left(\frac{17 \cdot 13}{12} - 17x\right) / \left(\frac{17 \cdot 13}{12} + 17x\right)$$

$$\frac{17^2 + 13^2}{17^2 - 13^2} = \frac{17^2 + 13^2}{17^2 - 13^2} = \frac{17^2 + 13^2}{12 \cdot 12}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 изображение

$$a = \frac{17}{12} \sqrt{(13+12)(13+12+1)}$$

$$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17 \cdot 7x^2 + 17t^2 \cdot \frac{17}{12} \sqrt{(13+12)(13+12+1)} = 7 \cdot 17 \sqrt{\dots} - \frac{17^2}{12^2} (13^2 - 144t^2)$$

$$x^2 = t$$

$$7 \cdot \frac{17}{12}$$

$$\cdot 12^2 \quad \cancel{17 \cdot 7 \cdot 13^2} = 17 \cdot 7t + 17t \cdot \frac{17}{12} \sqrt{169 - 144t^2} - 7 \sqrt{169 - 144t^2} - \frac{17^2}{12^2} (169 - 144t^2)$$

$$\cancel{17 \cdot 7 \cdot 13^2}$$

$$7 \cdot 13^2 - 12^2 \cdot 7t + 17 \cdot 12t \sqrt{169 - 144t^2} - 7 \cdot 12 \sqrt{169 - 144t^2} - 17(169 - 144t^2)$$

$$7(169 - 144t^2) = 17 \cdot 12t \sqrt{169 - 144t^2} - 7 \cdot 12 \sqrt{169 - 144t^2} - 17(169 - 144t^2)$$

$$34(169 - 144t^2) = 12(17t \sqrt{169 - 144t^2} - 7 \sqrt{169 - 144t^2})$$

$$17(169 - 144t^2) = 6(17t \sqrt{169 - 144t^2} - 7 \sqrt{169 - 144t^2})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9 +$$

$$a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \quad a^2 - b^2 = -9 + 1$$

$$b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$a^2 - b^2 = a^2 - b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$\text{1) } a = b \quad \text{2) } a + b - 1 = 0$$

$$1) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$\cancel{3x^2 + 3x + 1} \quad 3x^2 + 3x + 1 > 0$$

так

так $x = \frac{1}{9} \quad 3x^2 + 3x + 1 > 0$

$$2) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0 \quad | - 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2$$

$$x \in [-1; 0] \quad 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

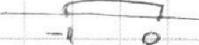
$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x \quad |^2$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1$$

$$3x^2 + 3x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0$$



$$x \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$12x^2 + 12x + 3 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 2 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 =$$

$$= 4^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 69 = 4^2 \cdot 78 =$$

$$= (4\sqrt{78})^2$$

$$x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$$

но

$$\frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} < 0$$

$$12 < 4\sqrt{78}$$

$$6 < 2\sqrt{78}$$

$$36 < 4 \cdot 78$$

~~69x^2 + 3x + 1 ≥ 0~~

$$x > 0$$

не получили

(также $1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 0$

и $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 0$ не может)

$$\frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} < 0 \neq$$

не получили

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

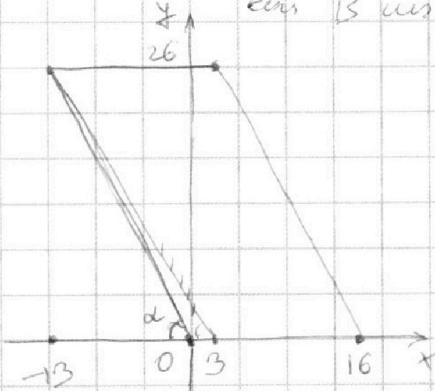
Задача №5

$$2t_2 - 2t_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(t_2 - t_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$t_2 - t_1$ расц. по t от A до B
если B правее, то $t_2 - t_1 > 0$
если B левее, то $t_2 - t_1 < 0$

$y_2 - y_1$ расц. по y от A до B
если B выше, то $y_2 - y_1 > 0$
если B ниже, то $y_2 - y_1 < 0$



по оси ~~x~~ сдвиг на ~~8~~ единиц
линей B отходит правее A
~~14~~ 14 (некоторое значение)

B вправо отходит на ~~16~~ единиц
 B влево отходит - ~~15~~ единиц

значит ~~16~~, когда $y_2 - y_1 = 0$
и $2(t_2 - t_1) = 14$

$$t_2 - t_1 = 7 \quad t_2 \text{ правее } t_1 \text{ на } 7 \quad 14$$

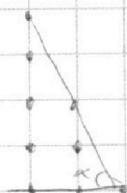
B вправо отходит с ячейкой шагом: 9 Всего: ~~17~~ 9

B влево отходит: 8 Всего ~~16~~ 8

13

y может быть выражена на любое число (такие $t_2 - t_1$ не ясно)

уровни n -ных:



$$\tan \alpha = 2 \quad (\text{так как } \frac{26}{13} = 2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5 профилактика

Бак № 2 В баке A на 2

$$y_2 - y_1 = 2$$

$$\text{т.о. } 2(t_2 - t_1) = 12$$

$$(t_2 - t_1) = 6$$

Бак № 3

таких же точек (точек) 10 т.о. у второй из рабочих

точки Y будет две и так

тогда 9 минут

и минуты 2 открои вентиль (иначе В баке

нет): 9. ~~00~~ 13

(у них 10 минут)

Бак № 4: 8.12 (такие минуты профилактика вентили

(точек)

Бак № 5 В баке A на 4

$$(t_2 - t_1) = 5$$

6 секунд тоже 11 т.о. у третьего рабочего

и минуты 4 открои

нет: 9. ~~00~~ 12

(у них 20 минут)

у бака № 5: 8.11

Бак № 6 A на 6

$$t_2 - t_1 = 4$$

середина: 9.11

всего: 8.10

...

Бак № 14 A на 14

середина: 9.7

всего: 8.6

$$\text{Итого: } 9(7+14) + 8(13+..+6)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

окр $y(0,0)$ $R=1$

$$x^2 + (y-12)^2 - 16 = 0$$

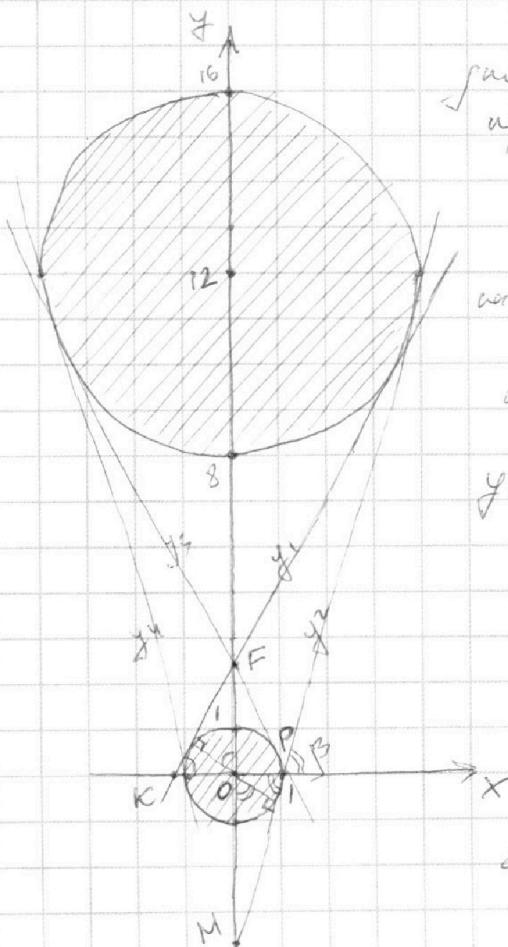
окр $y(0,12)$ $R=4$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 & \text{выбрать окр} \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0 & \text{вне окр} \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 & \text{вне окр} \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \leq 0 & \text{выбрать окр} \end{cases}$$

$$\text{т.е. } (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

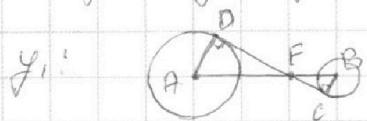
если точка находится внутри окр
однозначно и вне окр
однозначно (уравнение окр тоже
однозначно)



запись ровно два решения, если
применяется $y = -ax + b$ касается
окр и линии

Всего 4 нарисованы
окружности и две прямые
отвечающие ОУ

избрать y_1 и y_2



$$AD = 4, BE = 1$$

$$AB = 12$$

$$FB = x$$

$$\frac{\triangle ADF}{\triangle FBC} \sim \frac{AD}{FB} \quad \frac{4}{x} = \frac{12}{12-x}$$

$$4x = 12 - x$$

$$x = \frac{12}{5} \quad FB = \frac{12}{5}$$

$$BC = 1, FB = \frac{12}{5}$$

$$\text{но } \triangle FBC \sim \triangle FKO \quad FC = \frac{13}{5}$$

$$\frac{\triangle FBC}{\triangle FKO} = \frac{FB}{KO} = \frac{12}{5}$$

$$\text{см. график} \quad \frac{KO}{KO} = \frac{13}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

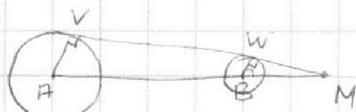
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6. Четырехугольник

$$y_1 = k_1 x + b_1$$
$$k_1 = \frac{13}{5} \quad b_1 = \frac{12}{5}$$
$$k_1 = -a \quad b_1 = 86$$
$$a = -\frac{13}{5} \quad b = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

y_2 :



$$AV = 4, BW = 1, MB = 12$$

$$JBW = x$$

$\triangle MWB \sim \triangle MVA$

$\triangle BWV$ - прямоугольник $WB = 1, BV = 4$

угол BWV и WBM равны

$$WM = \sqrt{15}$$

$$\text{тогда } MBW = \frac{WM}{BW} = \frac{WM}{BV} = \sqrt{15}$$

$$\frac{MB}{MV} = \frac{WB}{VP} \quad \frac{x}{x+12} = \frac{1}{4}$$

$$4x = x + 12$$

$$x = 4 \quad BM = 4$$

из

$$\angle MOW = \angle ODM = \angle \beta \quad \text{тогда } \beta = \sqrt{15}$$

тогда $y_2 = k_2 x + b_2$

$$k_2 = \sqrt{15} \quad b_2 = -4$$

$$k_2 = -a \quad b_2 = 86$$

$$a = -\sqrt{15} \quad b = -\frac{1}{2}$$

и соответственно $y_3 = y_4$

сдвиги вправо или ($k_3 = -k_1, \quad k_4 = -k_2$)

$$y_3 = \frac{13}{5}x + \frac{3}{10} \quad a = \frac{13}{5}$$

$$y_4 = \sqrt{15}x - \frac{1}{2} \quad a = \sqrt{15}$$

Outer. then $a = \frac{13}{5}, \quad a = -\frac{13}{5}, \quad a = \sqrt{15}, \quad a = -\sqrt{15}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$ab = 2^{15} \cdot 7^n$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^n \cdot X$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot Y$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

Чтобы
члены
шлись

перемножить ab · bc · ac

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 7^n \cdot X \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot Y \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$$

половиной
изображения

тогда $2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$ тоже

должно быть полным
изображением

то изображения полного изображения
не хватает 2 зерка + или 4 на 2

$$\text{равно } 2(X+YZ=2)$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot 2$$

$$(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

проверим пример

таких a, b, c есть:

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$тогда ab = 2^{15} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{29}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

$$b = 2^5 \cdot 1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^n$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 . 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

$$ax + y - 36 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

окр. с (0,0)

$$R=1$$

окр. y

$$(0,12) R=4$$

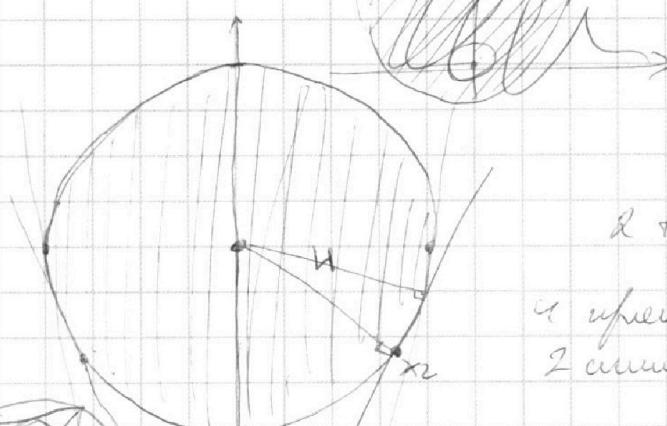
$$(x^2 + y^2 - 1) \geq 0$$

$$(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$

точка

находится

вне окружности
внутри окружности



2 точки в окружности

1 точка

2 точки вне

$$y = kx + b$$

877921

x1

$$y_1 = kx_1 + b$$

877921

$$y_1^2 + x_1^2 - 1 = 0$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

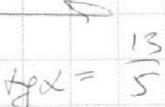
$$877921 x_2^2 + (y_2 - 12)^2 - 16 = 0$$

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{12}$$

$$4x = 12$$

$$5x = 12$$

$$x = \frac{12}{5} = 2,4$$



$$\tan \alpha = \frac{13}{5}$$

$$y = \frac{13}{5}x + \frac{12}{5}$$

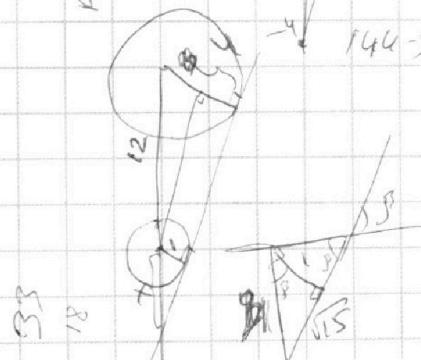
$$y = -\frac{13}{5}x + \frac{12}{5}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+12}$$

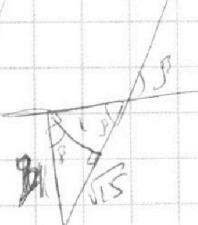
$$4x = x+12$$

$$3x = 12 \quad x = 4$$

$$b = -4$$



35
18



35
18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

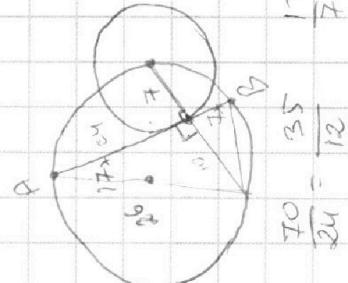
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \quad \text{5} \quad \text{6} \quad \text{7} \\ & -13,26 \quad 5,26 \quad 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \\ & y_2 = -2x_2 + b_2 \\ & y_1 = -2x_1 + b_1 \\ & y_2 - y_1 = -2x_2 + 2x_1 + b_2 - b_1 \\ & 0,0 \quad 16,0 \end{aligned}$$

28

$$\begin{aligned} & (2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 14 \\ & 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14 \end{aligned}$$



$$(ii) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3r^2 + 3t + 1} = 1 - 9x \quad 3r^2 - 6t + 2 \geq 0 \quad 36 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 12$$

$$3r^2 + 3t + 1 \geq 0$$

$$15 = 9 - 12 \cdot 0$$

OPS

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = a \quad a^2 - b^2 = -9x + 1$$

$$\sqrt{3r^2 + 3t + 1} = b \quad a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

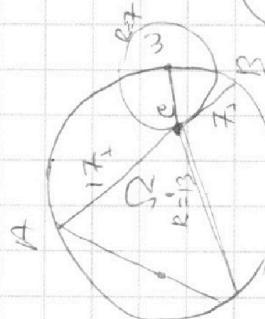
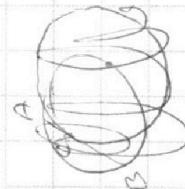
$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a = b \quad a + b - 1 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 = 2(x_2 - x_1)$$

$$1) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 3r^2 + 3t + 1$$

$$9x - 1 \\ x = 1/9$$



$$2) \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3r^2 + 3t + 1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3r^2 + 3t + 1} \quad \text{plz}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3r^2 + 3t + 1 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{3r^2 + 3t + 1}$$

$$2\sqrt{ } = 9x$$

$$0 \quad 14$$

$$1 \quad 13$$

$$+ \quad 7$$

$$14 \quad 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 4(3x^2 + 3t + 1) = 81x^2 \end{array} \right.$$

$$3x^2 + 3t + 1 \geq 0$$

$$\Delta \leq 0$$

$$\frac{18}{69}$$

$$12x^2 + 12t + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4^2 \cdot 69 =$$

$$= 4^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 69 =$$

$$= 4^2 (9 + 69) = 4^2 \cdot 78 =$$

$$= 4^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = (4\sqrt{78})^2$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} \quad -12 - 4\sqrt{78} \leq 0$$

$$3x^2 + 3t + 1 \leq 1$$

$$3t^2 + 3t \leq 0$$

$$t(t+1) \leq 0$$

$$-\frac{3}{6} - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{10 + 8\sqrt{78}}{13}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{12} \cdot 7^{13}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{0.15} \cdot 7^{0.11} / 2^{0.23} \cdot 7^{0.39}$$

$$b = 2^{0.15} \cdot 7^{0.11} / 2^{0.17} \cdot 7^{0.18}$$

$$c = 2^{0.17} \cdot 7^{0.18} / 2^{0.23} \cdot 7^{0.39}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$$

$$bc = 2^{12} \cdot 7^{13} \cdot y$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z$$

$$(abc)^2 = 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39} \cdot xyz$$

$$(abc)^2 = \underline{\underline{2^{55} \cdot 7^{68}}} \cdot xyz$$

~~$$a = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$$~~
~~$$b = 2^{12} \cdot 7^{13} \cdot y$$~~
~~$$c = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z$$~~

$$a = 2^{10} \cdot$$

$$b = 2^5 \cdot$$

$$c = 2^{13} \cdot$$

до влагалища для обсна

$$(abc)^2 = \underline{\underline{2^{56} \cdot 7^{68}}} \cdot K$$

$$K = \frac{xyz}{2} \quad IJK = 1$$

$$xyz = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$x = 2 \text{ max } y = 2 \text{ max } z$$

правильн:

~~$$a = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 1$$~~
~~$$b = 2^{12} \cdot 7^{13} \cdot 1$$~~
~~$$c = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot 1$$~~

$$a = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2$$

$$b = 2^{12} \cdot 7^{13}$$

$$c = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{12} \cdot 7^{13}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\textcircled{2} \quad HOD(a, b) = 1$$

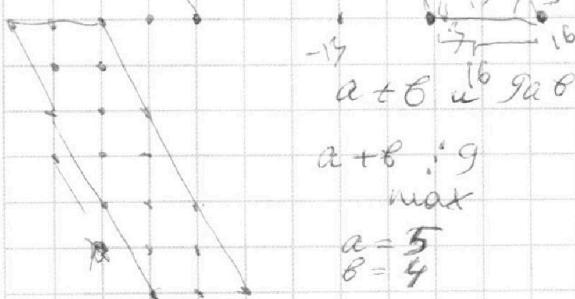
$$\frac{a^6}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{a+b}{-(a+b)^2 + 9ab}$$

$$HOD((a+b), -(a+b)^2 + 9ab) = HOD(a+b, +9ab)$$

$$a = a \% b$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b)^2 - 9ab} / a+b$$

$$HOD(a+b, 9ab)$$



$$a+b : 9$$

max

$$a = 5$$

$$b = 4$$

$$\text{афверса: } \frac{5+4}{25-7 \cdot 20+16} = \frac{5+4}{41-140}$$

$$= \frac{9}{-99}$$

ответ: 9

$$ab \% a+b$$

$$n_1^{a_1} \cdot n_2^{b_1} \cdot b_1^{a_2} \cdot b_2^{b_2} \% m_1^{a_1} \cdot m_2^{b_1} \cdot m_1^{a_2} \cdot m_2^{b_2}$$

здесь и так
правильн

$$ab > a+b \quad (\text{араб зеркаль})$$

~~$$20-5=4$$~~

10

~~$$ab > a+b$$~~

10