МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1

1) Заметим, что если $\exists k \in N$: $k>1$, $k \not\vdots 2$, $k \not\vdots 7$, $a \vdots k$ или $b \vdots k$ или $c \vdots k$, то мы можем заменить числа на $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$ или $\frac{c}{k}$, и от этого условие не перестанет выполняться. То есть ~~нод~~ все числа представимы в виде $2^x \cdot 7^y$.

2) Пусть $a = 2^x \cdot 7^y$, $b = 2^\alpha \cdot 7^\beta$, $c = 2^k \cdot 7^m$

$ab = 2^{(x+\alpha)} \cdot 7^{(y+\beta)} \vdots 2^{14} \cdot 7^{10} \Rightarrow$

$bc = 2^{(\alpha+k)} \cdot 7^{(m+\beta)} \vdots 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow$

$ac = 2^{x+k} \cdot 7^{y+m} \vdots 2^{20} \cdot 7^{37}$

$$\begin{cases} x+\alpha \geq 14 \\ y+\beta \geq 10 \\ \alpha+k \geq 17 \\ \beta+m \geq 17 \\ x+k \geq 20 \\ y+m \geq 37 \end{cases}$$

$(x, y, \alpha, \beta, k, m \in \mathbb{Z}$ (цел, неотр) $N \cup \{0\})$ ← все степени ≥ 0, т.к. числа $a, b, c \in N$

3) $abc = 2^{(x+\alpha+k)} \cdot 7^{(m+y+\beta)}$

4) Заметим, что условия по ст-ням 2-ки и 7-ки независимы, т.е. мы можем отдельно минимизировать каждый сомножитель

5) для 2:

$$\begin{cases} x+\alpha \geq 14 \\ \alpha+k \geq 17 \\ x+k \geq 20 \end{cases}$$

$2(x+\alpha+k) \geq 51$, т.к. все числа ~~неотриц~~ целые, то $2(\ )$ – четно и мин. зн-е. для $(x+\alpha+k) \geq \frac{51}{2} = 25{,}5 \Rightarrow (x+\alpha+k) = 26$.

6) Аналогично для 7.

$$(7)\begin{cases} y+\beta \geq 10 \\ \beta+m \geq 17 \\ y+m \geq 37 \end{cases}$$ 54

$2(y+\beta+m) \geq 64$ $m+\beta+y \geq 32$

$abc = 2^{x+\alpha+k} \cdot 7^{m+y+\beta} \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$ по доказанному.

Пример: для 2-ки. $x = 8$, $\alpha = 6$, $k = 12$

однако. заметим, что решая систему (7), мы получим, что $y - \beta \geq 20$ (вычев 2 и 3 нер-ва), в то время как $y+\beta \geq 10$, т.е. в примере для минимума $y \geq 20+\beta$, $\beta \leq y-20$, $10 \leq y+\beta \leq 2y-20 \Rightarrow$
$\Rightarrow y \geq 15 \Rightarrow$ но из условия $\beta \geq 0$ (степени деления у нат. чисел) $y \geq 20$

$\Rightarrow y \geq 20 \Rightarrow m \geq 17 \Rightarrow \beta \geq 0$ и

$\beta = 0$ $m = 17$ $y = 20$ удовлетворяет всем условиям, (при этом показано, почему y не меньше 20), а сумма $\beta+m$ ~~строго~~ ≥ 17 по усл, при этом все нер-ва выполнены)

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 3^{37}$ при $a = 2^8 \cdot 7^{20}$, $b = 2^6 \cdot 7^0$, $c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик + построение пример

$x+\alpha=14$
$\alpha+k=18$
$x+k=20$

$k-\alpha=6$
$k+\alpha=18$

$k=12$
$\alpha=6$

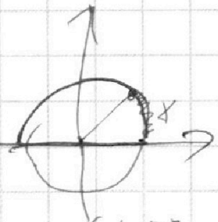
$8+6=14$
$12+6=18$
$12+8$

$y+\beta=10$
$\beta+m=17$
$y+m=37$

$y-\beta=20$
$y+\beta=10$

$y=15$
$x=-5$

$tg\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)$
$ctg(\alpha+\beta)$



$\cos(\alpha+\beta-90)=$
$=\cos\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\gamma)$

$\frac{4x}{5}=\frac{1}{\sqrt{7x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-7x\cdot x$

$\frac{4x}{5}=\frac{1-7x^2}{\sqrt{7x^2+1}\cdot\sqrt{x^2+1}}$

$1-7x^2$

$4x\cdot\left(\frac{4}{7}+\sqrt{25-4x^2}\right)=\frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}}\cdot\left(\quad\right)\cdot\sqrt{16x^2+\frac{16}{49}}$

$\frac{7x}{1}=tg\,\alpha \qquad \frac{x}{1}=tg\,\beta \Rightarrow tg\,\alpha=7tg\,\beta$

$\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\, tg\,\beta}$

$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\, tg\,\beta}=\frac{7\,tg\,\beta}{1-7tg^2\beta}$

$\frac{4x}{h}=\frac{1-7x^2}{7x} \qquad \frac{28x^2}{h}=1-7x^2 \qquad h=\frac{28x^2}{1-7x^2} \qquad 1-7x^2\geq 0$
$7x^2\leq 1$
$x^2\leq\frac{1}{7}$

$\left(\frac{28x^2}{1-7x^2}\right)^2+16x^2=25 \qquad t=x^2 \qquad \frac{7x}{1-7x^2}$

$tg\left(180-\alpha-\beta\right) \quad tg(-\alpha-\beta)=$

$(28t)^2+16t(1-7t)^2=$
$=25(1-7t)^2$

$(35-28)(35+28)$

$7\cdot 63=49\cdot 9$

$28\cdot\frac{1}{16}$
$1-7\frac{1}{16}$

$(35t)^2+25+350t+16\cdot 49t^3$

$(25-16t)(49t^2+1-14t)=$
$=(28t)^2$

$-16t+16\cdot 14t^2=(28t)^2$

$490-49$

$16\cdot 49t^3-451t^2-224t^2+366t-25=0$

$14\cdot 16$ 200 24

$\frac{28/16}{9/16} \quad \frac{28}{9}+1$

$1-\frac{}{16}$

$\frac{4x}{h}=\frac{7x}{1-7x^2} \qquad \frac{7}{4}h=1-7x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(2) 1) $\dfrac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ 2) $\exists\, m$: m - макс и $\begin{cases}(a+b)\underset{m}{\equiv}0\\(a^2-6ab+b^2)\underset{m}{\equiv}0\end{cases}$

3) $a\underset{m}{\equiv}-b \Rightarrow a^2-6ab+b^2\underset{m}{\equiv}(-b)^2-6(-b)b+b^2\underset{m}{\equiv}8b^2\underset{m}{\equiv}0.$

4) Имеем 3 условия $\begin{cases}8b^2\underset{m}{\equiv}0\\a\underset{m}{\equiv}-b\\\text{НОД}(a,b)=1\end{cases}$ $\exists\, m=8\cdot k$, где $k>1$, тогда т.к. $8b^2\underset{m}{\equiv}0$, то b^2 кратно k. (т.е. $b^2=k\cdot x$

(*) $\alpha, k, x, m\in\mathbb{N}$.

Тогда $a\underset{m}{\equiv}-b \Leftrightarrow a^2\underset{m}{\equiv}b^2$ $a^2\underset{m}{\equiv}k\cdot x$

$a^2=\alpha\cdot m+kx=k(\alpha\cdot 8+x)$ з.я.

a^2 тоже кратен k. $k\neq1$ $a^2\,\vdots\,k$, $b^2\,\vdots\,k$ $\Rightarrow$ но тогда НОД (a,b) не равен единице.

что противоречит условию. $\Rightarrow$ предполож. неверно и $m\neq 8k$, где $k>1$ $\Rightarrow$

$m\not>8$. т.е. $m\leq8$

Пример для $m=8$:

$b=1$, $a=7$. $\dfrac{8}{49-42+1}=\dfrac{8}{8}=1$ $m=8$. $\frac{a}{b}=\frac{1}{7}$ - несократимо

Ответ: $m=8$

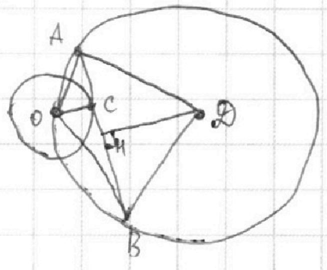
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

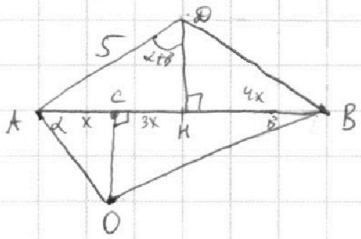
МФТИ

(3)



] 1) O – центр ω
] 2) D – центр Ω
3) DH ⊥ AB. ⇒ ∠ADH = ∠BDH; AH = HB = $\frac{AB}{2}$ (св-ва р/б △)

(△ADB – р/б, т.к. AD = DB = 5



1)] AC = x
2) ⇒ BC = 7x ⇒ HB = AH = 4x.
3)] ∠OAB = α, ∠ABO = β ⇒

$\smile AB = 2\alpha + 2\beta$ (св-ва впис. углов)

⇒ $\angle ADB = 2\alpha + 2\beta$ (центр угол)

4) ⇒ $\angle ADH = \angle BDH = \frac{\angle ADB}{2} = \alpha + \beta$ (DH – бис-са)

5) $ctg\,\alpha = \frac{x}{1}$, $ctg\,\beta = 7x$

6) $ctg\,\angle ADH = \frac{DH}{AH} = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x} = ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta - 1}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta} =$

$= \frac{7x^2-1}{8x}$ ⇒ $2\sqrt{25-16x^2} = 7x^2 - 1$.

$100 - 64x^2 = 49x^4 - 14x^2 + 1$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

⇒ $\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, \text{ т.к. } x > 0 \\ x^2 = -\frac{99}{49} \Rightarrow \varnothing \end{array}\right.$ ⇒ $AB = 8x = 8$ Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) $\exists$ $2-7x=a$ $\Rightarrow$ ур-е можно записать в виде.
$2x^2+2x+1=b$

$$\sqrt{b+a}-\sqrt{b}=a.$$

(x) видно, что при $a=0$ ур-е верно. $(\sqrt{b}-\sqrt{b}=0)$. „Домножим на сопряженное" к левой части.

Возведем в □ обе части

~~$b+a+b-2\sqrt{b^2+ab}=a^2$~~

~~$2\sqrt{(b^2+ab)}=a-a^2+2b$~~

~~Заметим, что под корнем у нас~~ ~~в то время нам~~

справа, т.е. не более двух общих точек.

~~решение 1: $a=0$~~

~~реш-е 2: $a=1$ $\sqrt{2-5+3}-\sqrt{2+2+1}=2-7$~~

~~$0-\sqrt{5}=7$~~

b^2 ~~$+ab=(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)$~~

~~$a-a^2+2b=2-7x-49x^2-4+14x+2x^2+2x+1=-47x^2+9x-1$~~

$$\left(\sqrt{b+a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{b+a}-\sqrt{b}\right)=a\cdot\left(\sqrt{b+a}+\sqrt{b}\right)$$ преобр равносильно, т.к. $\sqrt{a+b}+\sqrt{b}>0$

$$\left(\left(\sqrt{b+a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2\right)=a\cdot\left(\sqrt{b+a}+\sqrt{b}\right)$$

$$a=a\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b}\right)$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ \sqrt{b}+\sqrt{a+b}=1\end{array}\right.$$

~~$\sqrt{b}=1-\sqrt{a+b}$~~ ~~$b=1-a-b$~~

$$\sqrt{b}=1-\sqrt{a+b}$$

$$b=a+b+1-2\sqrt{a+b}$$

~~$a+b$~~ $a+1=2\sqrt{a+b}$

$$a^2+2a+1=4a+4b$$

$$(3-7x)^2=4\left(2x^2-5x+3\right)$$

$$49x^2-42x+9-8x^2+20x-12=0$$

$$41x^2-22x-3=0$$

$$D=121+3\cdot41=121+123=244=4\cdot61$$

~~$x=121$~~ $x=\dfrac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$

$\dfrac{11+2\sqrt{61}}{41}\ ?\ 1$

$2\sqrt{61}\ ?\ 30$

$\sqrt{61}\ ?\ 15$

$\dfrac{11+2\sqrt{61}}{41}\ \gtrless\ \dfrac{3}{2}$

$22+4\sqrt{61}\ \gtrless\ 123$

$4\sqrt{61}\ \gtrless\ 101$

$\sqrt{61}\ \gtrless\ 24$

$b>0$ при $\forall x$

$b+a=2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)>0\Rightarrow$ $x<1$ | $x>\frac{3}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4) ~~8.~~ итак. 3 решения.

$a=0 \Rightarrow \quad 2-7x=0 \quad x=\frac{7}{2}$

$x=\frac{11\pm 2\sqrt{61}}{41} >$ ~~3 заметим, что~~ ~~4~~

и ограничения $\left(\begin{matrix} b>0 \\ a+b>0 \end{matrix}\right.$ т.к. $\sqrt{\ }$ существуют)

$b>0$ при $\forall x$, $(D<0)$ $\quad a+b>0$ при $\begin{cases} x<1 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$

$\frac{11-2\sqrt{61}}{41} < \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \qquad \frac{11+2\sqrt{61}}{41} < 1$

т.к. $2\sqrt{61} < 41-11=30$

т.к. $\sqrt{61} < 15 = \sqrt{225}$

$\Rightarrow$ оба числа корни.

Ответ: $x=\frac{7}{2}$ (тоже подходит)

$x=\frac{11\pm 2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

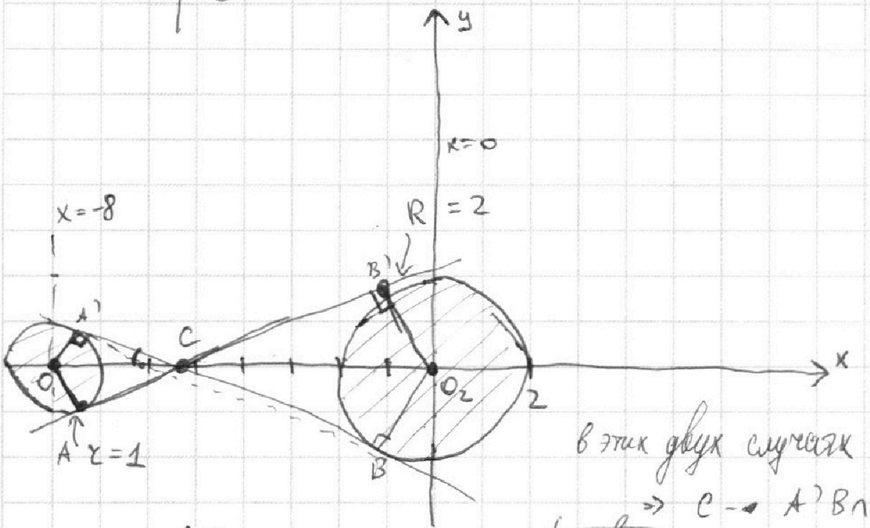
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6 $\left(\left(x-(-8)\right)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right)\le 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2-4\ge 0\\(x+8)^2+y^2-1\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2-4\le 0\\(x+8)^2+y^2-1\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Это окр-ти. Начертим и отметим соотв области.



если такие a есть, то ~~гр~~ прямая (~~ax-y~~ $y = ax+(0b)$) – это общая касательная этих окр-тей.

в этих двух случаях Δ-ки $CA'O_1$, CAO_1 равны.

$\Rightarrow C$ – $A'B\cap AB' = C$, $C_x = 0$. ~~(равны)~~

$\triangle OA'C \sim \triangle O_2BC$, $k=\frac{1}{2}$ $\frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A'}{O_2B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{O_1C}{8-O_1C} = \frac{1}{2}$ $\quad O_1C = \frac{8}{3}$

Тогда для пр-й $A'B$ ур-е имеет вид $y = ax+k$, где $a = \operatorname{tg}\angle A'CO_2 = -\operatorname{tg}\angle A'CO_1 = -\frac{O_1A'}{A'C} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{64}{9}-1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{55}{9}}} = -\frac{3}{\sqrt{55}}$ (нам также подойдет противоположный $a=\frac{3}{\sqrt{55}}$, т.к. он задает две общие внутр. касательные (AB'))

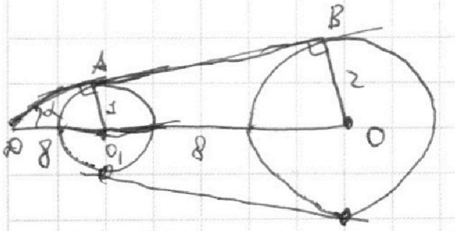
$\exists\, AB\cap OO_1 = D$ $\quad O_1A \parallel OB$ ($\perp$ на BD)

$\triangle ADO_1 \sim \triangle OBD$, $\Rightarrow \frac{DO_1}{DO_1+8} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow AD = \sqrt{64-1} = \sqrt{63} = 3\sqrt7$~~

~~$\Rightarrow AB = AD = 3\sqrt7$~~

$AD = \sqrt{64-1} = \sqrt{63} = 3\sqrt7$



AB имеет ур-е прямой $y = ax+k$, $a = \operatorname{tg}\angle BAD = \frac{1}{3\sqrt7}$

также подходит $a = -\frac{1}{3\sqrt7}$, он задает противоположную внеш. кас-ю $A'B'$. других a нет, т.к. общих кас-х окр-тей всего 4. ~~Ответ: $\pm\frac{\sqrt7}{21}$, $\pm\frac{3}{\sqrt{55}}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

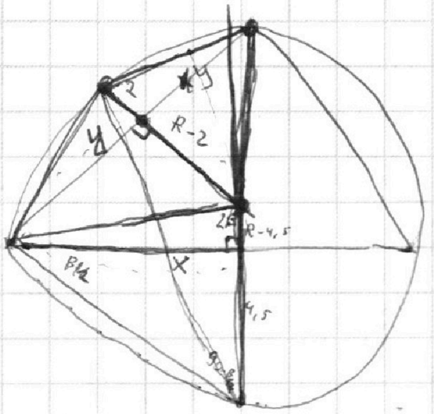
Ответ: $\pm\frac{\sqrt{7}}{21}$

$\pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\cancel{tg\, \beta = 9}$

$\cancel{ctg\,\beta =}\ tg\, \beta = \frac{9}{2x}$

$tg\, 2\beta = \frac{2 \cdot \frac{9}{2x}}{1 - \frac{81}{4x^2}} = \frac{x}{R - \frac{9}{2}}$

$\frac{36}{4 - \frac{81}{x^2}} = \frac{2x}{R - 9}$

$x^2 = \frac{81}{4} - 9R$

$\cancel{(9R - 81)(36) = 2x(}$

$(9R - 81) \cdot 4 = 2x\left(4 - \frac{81}{x^2}\right)$

$\left(\frac{81}{4} - x^2 - 81\right) \cdot 2 = \left(4x - \frac{81}{x}\right)$

$(81 - 4x^2 - 324) = \left(8x - \frac{162}{x}\right)$

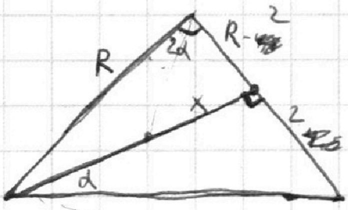
$4x^2 - 243 = 8x - \frac{162}{x}$

$\cancel{4 - 243 ? 8 - 162}$

$4x^3 - 8x^2 - 243x + 162 = 0$

$\cancel{4 \cdot 8 - 8 \cdot 4 -}$

$\cancel{4 \cdot 216 - 8 \cdot 36 - 243 \cdot 6,}$



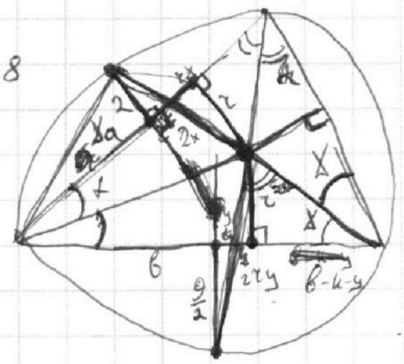
$x^2 = 4 - 4R$

$tg\, \alpha = \frac{2}{x}$

$tg\, 2\alpha = \frac{4/x}{1 - \frac{16}{x^2}} = \frac{x}{R - 2}$

$\frac{\frac{4}{x} \cdot x^2}{x^2 - 16} = \frac{4x}{4R - 8}$

$\frac{4x}{x^2 - 16} = \frac{4x}{4 - x^2 - 8}$



$\cancel{a + x(r+2) = b}$

$a + 2x + rx = b + 9y + 2ry$

$(a + 2x + rx)^2 + r^2$

$\sin \alpha = \frac{r}{d}$

$\left(\frac{ar}{2}\right)^2 + r^2 = d$

$\frac{a}{2} = \frac{b - 9y - 2ry}{r} = \frac{a + 2x + rx}{r}$

$\frac{ar}{2} = 2a + 2x + 2rx$

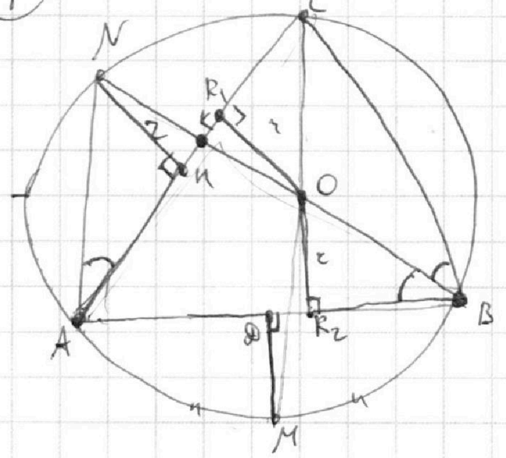
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

7



1) BN – бис-са, т.к. $\smile NC = \smile NA$
CM – бис-са

2) $BN \cap CM = O$
AO – искомая р-с (т.О ∩ я бис-с – центр впис окр) впис

$\angle NAC = \angle OBA$ (на $\smile NC$)

3) $OR_1 \perp AC$ $\quad OR_1 = OR_2 = r$
$OR_2 \perp AB$

4) $AR_1 = AR_2$ (отрезки кас-х)

5) а т.к. $\smile NA = \smile NC$, то $\angle OBA = \angle NAC$

6) $\cancel{\angle AN}$ $\frac{NH}{AH} = \frac{OR_2}{BR_2}$

$\triangle ANH \sim \triangle OR_2B$

$\frac{2}{AH} = \frac{r}{R_2B}$, аналогично $\cancel{AD}$ $\frac{9}{2AD} = \frac{r}{R_1C}$

$\Rightarrow \frac{2R_2B}{AH} = \frac{9 \cdot R_1C}{2AD} = 2r.$

~~(найти надо~~

7) MD – ?, NH – сер-перы, т.к. M, N – середины дуг.

8) $\exists\ BN \cap AC = K$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(2) $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ $\quad \frac{b+1}{b^2-6b+1}$

$b^2-6b+1 = k(b+1)$ $\quad 1400-31$ $\quad a+b=m$

$b^2-(6+k)b+(1-k)=0$

$b^2-6ab+a^2 = (a+b)k$

$b^2-b(6a+k)+(a^2-ak)=0$

$D = \underline{36a^2}+k^2-12ak\ \underline{-4a^2}+4ak = 32a^2-8ak+k^2$

$(4a-k)(8a+k)$

$\frac{1+b}{b^2-6b+1}$ $\quad \frac{1+7}{49-42+1} = 1$ $\quad 389 = 350+39$ $\quad \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}^2-1}{\operatorname{ctg}+\operatorname{ctg}}$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ $\quad a \underset{m}{\equiv} -b$

$a^2-6ab+b^2 \underset{m}{\equiv} b^2+6b^2+b^2 = 8b^2 \underset{m}{\equiv} 0$

$8b^2 \underset{m}{\equiv} 0$

$a \underset{m}{\equiv} -b$

$8a^2 \underset{m}{\equiv} 0$

$72 \quad b=a=9 \quad 389 = 350+39 \quad 340+49$

$\frac{9+9}{81-6\cdot81+81} = \frac{18}{81\cdot(-4)}$

$8b^2 \underset{m}{\equiv} 0$ $\quad b^2-6(m-b)b+(m-b)^2 = m\cdot k$

$a \underset{m}{\equiv} -b$ $\quad 8b^2-6mb-2bm+m^2-mk=0$

$m=8$ $\quad 8b^2-8bm+(m^2-mk)=0$

$b \to 4$

$\Rightarrow a \to 4$ $\quad D = 64m^2-32(m^2-mk) =$

$m>8 \quad b^2 \equiv 0$ $\quad = \underbrace{32m^2+32mk}$

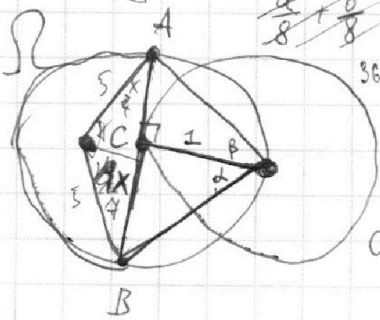
$\frac{3}{4} = \frac{b}{8}$ $\quad a+b = m\cdot k$ $\quad m^2+mk = 2x^2$

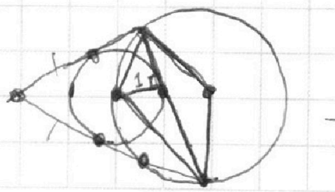
$\frac{a}{8}+\frac{b}{8}$ $\quad 8b^2 \equiv 0$ $\quad b \vdots 3 \quad 24$

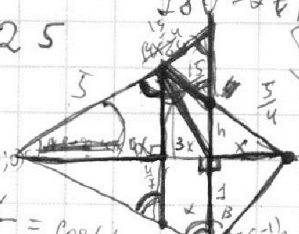
$a \underset{24}{\equiv} -b \underset{24}{\equiv} 3k \quad k\in\mathbb{Z}$

$a = 24+3k$

$360-2\alpha-2\beta = x$ $\quad 180-\alpha+\beta$ $\quad 90-180+\alpha+\beta$ $\quad 25$







$\sqrt{\frac{25}{16}-x^2}$ $\quad \sqrt{25-4x^2}$

$\frac{4x}{5} = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{7x^2+1}}$ $\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

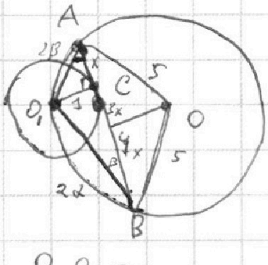
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☒	☐	☐

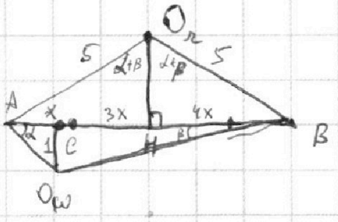
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3



O_ω, O_Ω –



1) Соединим OA, OB.
$O_\Omega A = O_\Omega B = R_\Omega = 5$

2) $O_\Omega H \perp AB$ (построим

3) $O_\omega C \perp AB$ (радиус $\perp$ в т.-ке касания)

4) $\exists\, AC = x \Rightarrow CB = 7x \Rightarrow AH = HB = 4x = \frac{AB}{2} \Rightarrow CH = 3x$

5) $\exists\, \angle O_\omega AC = \alpha,\ \angle O_\omega BC = \beta. \Rightarrow \smile AO_\omega = 2\beta,\ \smile BO_\omega = 2\alpha \Rightarrow \smile AB = 2\alpha + 2\beta$

$\Rightarrow \angle AO_\Omega B = 2\alpha + 2\beta$, а т.к. $O_\Omega H$ - высота в р/б $\triangle AO_\Omega B$, то $\angle AO_\Omega H = \angle BO_\Omega H = \alpha+\beta$

6) $ctg\,\alpha = x$, $ctg\,\beta = 7x$

$$ctg\,\angle AO_\Omega H = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x} = ctg(\alpha+\beta) = \cancel{ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta}\ \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - 1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{ctg\,\alpha\, ctg\,\beta - 1}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta} = \frac{7x^2-1}{8x}$$

$$\frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x} = \frac{7x^2-1}{8x} \qquad \sqrt{100-64x^2} = 7x^2-1 \qquad t = x^2,\ t > 0,\ \text{т.к. } \tfrac{1}{x} \Rightarrow x \neq 0$$

$$100 - 64t = 49t^2 + 1 - 14t$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0 \qquad t_1 = 1 \quad (49 + 50 - 99 = 0)$$

$$\cancel{\frac{D}{4} = 25^2 + 49 \cdot 99 = 625 + 490 \cdot 2 - 49 = 625 + 980 - 49 =}$$

$$\cancel{= 1556 = 4 \cdot 389}$$

$$\cancel{t = \frac{-25 + 2\sqrt{389}}{49}}\ \ (+,\text{ т.к. } t > 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-25+2\sqrt{389}}{49}} \Rightarrow AB = 8x = \frac{8}{7}\sqrt{-25+2\sqrt{389}}$$

$$\cancel{\frac{D}{4} = 625 + 4900 - 49 = 5000 + 600 - 100 - 49 + 25 = 5476 =}$$

$$\cancel{= 4 \cdot 1369 = 4 \cdot}$$

$$t_2 = \left(\frac{-99}{49}\right) : 1 < 0 \Rightarrow \text{не корень}$$

по теор. Виета

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4)

исходн. ур-е $\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{(2x+1)(x+1)} = 2-7x$

$a = 2x+1$

$b = x$

$\sqrt{(a-2)(x-1)} - \sqrt{(a+2)(x+1)} = 2-7x$

$\sqrt{ax-2x-a+2} - \sqrt{ax+2x+a+2} = 2-7x$

$t = ax+2$

$k = 2x+a$

$\sqrt{t-k} - \sqrt{t+k} = 2-7x$

$k = 2x+2x-1 = 4x-1$

$\sqrt{t-k} - \sqrt{t+k} = \frac{1-7k}{4}$

$2-7x = \ldots -7x + \frac{7}{4} - \frac{7}{4}$

$= \frac{1}{4} - \frac{7}{4}k = \frac{1-7k}{4}$

$t-k-t-k-2\sqrt{t^2-k^2} = \frac{49k^2-14k+1}{16}$

$-32k - 32\sqrt{t^2-k^2} = 49k^2-14k+1$

$49k^2+18k+1 = -32\sqrt{t^2-k^2}$

$D = 81-49 = 32$

$t = \frac{-9 \pm 4\sqrt{2}}{49}$

$\sqrt{2x^2+2x+1-7x+2} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$a = 2-7x$

$b = 2x^2+2x+1$

$\begin{cases} b \geq 0 \\ b \geq a \end{cases}$

$\sqrt{b+a} - \sqrt{b} = a. \quad (1)$

~~$\sqrt{b-a} = a+\sqrt{b}$ $(b-a)^2 = (b)^2 - 2\sqrt{b^2-ab} \ldots a^2$~~

~~$b-a-b-2\sqrt{b^2-ab} = a^2$~~ $D = 4-8$

$a^2 = 49x^2-14x+4$ $\quad 24+\frac{1}{2}-4$

~~$a^2 + a = -2\sqrt{b^2-ab}$~~

~~если $\exists$ корни, то либо оба 0, либо $a^2+a<0 \Rightarrow a\in$~~ $(-1;0)$ $\quad 49+14 \quad 20,5$

~~$a=0 \quad 0 = -2\sqrt{b^2} = -2|b| = 2b$~~

$\Rightarrow x = \frac{2}{7}$

$a^2 = 48x^2+48x+24+$

$+x^2+x+\frac{1}{2} - 63x - 20,5$

$+18-18$

$a=-1 \quad -2\sqrt{b^2+b}$

$2-7x=-1$

$7x=3$

$x=\frac{3}{7}$

$b\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{2\cdot 9}{49} + \frac{2\cdot 21}{49} + \frac{49}{49} = \frac{18+42+49}{49} = \frac{109}{49}$ $\quad 20$

$b^2+b>0$

$24,5b - 9a - 38,5$

$(a-a^2) = 2\sqrt{b^2+ab}$

$-24,5b + 38,5$

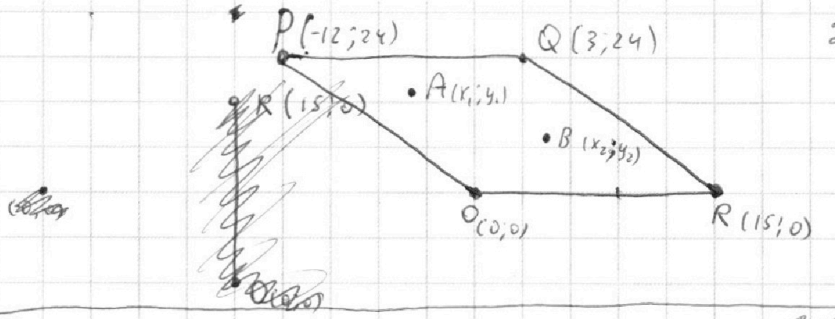
$10a$

$a^4 - 2a^3 + a^2 = 4b^2 + 4ab$

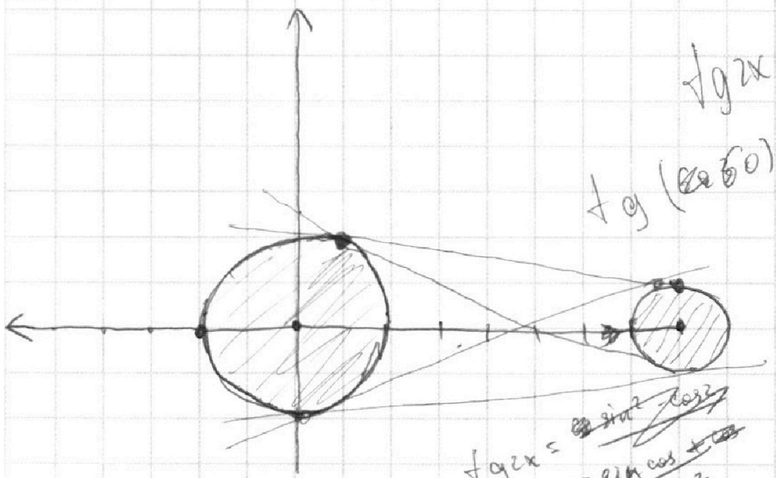
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$



$tg\,2x = \frac{1-1/3}{2\cdot\frac{1}{\sqrt3}} = \frac{2/3}{2/\sqrt3} = \frac{1/3}{1/\sqrt3}$

$\frac{\sqrt3}{3}$

$tg\,2x = \frac{2\sin\cos}{\cos^2-\sin^2}$

$\frac{b}{R-\frac{9}{2}} = tg(2\beta)$

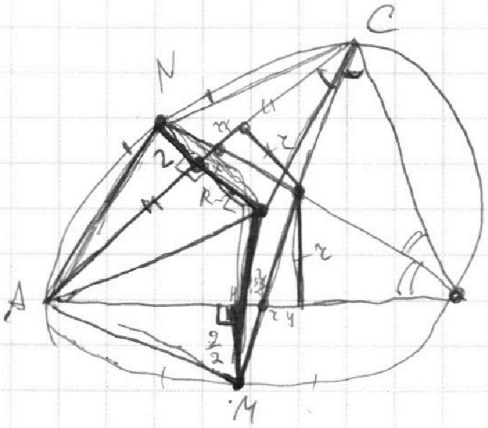
$\frac{b}{R-\frac{9}{a}} = \frac{2\cdot\frac{9}{2b}}{1-\frac{81}{4b^2}}$

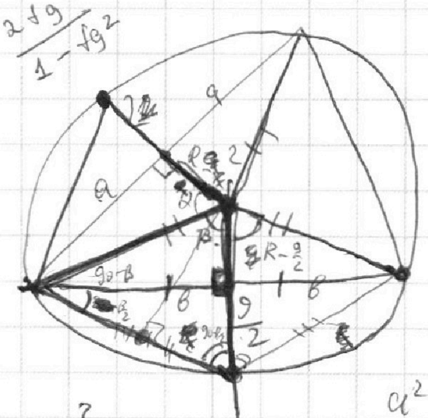
$\frac{9}{2}/b = tg\beta$

$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{a}{R} \\ \sin\beta = \frac{b}{R} \end{cases}$

$\frac{2tg}{1-tg^2}$

$\frac{180-\beta}{2}$





$b\cdot R =$

$a^2+x^2 = 9^2+b^2$

$b\left(1-\frac{81}{4b^2}\right) = \left(R-\frac{9}{2}\right)\left(\frac{18}{2b}\right)$

$(R-2)^2 + a^2 = \left(R-\frac{9}{2}\right)^2 + b^2$

$R^2 - 4R + 4 + a^2 = R^2 - 9R + \frac{81}{4} + b^2$

$b^2 + \left(R-\frac{9}{2}\right)^2 = R^2$

$5R + 4 + a^2 = \frac{81}{4} + b^2$

$b^2 = \frac{81}{4} - 9R = \left(\frac{9}{2}-3\sqrt R\right)\left(\frac{9}{2}+3\sqrt R\right)$

$a^2 + (R-2)^2 = R^2$

$a^2 - 4R + 4 = 0$

$\boxed{a^2 = 4-4R} = (2-2\sqrt R)(2+2\sqrt R)$