



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №1

$$abc : 2^w \cdot 7^{37} \xrightarrow{a,b,c \in \mathbb{N}} abc : 7^{37}$$

нужно $a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1}$ ($x_1, y_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)
 $b = 2^{y_1} \cdot 7^{z_1}$ ($y_1, z_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)
 $c = 2^{z_1} \cdot 7^{x_2}$ ($z_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

задача, что никакие умножения в простых
 разложении некоторых есть что-то кроме
 $2^w \cdot 7^{37}$ впрочем не делают т.к. тогда
 $a \cdot b \cdot c$ делится 84 но этом кратней умноже-
 ний ($a, b, c \in \mathbb{N}$), а он не делится на делит
 на кратн. меньш. $2^w \cdot 7^{37}$, а делит его
 делит это умножение, но это никак
 не делится на вложенные делители, а про-
 изведение любых умножений, (а мы сказали
 что наше произв. наименьшее)

$$\text{учн. } \begin{cases} x_1 + y_1 \geq 14 \\ y_1 + z_1 \geq 17 \\ z_1 + x_1 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 \geq 51 \end{cases} \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 \geq 51$$

$$\geq \left\lceil \frac{51}{2} \right\rceil + 1 = 26$$

т.о. наименьшее из возможных произведений
 делится на 7^{37} и на 2^{26} , а значит
 делит 84 т.к. не делит $7^{37} \cdot 2^{26}$

пример такого:

$$\begin{aligned} a &= 7^{10} \cdot 2^8 & ab &= 2^{17} \cdot 7^{10} : 2^8 \cdot 7^{10} \\ b &= 2^{16} \cdot 2^2 & bc &= 2^{18} \cdot 7^{17} : 2^4 \cdot 7^{17} \\ c &= 7^{27} \cdot 2^{12} & ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

т.о. наименьш. произв. равно $2^8 \cdot 7^{10}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №2

$\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$
($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$)

Значит, что $\text{НОД}(a+b, a) = \text{НОД}(a+b, b) = 1$

т.к. док-во отн. крат.

$$\left[\begin{array}{l} a : m \times k \quad (m \in \mathbb{N}, m > 1) \\ a+b : m \times k \end{array} \right] \xrightarrow{\text{?}} a+b - a : m \Rightarrow b : m \quad ,$$
$$\left[\begin{array}{l} a : m \times k \quad (m \in \mathbb{N}, m > 1) \\ b : m \times k \end{array} \right]$$

\Rightarrow то $\text{НОД}(a, b) = 1$, а

?

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 8ab}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a+b : m \\ (a+b)^2 - 8ab : km \end{array} \right.$$

$$\text{м.о. } \left\{ \begin{array}{l} a+b : m \\ 8ab : km \end{array} \right. \Rightarrow 8 : m \Rightarrow m \leq 8$$

пример, где $m = 8$

$$\begin{array}{ccccccc} a=8 & & a+b & 8^{100} & b=8-3 & 8-3 & 8-3 \\ \cancel{a=8} & & \cancel{a+b} & \cancel{8^{100}} & \cancel{b=8-3} & \cancel{8-3} & \cancel{8-3} \\ b=3 & & & & & & \text{не} \end{array}$$

корр. м.к. $8^{100} - 3 \nmid 3$ ($3 : 3, 8^{100} \nmid 3$)

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8^{100} - 3 + 3}{(8^{100} - 3)^2 - 6(8^{100} - 3) \cdot 3 + 3^2} = \frac{8^{100} : 8}{(8^{100})^2 - 8 \cdot (8^{100} - 3)}$$

делено корр. на 8

Однако при $m = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

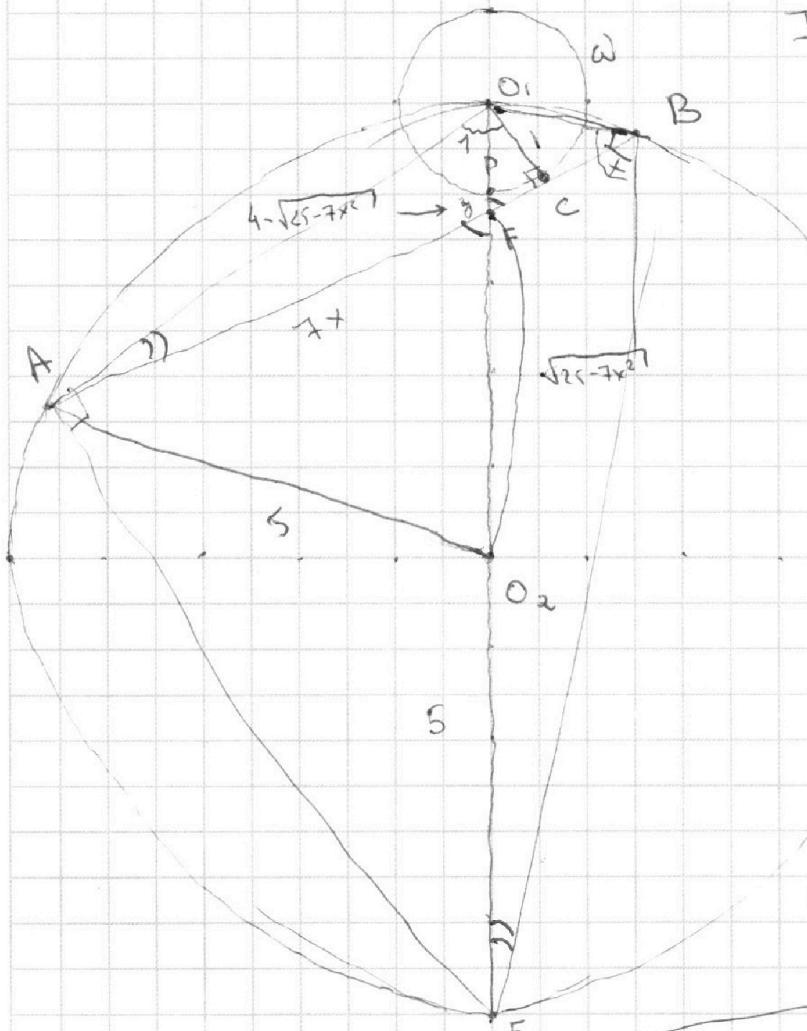


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №3



$$AC : CB = 7$$

$$\begin{cases} AC = 7x \\ CB = x \end{cases}$$

$$DF = y$$

$$\text{но избр. о синих} \\ 7x \cdot x = (O_1D + y) \text{ и } O_1E \\ \cdot (ED - y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 = (1+y) \cdot (10-(1+y)) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow 7x^2 = (1+y) \cdot (9-y) \\ & \Leftrightarrow 7x^2 = 9 + 8y - y^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow y^2 - 8y - (9 - 7x^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot (9 - 7x^2)}}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \pm \sqrt{25 - 7x^2}$$

(из рисунка $y < 4$ мк-
 $O_1D + y < 5$)

(DF избр. мк. осм $AB \rightarrow EO_1$,
но $A \rightarrow AD \wedge D = C \wedge AE = AB$)

$$\begin{aligned} FC \text{ no избр. мк.} &= \sqrt{(5 + \sqrt{25 - 7x^2})^2 - 1} : \quad FC = \sqrt{(1 + 4\sqrt{25 - 7x^2})^2 - 1} - \\ &= \sqrt{5 - 25 + 7x^2 - 10\sqrt{25 - 7x^2}} - 1 \end{aligned}$$

$\angle EKO_1 = \angle EBO_1$ (сопр. кн двоих, быв.)

$\angle O_1EB = \angle O_1AB$ (сопр. кн симметрии, быв.)

$\triangle ACO_1C \sim \triangle O_1BE$ (но 2 признака идентичн.)

$$\text{но } \overline{A} \overline{C} \overline{O_1} \overline{C} \cdot \overline{C} \overline{B} \overline{E} = 1 \Rightarrow AC \cdot CB = 1$$

$$\text{но избр. мк. } FC \text{ no избр. мк. } \Rightarrow O_1C \perp FC$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$x \leq 1$$

$$2x^2 - 2x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow [x < -1 \text{ or } x > 0]$$

(*) $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow$ ОРЗ

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7x + 2 = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49x^2 + 4 - 28x = 4(2x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41x^2 - 36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{36}{41} \end{cases}$$

ОРЗ: $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-3) \geq 0 \\ 2((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}$

Ответ: $\left\{ 0, \frac{3}{2}, \frac{36}{41} \right\}$ — проверить первое:

$$\sqrt{-3} - \sqrt{1} = -2 - 0 = \text{ноль}$$

$$\sqrt{2 \cdot \left(\frac{36}{41}\right)^2 - 5 \cdot \frac{36}{41} + 3} + \sqrt{2 \cdot \left(\frac{36}{41}\right)^2 + \left(\frac{36}{41}\right) \cdot 2 \cdot 1} = 1 \quad \text{— ноль}$$

Ответ: $\left\{ \frac{3}{2} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА № 4

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &\leq a \\ 2x^2 + 2x + 1 &\leq b \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} &= a - b \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} &= 1 \quad (3) \quad \text{след. выраж.} \end{aligned}$$

(*) Заметим, что на ОДЗ $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (x-1) \cdot (x - \frac{3}{2}) \geq 0 \\ 2 \cdot ((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (-1, \frac{3}{2})$$

$$(*) \quad 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1)} = 1 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 4 \geq 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1)} \quad (*) \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 3x + 3)^2 = 4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1) \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow (6x^4 + 9x^2 - 9) - 18x^3 + 24x^2 - 2x^2 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$

$$\Leftrightarrow 33x^4 + 25x^2 - 28x^3 - 41x^2 - 22x - 3 \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 43 \cdot 41}}{82} \quad (7)$$

Уравнение $2x^2 - 5x + 3$ - кардиналь с лев. -верх., уравнение
мен. уравнение с прав. -верх.

если $x > \frac{3}{2}$, то $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq$

$$> \sqrt{2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 + 1} > 1$$

если $x \leq 1$, то см. след. стр.

(2) если $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7} - корень ур-ия (нашёл 6 ОДЗ) \quad (*)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №5

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

① ~~$y_2 - y_1$~~ $\leq (x_2 - x_1) = (18 - (-10)) = 27$

т.д. $(x_2 - x_1) \in [-27, 27] \Rightarrow 2 \cdot (x_2 - x_1) \in [-54, 54]$

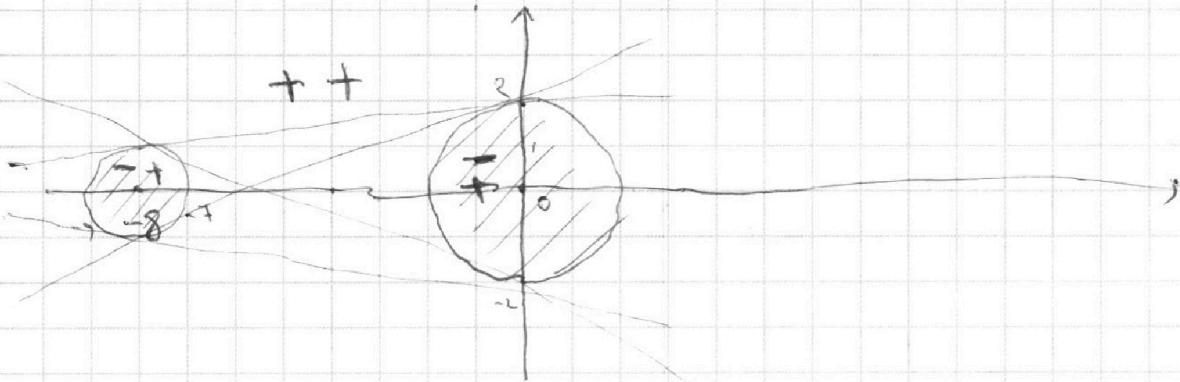
$$(y_2 - y_1) \in [-24, 24]$$

$2 \cdot (x_2 - x_1)$	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$
-12	24	-6
-16	22	-8
-8	20	-4
;	;	;
36	-24	18

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА 6



$$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{окр-ть центр: } (-8; 0) \quad R = 1$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad \text{окр-ть центр: } (0; 0) \quad R = 2$$

$$\text{Нер-во } ((x+8)^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad \text{Возможн}$$

то есть кружок на линии окр-тий

мы можем спарсить от одной будем кружок.

налич. и отриц., и мы сделаем нач. и конц.

если кружок имеет симметрию между
полюсами 2 решения \Rightarrow $ax+y+10b=0$ - каса-
ющиеся при обеих окр-тий

$$ax+y+10b=0 \Leftrightarrow y = ax + 10b$$

$$-(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow 16x = -68 \Leftrightarrow x = -\frac{68}{16} = -\frac{17}{4}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4 \\ 16x = -67 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{67}{16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

можно отыскать все точки с коорд.

4, так как в 4 координатных

координатах находятся две левые отриц.

$$\begin{cases} y = cx + d \\ (x+8)^2 + y^2 - 14 = 1 \end{cases}$$

$$y = Ex + F$$

и одна пересечения, когда $c = E, F = d$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 - 8y - (9 - 7x^2) = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4(9 - 7x^2)}}{2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9 - 7x^2} =$$

$$= 4 \pm \sqrt{25 - 7x^2}$$

1

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$y = 4 - \sqrt{25 - 7x^2} \quad \text{из расчета}$$

$$4. \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{aligned} 5x &= 2 \\ 8 &= \frac{5}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \square}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &\geq 0 \quad (2) \\ 2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{15}{2} &\leq 0 \\ (x-1) \cdot (x+3) &\geq 0 \quad \frac{9}{2} - \frac{15}{2} \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} \sqrt{-B} &= a - b \\ (\sqrt{-B})^2 &= (a-b)^2 \\ (\sqrt{-B})^2 &= 1 \\ a^2 - b^2 &= 2\sqrt{ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 1 &\geq 0 \\ -2x \sqrt{2x^2 + 2x + 1} &\geq 2 - 7x \\ 2 \cdot (x^2 + x + \frac{1}{2}) &= 2 - 7x \\ 2 \cdot (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} &= 2 - 7x \\ 2 \cdot ((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}) &= 2 - 7x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\begin{aligned} \square \quad 2x^2 - 5x + 3 &= (2 - 7x)^2 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - (2 - 7x) \cdot \sqrt{(2x^2 + 2x + 1)} \\ \square \quad 2x^2 - 5x + 3 - (2 - 7x)^2 - 2x^2 - 2x - 1 &= (4 - 14x) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{aligned}$$

$$(x-1) \cdot (2x-3) = 2x^2 - 2x - 3x + 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

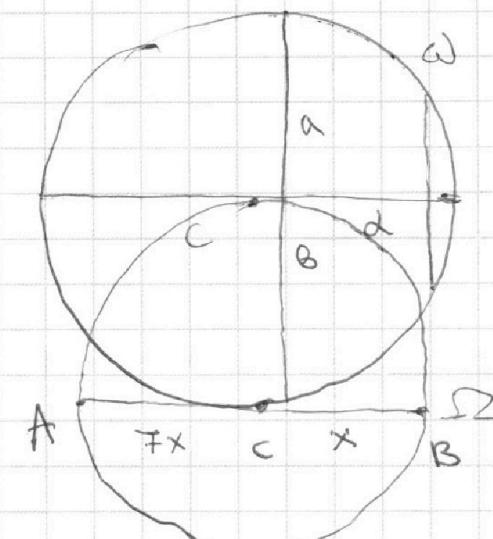
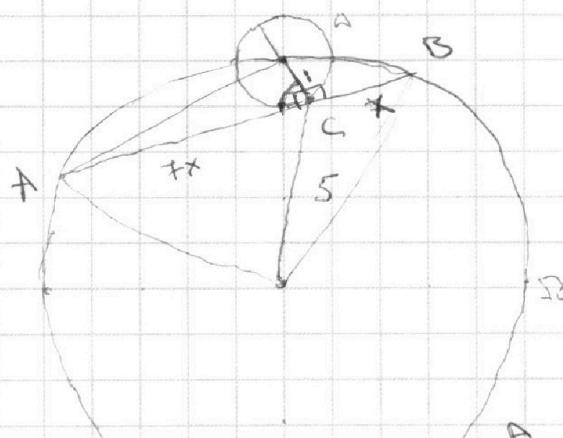
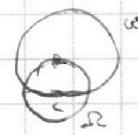
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

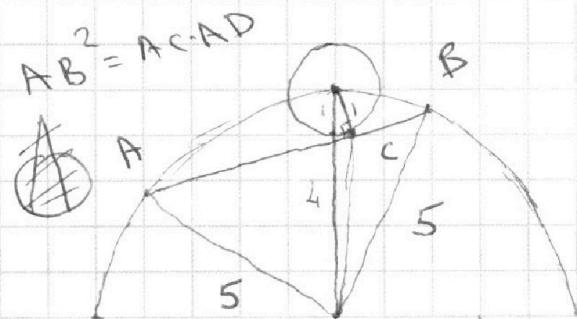
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

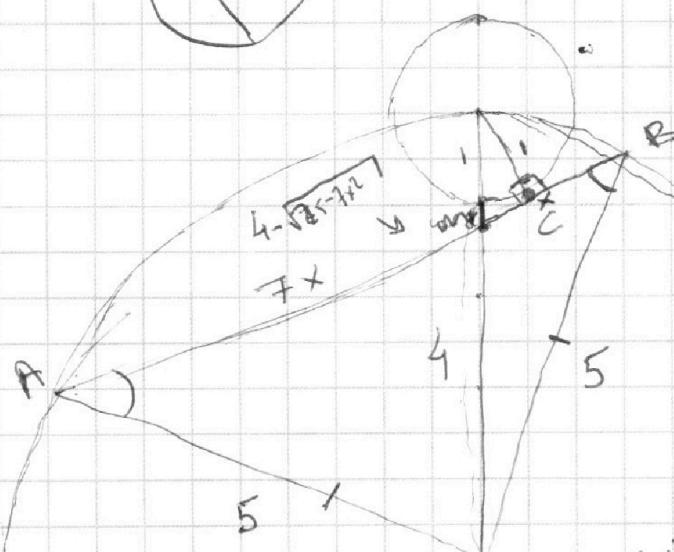
3.



$$\begin{array}{l} 4-3 \quad 17 \\ 5-5 \quad 15 \\ 6 \quad 33 \end{array}$$



$$ab = cd$$
$$y^2 - 8y - 9 + 7x^2 = 0$$



$$7x \cdot x = (9+y) \cdot (1+y)$$

⑤

7x = x

$$7x^2 = 9 + 8y - y^2$$

$$y^2 - 8y - 9 + 7x^2 = 0$$

$$8 \pm \sqrt{64 - 4(9 - 7x^2)}$$

$$y =$$

$$(5 - \sqrt{25 - 7x^2}) \cdot (-\sqrt{25 - 7x^2}) = 7x^2$$
$$(1 + (4 - \sqrt{25 - 7x^2})) \cdot (4 - (4 - \sqrt{25 - 7x^2})) = 7x^2$$
$$-5\sqrt{25 - 7x^2} + 25 - 7x^2 = 7x^2$$
$$14x^2 = 25 - 5\sqrt{25 - 7x^2} = 7x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\frac{26}{abc} \geq \frac{32}{2 \cdot 7}$$

$$ab : 2 \cdot 7^0, bc : 2 \cdot 7^1, ac : 2 \cdot 7^2$$

$$\min(a \cdot b \cdot c) = ?$$

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \quad kl : m \Rightarrow kl \geq m$$

$$\begin{aligned} \min(a \cdot b) &= 2 \cdot 7^0 \\ \min(b \cdot c) &= 2 \cdot 7^1 \\ \min(a \cdot c) &= 2 \cdot 7^2 \end{aligned}$$

$$x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\begin{cases} a = 2 \cdot 7^0 \\ b = 2 \cdot 7^1 \\ c = 2 \cdot 7^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = 14 + 3 \\ 2x_2 = 10 + 20 \\ x_1 + z_1 = 20 \quad (\Leftrightarrow) \\ x_1 + y_1 = 14 \\ x_2 + z_2 = 37 \\ x_2 + y_2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8,5 \\ x_2 = 15 \\ z_1 = 11,5 \\ y_1 = 5,5 \\ z_2 = 22 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 26 \\ x_1 + y_2 + z_2 = 32 \end{cases}$$

$$\frac{10 + 17 + 37}{2} = 32$$

$$\min(a \cdot b \cdot c) > 2 \cdot 7^{64}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 15 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ y_1 + z_1 = 17 \\ y_2 + z_2 = 21 \\ x_1 + z_1 = 21 \\ x_2 + z_2 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - z_1 = -2 \\ x_1 - z_1 = 21 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} a \times b \times 7^0 \\ b \times c \times 7^1 \\ a \times c \times 7^2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = d_1 \\ x_2 - y_2 = d_2 \\ y_1 - z_1 = d_3 \\ y_2 - z_2 = d_4 \\ x_1 - z_1 = d_5 \\ x_2 - z_2 = d_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \cdot 7^0 \\ b = 1 \\ c = 2 \cdot 7^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \cdot 7^0 \\ b = 1 \\ c = 2 \cdot 7^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot 7^0 \\ b &= 2 \cdot 7^1 \\ c &= 2 \cdot 7^2 \\ ab &= 2 \cdot 7^1 \\ ac &= 2 \cdot 7^2 \\ bc &= 2 \cdot 7^3 \\ abc &= 2 \cdot 7^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a, b, c &\in \mathbb{N}^* \\ a \cdot b \cdot c &< 26 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 2 \cdot 7^0 \\ b = 1 \\ c = 2 \cdot 7^2 \\ a = 7^0, 3 \\ c = 7^2, 6 \\ b = 2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. $\frac{a}{b}$ - несокр. ($a, b \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

max m :

$$\begin{cases} a+b \leq m \\ a^2-6ab+b^2 \leq m \end{cases}$$

$$2 \cdot ((x-1,25)^2 - 0,625)$$

$$\frac{a}{b} \text{ - не сокр} \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1 \quad 2 \cdot (x^2 - 2,5x + 1,25 - 0,625)$$

$$\frac{(a+b)}{(a^2-6ab+b^2)} = \frac{(a+b)}{(a-b)^2 - 4ab} = \frac{(a+b)}{\cancel{(a+b)^2 - 8ab}} \stackrel{!m}{\Rightarrow} 8ab \leq m$$

$\frac{3}{7}$

$$\frac{3+7}{3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 7 + 7^2} \stackrel{!m}{\cancel{=}}$$

$$\begin{cases} a \leq m \\ b \leq m \end{cases} \text{ - неводим}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2+3}{2^2 - 6 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2} \stackrel{!m}{\cancel{=}}$$

$$m = (a+b)$$

$$\frac{199}{199-8 \cdot 100 \cdot 99}$$

$$\frac{20}{20-6 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 99} \stackrel{!m}{\cancel{=}}$$

$$\frac{3 \times 5}{3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 5} \stackrel{!m}{\cancel{=}}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \stackrel{!m}{\cancel{=}}$$

$$\frac{100}{100-2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100} \stackrel{!m}{\cancel{=}}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \stackrel{!m}{\cancel{=}}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot (x^2 - 2,5x + 1,25) = 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot 1,25 \cdot x + 1,25^2 - 0,625) = 2 \cdot ((x-1,25)^2 - 0,625)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3} = -\frac{6}{2x} - 5 \\ & \frac{3}{2} : \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3+1} + \sqrt{2x^2-5x+3} = -0,125 \\ & x \in (-\infty; 1] \end{aligned}$$

$$(x-1) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$$

~~но нет~~

$$\text{Верн: } (1,25, -0,125) \quad \text{Верн: } (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\begin{array}{c} \frac{10}{1} \cdot \frac{2}{1} \\ \times \quad \times \\ \hline 10 \end{array} \quad 1,25$$

$$\begin{array}{c} 2 \cdot 5 \cdot 3 \\ \times \quad \times \\ \hline 30 \end{array} \quad 1,25 \quad \text{go}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0,1 - 0,6 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \\ & \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \end{aligned}$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{35}{2} + 3 = \frac{49}{2} - \frac{35}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$$

$$2y \quad \frac{49}{2} + \frac{19}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}(4x^2 - 3x + 3) \cdot (4x^2 - 3x + 3) &= \\ &= \underline{16x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 12x^3} \cancel{+ 9x^2 - 9x + 12x^2 - 9x + 9} \\ &= 16x^4 + 9x^2 + 9 - 18x + 24x^2 - 24x^3\end{aligned}$$

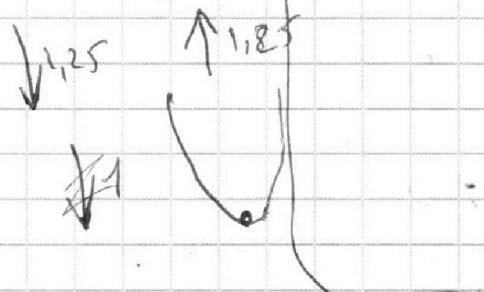
$$\begin{aligned}(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1) &= \\ &= \underline{4x^4 + 4x^3 - 2x^2} \cancel{- 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6} \cancel{x^2 + 6x + 3} \\ &= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 2x + 3 \\ &\quad \text{※}\end{aligned}$$

$$22 + 4 \cdot 12 \cdot 41$$

$$2 \cdot (x^2 - 2,5x + 3)$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 484 \\ \times 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 976 \\ \times 244 \\ \hline 12 \\ 16 \\ \hline 244 \\ 976 \\ \hline 244 \end{array}$$

$$4 \cdot 244 = 122$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 96 \\ \hline 366 \\ 549 \\ \hline 5960 \\ 596 \\ \hline 5960 \\ 596 \\ \hline 5960 \end{array}$$

$$976 \quad 244 = 2 \cdot 122$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 3 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$-\frac{D}{4a} - \frac{1}{8}$$

$$4 \cdot 2 \cdot 122 = 4 \cdot 4 \cdot 61$$

$$\sqrt{1,25} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{8}$$

$$-0,125$$

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ -1,25 \\ \hline 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$x \leq 1$$

$$2x^2 - 2x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 2x \cdot (x-1) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$x \in [0, 1]$$

$$(1, 25, -0, 125)$$

$$\uparrow (-\infty, 1, 25)$$

$$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\uparrow (-\infty, \frac{1}{2})$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$(x+8)^2 - y^2 - 1 \cdot (x^2 - y^2 - 1)$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$\text{reg 1}$$

$$-y_1, 0$$

$$\text{reg 2}$$

$$0, 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = \left(1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-b}{a}$$

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{36}{41}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 + 2x \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 \Leftrightarrow$$

$$-7x + 2 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \begin{matrix} (-12, 24) \\ 15 \\ 20 \\ 27 \end{matrix} \quad \begin{matrix} (3, 24) \\ 27 \end{matrix}$$

$$\sqrt{3^2} - \sqrt{1^2} = 2$$

$$x \cdot (41x - 36) = 0$$

$$x = \frac{36}{41}$$

$$24 \quad \frac{27}{24} - 0 \\ 24 - 0$$

$$y_2 = y_1$$

$$x_2 - x_1 \approx 6$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2 \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$





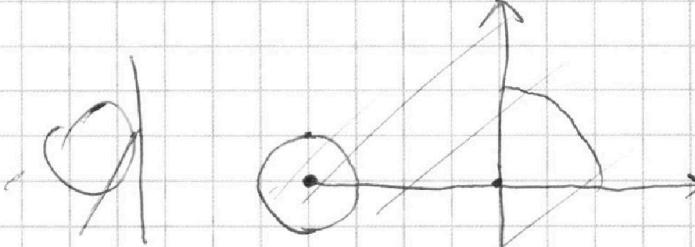
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

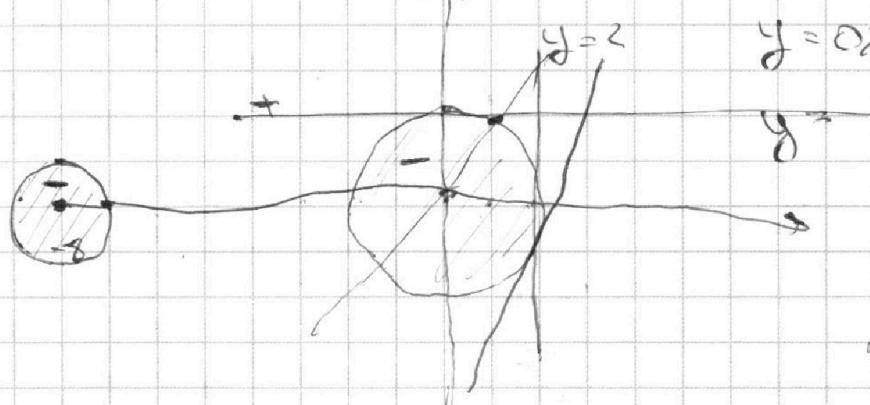
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = ax + b$$

коэффициенты можно определить



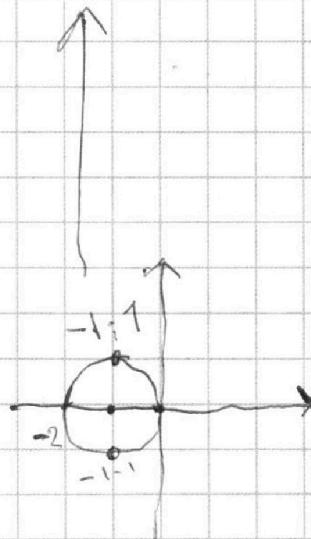
$$y = 0x + 2$$

$$y =$$

всеравн 1

$$\left. \begin{array}{l} \text{уравн} - y = cx + d \\ (x-8)^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (e)$$

$$(x-8)^2 + y^2 = 1$$



$$x = -1$$

$$y = 1$$