



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА N1

$$a, b, c : 2^{20} \cdot 7^{37} \rightarrow a, b, c : 7^{37}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{x_1} \cdot 7^{y_1} & (x_1, y_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ b &= 2^{y_2} \cdot 7^{z_2} & (y_2, z_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ c &= 2^{z_1} \cdot 7^{z_2} & (z_1, z_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \end{aligned}$$

заметим, что **минимальные** показатели в кратном разложении **каждого** из a, b, c **не могут** быть 2^k и 7^k **вместе** (т.к. тогда a, b, c делились бы на $2^k \cdot 7^k$ и тогда $a, b, c \in \mathbb{N}$), а они не будут делиться на $2^k \cdot 7^k$ и 7^k , а **каждый** из них **выделит** **эти** показатели, но это никак не повлияет на **выполнение** условия, а **просто** **увеличит** **каждое** **число** (а для условия это **никогда** **не** **поможет**).

$$\begin{cases} x_1 + y_1 \geq 14 \\ y_1 + z_1 \geq 17 \\ z_1 + x_1 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 \geq 51 \end{cases} \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 \geq \frac{51}{2} \Rightarrow 26$$

$$\Rightarrow \lceil \frac{51}{2} \rceil = 26$$

т.о. **наименьшее** из **возможных** **произведений** **равно** **делится** **на** 7^{37} **и** **на** 2^{26} , а **значит** **равно** **или** **больше** $7^{37} \cdot 2^{26}$.

пример **какого**:

$$\begin{aligned} a &= 7^{10} \cdot 2^8 & ab &= 2^{17} \cdot 7^{10} : 2^{17} \cdot 7^{10} \\ b &= 2^6 \cdot 7^6 & bc &= 2^{18} \cdot 7^{12} : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ c &= 7^{27} \cdot 2^{12} & ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

т.о. **наименьшее** **произведение** **равно** $2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №2

$\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$
 ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$)

Заметим, что $\text{НОД}(a+b, a) = \text{НОД}(a+b, b) = 1$

т.к. гон-во от кром:

$\exists \alpha: \text{НОД}(a+b, a) = \alpha \Rightarrow a+b - a = b = \alpha \cdot k$
 $a+b: \alpha \cdot k$

\Rightarrow но $\text{НОД}(a, b) = 1, a \begin{cases} a: \alpha \cdot k \\ b: \alpha \cdot k \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 8ab}$$

\exists этот гребь сократима на $\alpha \in \mathbb{N}$, тогда

$\begin{cases} a+b: \alpha \\ (a+b)^2 - 8ab: \alpha \end{cases} \Rightarrow 8ab: \alpha$

т.о. $\begin{cases} a+b: \alpha \\ 8ab: \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot 8: \alpha \Rightarrow \alpha \leq 8$

пример, где $m=8$

~~$a=8^{100}, b=3, a+b=8^{100}+3, a^2-6ab+b^2=(8^{100}-3)^2-6(8^{100}-3)+3^2$~~

сокр. т.к. $8^{100}-3 \not\div 3$ ($3:3, 8^{100} \not\div 3$)

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8^{100} - 3 + 3}{(8^{100} - 3)^2 - 6(8^{100} - 3) + 3^2} = \frac{8^{100} : 8}{(8^{100})^2 - 8 \cdot (8^{100} - 3)}$$

можно сокр. на 8

Ответ: при $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

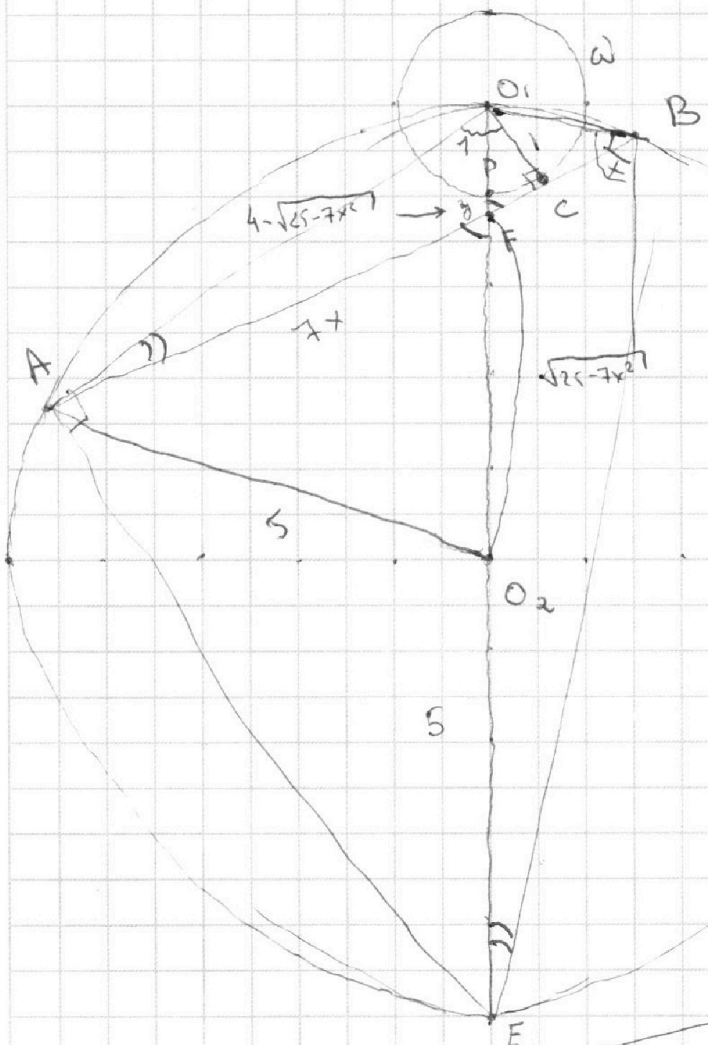
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА №3



$$AC : CB = 7$$

$$\begin{cases} AC = 7x \\ CB = x \end{cases}$$

$$DF = y$$

по теор. о секущих:

$$7x \cdot x = (OD + y) \cdot (OD - y)$$

$$\cdot (ED - y) \cdot (ED + y)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 = (1 + y) \cdot (9 - y)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 = 9 + 8y - y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 8y - (9 - 7x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot (9 - 7x^2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \pm \sqrt{25 - 7x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 - \sqrt{25 - 7x^2}$$

(из условия $y < 4$ и $OD + y < 5$)

(DF выг-ен мк. ссм AB ⊥ EO₁, но AD = AB) D = C и AE = AB)

$$FC \text{ по теор. мк.} = \sqrt{\left(\frac{7x + \sqrt{25 - 7x^2}}{2}\right)^2 - 1} = FC = \sqrt{\left(\frac{7x + \sqrt{25 - 7x^2}}{2}\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{49x^2 + 25 - 7x^2 - 4}{4}} = \sqrt{\frac{42x^2 + 21}{4}} = \frac{\sqrt{21(2x^2 + 1)}}{2}$$

$\angle EAO_1 = \angle EBO_1$ (оцпр. на дуге, впис.)
 $\angle O_1EB = \angle O_1AB$ (оцпр. на одну дугу, впис.)
 $\triangle AOC \sim \triangle O_1BE$ (по двум углам и радиусам)

по теор. о хордах: $\sqrt{AC} \cdot \sqrt{CB} = 1 \Rightarrow AC \cdot CB = 1$

FC выг-ен по теор. мк. $\triangle O_1CF$
 $(7x + FC) \cdot (x - FC) = 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 7x \cdot FC + FC^2 - FC^2 = 1 \Leftrightarrow 7x^2 - 7x \cdot FC = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$x \leq 1$$

$$2x^2-2x+1 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1} \quad \text{орз}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+3 = 1 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7x+2 = 2\sqrt{2x^2+2x+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49x^2+4-28x = 4 \cdot (2x^2+2x+1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41x^2-36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{36}{41} \end{cases}$$

$$\text{орз: } \begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 2x^2+2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (2x-3) \geq 0 \\ 2 \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left(1; \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 0; \frac{2}{7}; \frac{36}{41} \right\} \quad \text{проверим корни:}$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{1} = 2 - 0 = 2 \quad \text{норм}$$

$$\sqrt{2 \cdot \left(\frac{36}{41}\right)^2 - 5 \cdot \frac{36}{41} + 3} + \sqrt{2 \cdot \left(\frac{36}{41}\right)^2 + \frac{36}{41} + 1} = 1 \quad \text{норм}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ЗАДАЧА N 4

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &\Leftrightarrow a \\ 2x^2 + 2x + 1 &\Leftrightarrow b \end{aligned} \quad (*)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad (***)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \quad (***) \quad \text{цел. чл.}$$

~~Заметим, что как ОДЗ~~ $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases}$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (x-1) \cdot (x-\frac{3}{2}) \geq 0 \\ 2 \cdot ((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (1; \frac{3}{2})$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1)} = 1 \quad (***)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 4 = -2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1)} \quad (***)$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 3x + 3)^2 = 4 \cdot (2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1) \quad (***)$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 + 9x^2 - 9 - 18x + 24x^2 - 24x^3 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12$$

$$\Leftrightarrow 33x^3 + 25x^2 - 22x - 41x^2 - 22x - 3 \Leftrightarrow 41x^2 - 22x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41}}{82} \quad \Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82}$$

Углубим $2x^2 - 5x + 3$ - парабола с ветв. вверх, укажем мин. значение в вершине.

если $x > \frac{3}{2}$, то $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > \sqrt{2x^2 + 2x + 1} >$

$$> \sqrt{2(\frac{3}{2})^2 + 2 + 1} > 1$$

если $x \leq 1$, то сох. цел. чл. ~~цел. чл.~~

$$(**) \text{ если } \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \quad \frac{2}{7} - \text{корень ур. (онк. в ОДЗ)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА N5

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$$

① ~~$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) = (15 - (-12)) = 27$~~

т.о. $(x_2 - x_1) \in [-27; 27] \Rightarrow 2 \cdot (x_2 - x_1) \in [-54; 54]$ ← *минимум*

$$(y_2 - y_1) \in [-24; 24]$$

	$2 \cdot (x_2 - x_1)$	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$
корни:	-12	24	-6
	-10	22	-5
	-8	20	-4
			⋮
	36	-24	18

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

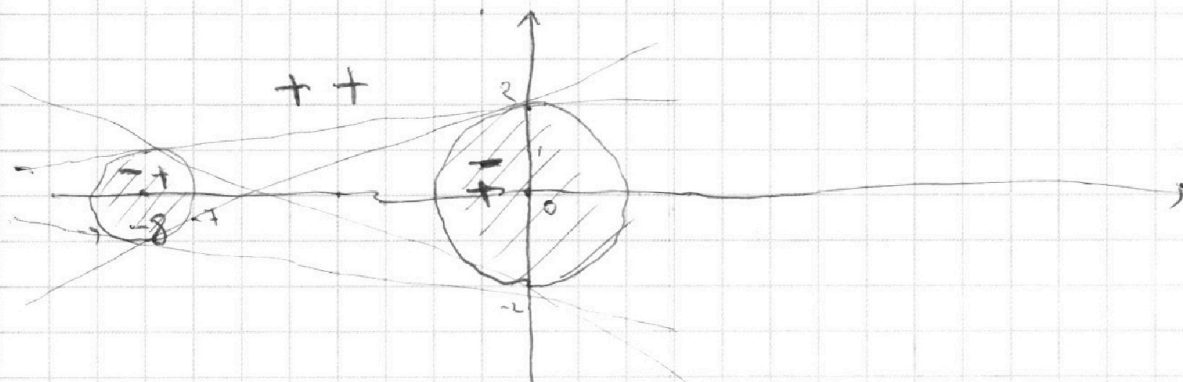


- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА 6



$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$ - окружность центр: $(-8; 0)$ $R = 1$

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ - окружность центр: $(0; 0)$ $R = 2$

первое $((x+8)^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ во внешности

во обеих окружностях на границе окружностей

мы так скажем от одной будет круг.

назовем - и окружность, а от обеих назовем - и назовем

если уравнение линейное - система линейных уравнений с двумя переменными \Rightarrow $ax - y + 10b = 0$ - линейное уравнение для обеих окружностей

$ax - y + 10b = 0 \Leftrightarrow y = ax + 10b$

~~$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$~~

~~$\Leftrightarrow 16x = -68 \Leftrightarrow x = -\frac{68}{16} = -\frac{17}{4}$~~

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$
 $x^2 + y^2 - 4 = 0$
 $\Rightarrow x^2 + 16x + 64 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4$
 $\Leftrightarrow 16x = -67 \Leftrightarrow x = -\frac{67}{16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



касательная к окружности всего параболы а касательная
к, как и 4 касательных

касательных для левой параболы

$$\left. \begin{array}{l} y = cx + d \\ (x+8)^2 + y^2 - 14 = 1 \end{array} \right\}$$

или-то для параболы:

$$\left. \begin{array}{l} y = Ex + F \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array} \right\}$$

и имеют пересечение, когда $c = E, F = d$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y^2 - 8y - (9 - 7x^2) = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot (9 - 7x^2)}}{2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9 - 7x^2} =$$

$$= 4 \pm \sqrt{25 - 7x^2}$$

⚠ $\sqrt{a^2} = |a|$

$$y = 4 - \sqrt{25 - 7x^2} \quad \text{из условия}$$

$$4 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$5x = 2 \cdot a \cdot b$
 $b = \frac{5}{2\sqrt{2}}$

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$

$2x^2 - 5x + 3 > 0$ (с) $\frac{3}{2}$
 $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{15}{2} + \frac{6}{2}$
 $\frac{9}{2} - \frac{15}{2}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$
 $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (a - b) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 1$
 $a - b = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$$2x^2 + 2x + 1 > 0$$

$$-2 \pm \sqrt{4 - 8}$$

$$2 \cdot \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \quad 1$$

$$2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = (2 - 7x) + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = (2 - 7x)^2 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 2 \cdot (2 - 7x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 - (2 - 7x)^2 - 2x^2 - 2x - 1 = (4 - 14x) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$(x - 1) \cdot (2x - 3) = 2x^2 - 2x - 3x + 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



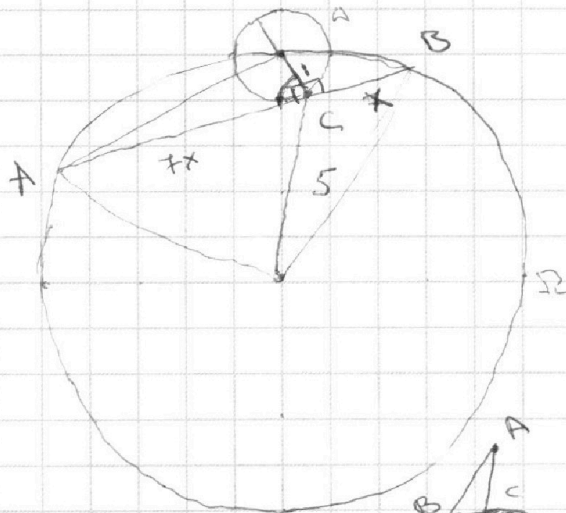
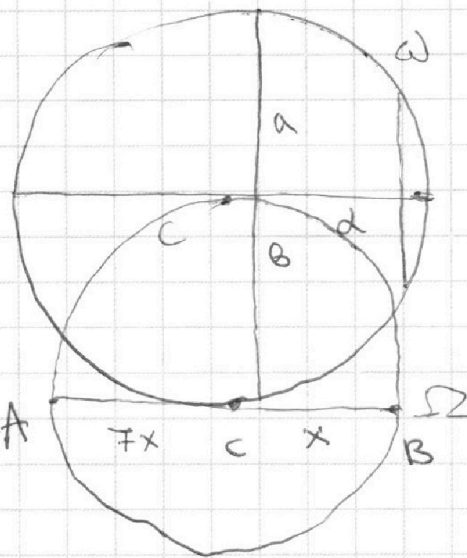
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



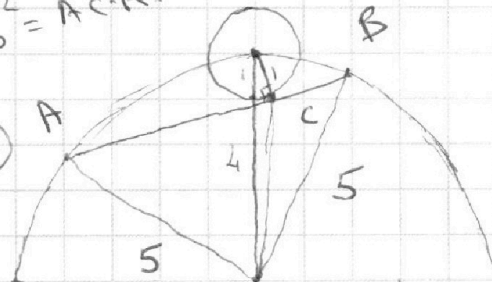
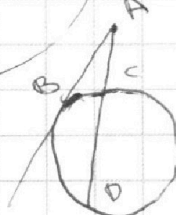
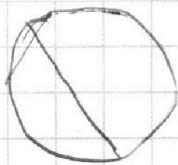
3



$$\left. \begin{array}{l} 4-3 \quad 12 \\ 5-5 \quad 15 \\ 6 \quad 6 \end{array} \right\} 33$$



$$AB^2 = AC \cdot AD$$



$$ab = cd$$

$$y^2 - 8y - 9 + 7x^2 = 0$$



$$7x \cdot x = (9 - y) \cdot (1 + y)$$

$$7x^2 = 9 + 8y - y^2$$

$$y^2 - 8y - 9 + 7x^2 = 0$$

$$y = 8 \pm \sqrt{64 - 4(-9 - 7x^2)}$$

$$\left(5 - \sqrt{25 - 7x^2} \right) \cdot \left(-\sqrt{25 - 7x^2} \right) = 7x^2$$

$$-5\sqrt{25 - 7x^2} + 25 - 7x^2 = 7x^2$$

$$14x^2 = 25 - 5\sqrt{25 - 7x^2} = 7x^2$$

$$\left(1 + (4 - \sqrt{25 - 7x^2}) \right) \cdot \left(4 - (4 - \sqrt{25 - 7x^2}) \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}, bc: 2^{17} \cdot 7^{17}, ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\min(a \cdot b \cdot c) = ?$$

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \quad kl \geq m \Rightarrow kl \geq m$$

$$\min(a \cdot b) = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$\min(b \cdot c) = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$\min(ac) = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow \min((a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c)) = 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37} =$$

$$= 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow \min(a$$

$$x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{N} \quad x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{N}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1} \quad b = 2^{x_2} \cdot 7^{y_2} \quad c = 2^{z_1} \cdot 7^{z_2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 14 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ y_1 + z_1 = 17 \\ y_2 + z_2 = 17 \\ x_1 + z_1 = 20 \\ x_2 + z_2 = 37 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 14 + 3 \\ 2x_2 = 10 + 20 \\ x_1 + z_1 = 20 \\ x_1 + y_1 = 14 \\ x_2 + z_2 = 37 \\ x_2 + y_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8,5 \\ x_2 = 15 \\ z_1 = 11,5 \\ y_1 = 5,5 \\ z_2 = 22 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

$$\frac{14+17+20}{2} = 26$$

$$x_1 + y_1 + z_1 = 26$$

$$x_2 + y_2 + z_2 = 32$$

$$\min((abc)^2) > 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 15 \\ x_2 + y_2 = 10 \\ y_1 + z_1 = 17 \\ y_2 + z_2 = 17 \\ x_1 + z_1 = 21 \\ x_2 + z_2 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - z_1 = -2 \\ x_1 - z_1 = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = d_1 \\ x_2 + y_2 = d_2 \\ y_1 + z_1 = d_3 \\ y_2 + z_2 = d_4 \\ x_1 + z_1 = d_5 \\ x_2 + z_2 = d_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2^{14} \cdot 7^{10} \\ b = 1 \\ c = 2^{17} \cdot 7^{17} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2^{7} \cdot 7^{17} \\ b = 2^{7} \cdot 7^{5} \\ c = \end{cases}$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$\begin{cases} a+b \geq 14 \\ b+c \geq 17 \\ a+c \geq 20 \\ 2(a+b+c) \geq 51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b+c) \geq \frac{51}{2} \\ a, b, c \in \mathbb{N}_0 \\ a+b+c \geq 26 \end{cases} \quad abc: 7 \cdot 2$$

$$\begin{cases} a = 2^{17} \cdot 7^{19} \\ b = 1 \\ c = 7 \cdot 3 \cdot 8 \\ a = 7^{10} \cdot 2 \\ c = 7^{17} \cdot 2 \\ b = 2 \cdot 3 \cdot 6 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2. $\frac{a}{b}$ - несократ. ($a, b \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

max m : $\begin{cases} a+b \equiv m \\ a^2-6ab+b^2 \equiv m \end{cases}$

$$2 \cdot ((x-1,25)^2 - 0,625)$$

$\frac{a}{b}$ - не сократ \Rightarrow НОД(a, b) = 1 $2 \cdot (x^2 - 2,5x + 1,25 - 0,625)$

$$\frac{(a+b)}{(a^2-6ab+b^2)} = \frac{(a+b)}{(a-b)^2 - 4ab} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 8ab} \Rightarrow 8ab \equiv m$$

$$\frac{3}{7}$$

~~$$\frac{3+7}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 7+7^2} = \frac{10}{9-49} = \frac{10}{-40} = -\frac{1}{4}$$~~

~~$$\frac{2}{3}$$~~

~~$$\frac{2+3}{2^2-6 \cdot 2 \cdot 3+3^2} = \frac{5}{4-36} = \frac{5}{-32}$$~~

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{m}{m}$$

$$\begin{cases} a \equiv m \\ b \equiv m \end{cases} \text{ - не верно}$$

~~$$\frac{20}{41} = \frac{20+41}{20^2-6 \cdot 20 \cdot 41+41^2} = \frac{61}{400-492+1681} = \frac{61}{1189}$$~~
~~$$\frac{49}{99} = \frac{49+99}{49^2-6 \cdot 49 \cdot 99+99^2} = \frac{148}{2401-2940+9801} = \frac{148}{9262}$$~~
~~$$\frac{100}{101} = \frac{100+101}{100^2-6 \cdot 100 \cdot 101+101^2} = \frac{201}{10000-12120+10201} = \frac{201}{1981}$$~~
~~$$\frac{100}{101} = \frac{100+99}{100^2-6 \cdot 100 \cdot 99+99^2} = \frac{199}{10000-5940+9801} = \frac{199}{3861}$$~~
~~$$\frac{201}{100+101-6 \cdot 100 \cdot 101} = \frac{201}{10100-60600+10201} = \frac{201}{-40299}$$~~
~~$$\frac{201}{100+99-6 \cdot 100 \cdot 99} = \frac{201}{9900-59400+9801} = \frac{201}{-49699}$$~~

$$2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot (x^2 - 2,5x + 1,5) = 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot 1,25 \cdot x + 1,5625 - 0,625)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3} = \frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{2} : \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+3+1} + \sqrt{\dots}$$

$$3x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 5x + 3 = -0,125$$

$$x \in (-\infty; 1]$$

$$(x-1) \cdot (x-\frac{3}{2})$$

но не

$$\frac{2}{1} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Верши: $(1,25; -0,125)$ Верши: $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$$\frac{10}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{2}{7} \cdot 5 + 3$$

go 1,25

$$\frac{2}{7} \cdot 2 + 1 = \frac{4}{7} + 1 = \frac{11}{7}$$

am 1,25 go

$$7x = 2$$

$$x = 3,5$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{35}{2} + 3 = \frac{49}{2} - \frac{35}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2}$$

$$2 \sqrt{\frac{49}{2} + \frac{6}{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(4x^2 - 3x + 3) \cdot (4x^2 - 3x + 3) =$$

$$= 16x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 12x^3 + 9x^2 - 9x + 12x^2 - 9x + 9 =$$

$$= 16x^4 + 9x^2 + 9 - 18x + 24x^2 - 24x^3$$

$$(2x^2 - 5x + 3) \cdot (2x^2 + 2x + 1) =$$

$$= 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 =$$

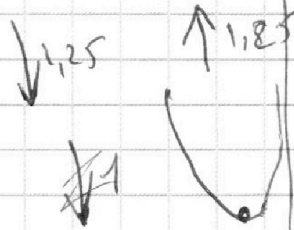
$$= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 6x + 3$$

$$22 + 12 \cdot 41$$

$$2 \cdot (x^2 - 2,5x + 3)$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 484 \\ \times 492 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$976 = 2$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 244} \\ \underline{-8} \\ 17 \\ \underline{-16} \\ 16 \end{array}$$

$$4 \cdot 244 = 122$$

$$12$$

$$\begin{array}{r} 244 \\ \times 4 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 3 = 61,2$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 96 \\ \hline 366 \\ 549 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$960 - 96 \cdot 60 + 96$$

121

$$976$$

$$244 = 2 \cdot 122$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 3 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$-\frac{D}{4a}$$

$$-\frac{1}{8}$$



$$4 \cdot 2 \cdot 122 = 4 \cdot 4 \cdot 61$$

$$\frac{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{8}$$

$$\sqrt{1,25} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$-0,125$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$x \leq 1$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 2x \cdot (x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$x \in [0; 1]$$

$$(1, 25, -0, 125)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\uparrow \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

$$\uparrow (-\infty, 1, 25)$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$(x+3)^2 - y^2 - 1 \cdot (x^2 + y^2 - 4)$$

$$\begin{matrix} \text{пусть } 1 \\ -4, 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{пусть } 2 \\ 0, 0 \end{matrix}$$

$$x \in [-1, 0]$$

$$2x^2 - 5x + 3 = \left(1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right)^2$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{36 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$-7x + 2 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

27

20

27

$$\sqrt{3} - \sqrt{1} = 2$$

$$x \cdot (41x - 36) = 0$$

$$x = \frac{36}{41}$$

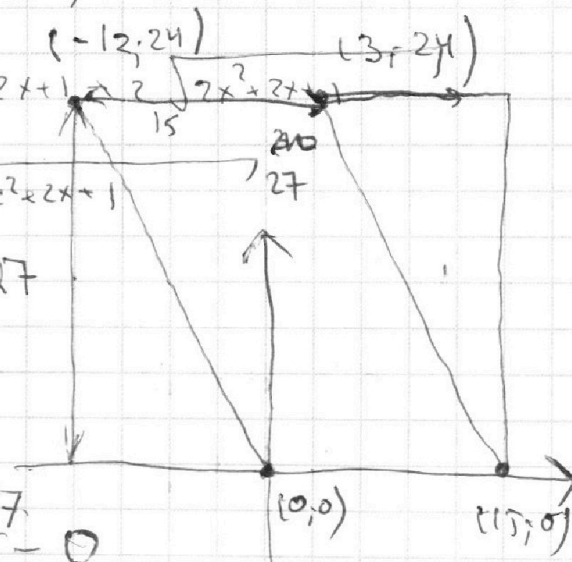
$$\begin{matrix} 27 \\ 27 - 0 \\ 27 - 0 \end{matrix}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2 \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$y_2 = y_1$$

$$x_2 - x_1 = 6$$



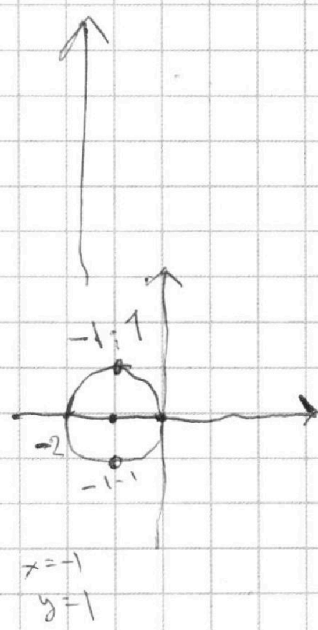
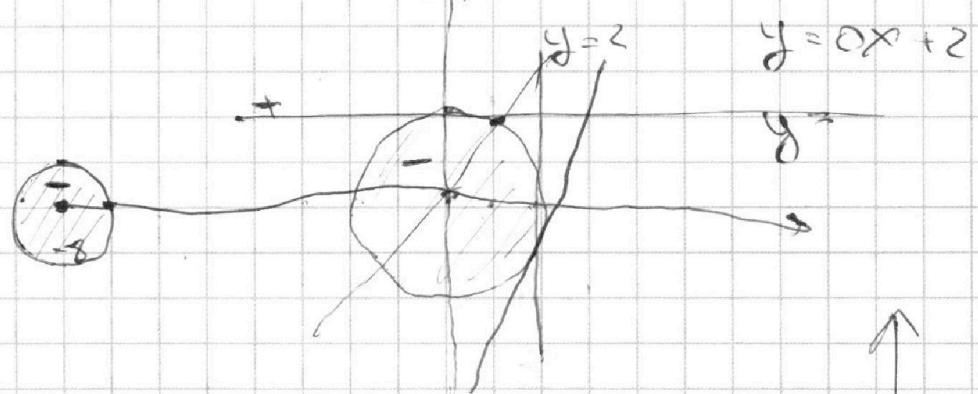
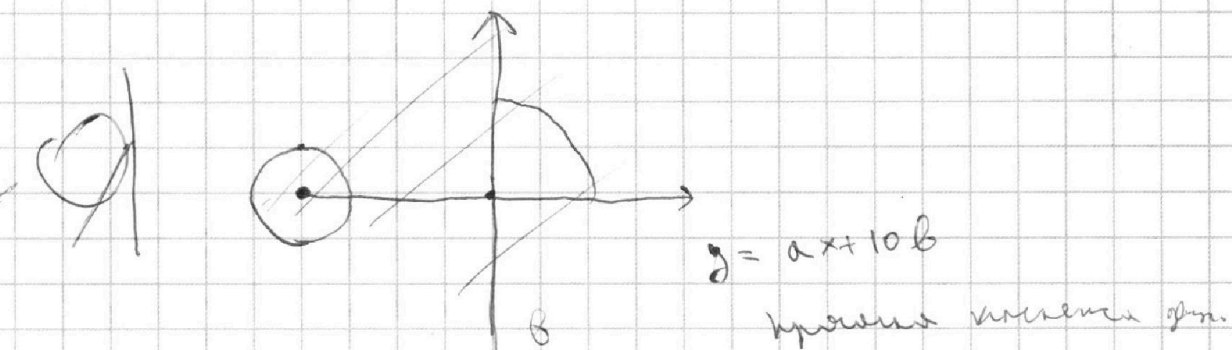
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



как для 1

$$\left. \begin{aligned} & y = cx + d \\ & (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \right\} (*)$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$