



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Заметим, что если  $\exists k \in \mathbb{N}$ :  $k \geq 1, k \neq 2, k \neq 3$   
 $a \leq k < b \leq k+1$ , то мы можем  
 заменить числа на  $\frac{a}{k}$ , в итоге  $\frac{b}{k}$ , и от этого условие не  
 перестанет выполняться. То есть ~~или~~ все числа пред-  
 ставлены в виде  $2^x \cdot 7^y$ .

$$2) \quad \begin{aligned} a &= 2^x \cdot 7^y \\ b &= 2^d \cdot 7^\beta \\ c &= 2^k \cdot 7^m \end{aligned} \quad \begin{aligned} ab &= 2^{(x+d)} \cdot 7^{(y+\beta)} \\ bc &= 2^{(d+k)} \cdot 7^{(m+\beta)} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\because 2^{14} \cdot 7^{10} \Rightarrow \begin{cases} x+d \geq 14 \\ y+\beta \geq 10 \end{cases} \\ &\because 2^{17} \cdot 7^2 \Rightarrow \begin{cases} d+k \geq 17 \\ m+\beta \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

( $x, y, d, \beta, k, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ )  $\leftarrow$  Все степени  $\geq 0$ , при  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$3) abc = 2^{(x+d+k)} \cdot 7^{(m+y+\beta)}$$

4) Заметим, что условие по от-норм замкнуто и эти числа независимы,  
 т.е. мы можем отдельно минимизировать каждыйомножитель

$$\begin{aligned} g_1: \quad x+d &\geq 14 & 2(x+d+k) &\geq 51, \quad \text{т.е. все числа } \cancel{\geq 14}. \quad \text{Число,} \quad \text{то} \\ 2: \quad d+k &\geq 17 & 2(\quad) &\text{- четко и мин. 3 п-е.} \\ 3: \quad x+k &\geq 20 & g_{11}: \quad (x+d+k) &\geq \frac{51}{2} = 25,5 \Rightarrow (x+d+k) = 26, \end{aligned}$$

5) Аналогично для  $y$ .

$$2) \quad \begin{cases} y+\beta \geq 10 \\ \beta+m \geq 17 \\ y+m \geq 34 \end{cases} \quad 2(y+\beta+m) \geq 64 \quad m+\beta+y \geq 32$$

$$abc = 2^{x+d+k} \cdot 7^{m+y+\beta} \geq 2^{26} \cdot 7^{32} \quad \text{по догаданному.}$$

Пример:  $x=8$   
 $y=20$   
 $d=6$   
 $k=12$

однако, заметим, что решая систему (2),  
 мы получим, что  $y-\beta \geq 20$  в то время  
 как  $y+\beta \geq 10$ , т.е. в примере  $y=20$  не подходит.  
 $y \geq 20+\beta$ ,  $\beta \leq y-20$ ,  $10 \leq y+\beta \leq 20+20 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y \geq 15 \Rightarrow$  но из условия  $\cancel{y \geq 20}$  (степени  
 чисел. чисел.)

$\Rightarrow y \geq 20 \Rightarrow m \geq 17 \Rightarrow \beta \geq 0$  и  
 $\beta=0 \quad m=17 \quad y=20$  удовлетворяет всем условиям, (при этом получаем,  
 потому что не меньше 20), а сумма  $\beta+m \cancel{\geq 17} \geq 17$  по условию, при этом  
 все первые выполнены)

Ответ:  $abc = 2^{26} \cdot 3^{37}$ , при  $a = 2^8 \cdot 7^{20}$   
 $b = 2^6 \cdot 7^0$   
 $c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x + \alpha = 14$$

$$\alpha + \beta = 18$$

$$x + \gamma = 20$$

$$k - \alpha = 6$$

$$k = 12$$

$$k + \alpha = 18$$

$$\alpha = 6$$

$$8 + 6 = 14$$

$$12 + 6 = 18$$

$$12 + 8$$

$$y + \beta = 10$$

$$\beta + m = 14$$

$$y + m = 34$$

$$m - \beta = 2$$

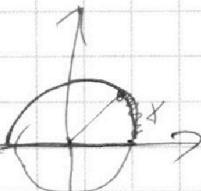
$$y - \beta = 20$$

$$y + \beta = 10$$

Черновик + построение цикла

$$\tan(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2})$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$$



$$\cos(\alpha + \beta - 90^\circ) =$$

$$= \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin(\alpha)$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{1}{\sqrt{7x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{4x}{7x^2+1}$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{1 - 7x^2}{\sqrt{7x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

$$4x \cdot \left( \frac{4}{7} + \sqrt{25 - 4x^2} \right) = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \right) \cdot \sqrt{18x^2 + \frac{16}{49}}$$

$$\frac{7x}{7} = \operatorname{tg} \alpha \quad \frac{x}{7} = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{7 \operatorname{tg} \beta}{1 - 7 \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$\frac{4x}{h} = \frac{1 - 7x^2}{7x} \quad \frac{28x^2}{h} = 1 - 7x^2 \quad h = \frac{28x^2}{1 - 7x^2} \quad 1 - 7x^2 \geq 0$$

$$\frac{(28x^2)^2}{(1 - 7x^2)^2} + \frac{16x^2}{h^2} = 25 \quad \operatorname{tg}(\frac{180}{7} - \alpha - \beta) + \operatorname{tg}(-\alpha - \beta) = t = x^2 \quad \frac{7x}{1 - 7x^2}$$

$$\frac{28^2}{1 - 7^2} t^2 + \frac{16}{1 - 7^2} t^2 = (28t)^2 + 16t(1 - t)^2 =$$

$$(35 - 28)(35 + 28) 28^2 t^2 + 16t + 49 \cdot 16 t^3 - 2 \cdot 16t \cdot 7t^2$$

$$28 \cdot \frac{1}{16} (35t)^2 + 7 \cdot 63 = 49 \cdot 9 \quad (25 - 16t)(49t^2 + 1 - 14t) =$$

$$\frac{1}{16} (35t)^2 + 25 + 350t + 990 - 49 = (28t)^2 + 16t(1 - t)^2 =$$

$$\frac{28 \cdot 1}{16} t^2 + 16 \cdot 99 + 3 - 451 + 2 - 224 + 2 + 366t - 25 = 0$$

$$1 - \frac{7}{49}$$

$$\frac{9x}{h} = \frac{7x}{1 - 7x^2}$$

$$\frac{7}{4} h = 1 - 7x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2)  $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

2)  $\exists m : m \text{- макс и } \cancel{\exists m} (a+b) \equiv_m 0$

$$(a^2 - 6ab + b^2) \equiv_m 0$$

3)  $a \equiv_m -b \Rightarrow a^2 - 6ab + b^2 \equiv_m (-b)^2 + -b(-b) + b^2 \equiv_m 8b^2 \equiv_m 0$ .

4) Имеем 3 условия  $\begin{cases} 8b^2 \equiv_m 0 \\ a \equiv_m -b \\ \text{нод}(a, b) = 1 \end{cases}$

$\exists m = 8 \cdot k$ , где  $k \geq 1$ , тогда  
~~знач~~ т.е.  $8b^2 \equiv_m 0$ , то  $b^2$  кратно  
(т.е.  $b^2 = k \cdot x$ )

~~(\*)~~,  $k, x, m \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $a \equiv_m -b \Leftrightarrow a^2 \equiv_m b^2 \quad a^2 \equiv_m k \cdot x$

$a^2$  также кратно  $k$ .  $a^2 \vdots k$   $a^2 = k+1$   $a^2 = k \cdot m + kx = k(8+ x)$  т.е.

$b^2 \vdots k$ , но тогда  $\text{нод}(a, b)$  не равен единице.

~~Это~~ это противоречит условию.  $\Rightarrow$  предполож. неверно и  $m \neq 8k$ , где  $k \geq 1 \Rightarrow$   
 $m \neq 8$ . т.е.  $m \leq 8$  ~~\*~~

Пример для  $m=8$ :

$$b=1, a=7. \quad \frac{8}{49 - 42 + 1} = \frac{8}{8} = 1 \quad m=8. \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{7} - \text{несократимо}$$

Ответ:  $m=8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

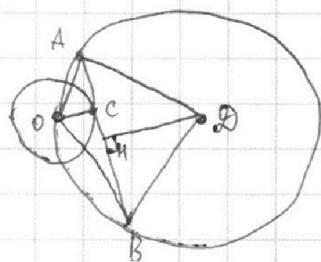
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

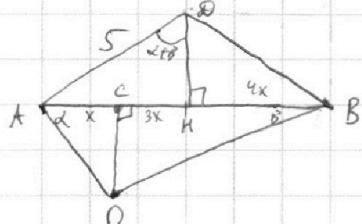
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3)



1)  $O$  - центр  $\odot$   
2)  $D$  - центр  $\odot$   
3)  $\angle OAB = \angle OBA$  (из  $\triangle OAB$ , т.к.  $OA = OB = R$ )



1)  $\angle A = x$   
2)  $\angle B = 4x \Rightarrow HB = AH = 4x$   
3)  $\angle OAB = \angle OBA \Rightarrow \angle ABO = \beta$   
 $\angle AOB = 2\alpha + 2\beta$  (из внеш. угла)  
 $\Rightarrow \angle AOB = 2\alpha + 2\beta$  (вынуждено)

$$4) \Rightarrow \angle AOD = \angle BOD = \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha + \beta \quad (\text{одинаковые})$$

$$5) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{3}, \operatorname{ctg} \beta = 2x$$

$$6) \operatorname{ctg} \angle AOD = \frac{DH}{AH} = \frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta} =$$

$$= \frac{2x^2 - 1}{8x} \Rightarrow 2\sqrt{25 - 16x^2} = 8x^2 - 1.$$

$$100 - 32x^2 = 64x^4 - 16x^2 + 1$$

$$64x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, \text{ т.к. } x > 0 \\ x^2 = -\frac{99}{64} \text{ л. } \emptyset \end{cases} \Rightarrow AB = 8x = 8 \quad \text{Ответ: } AB = 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4)  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  такие, что  $2 - 7x = \alpha + \beta\sqrt{\beta}$ . Упростите выражение.

$$\Rightarrow 2 - 7x = \alpha + \beta\sqrt{\beta}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\beta} + \alpha = 2 - 7x$$

$$\Rightarrow \sqrt{\beta} + \alpha = 2 - 7x$$

Видно, что при  $\alpha=0$  ур-е верно.

Возьмем  $\beta \neq 0$  общность

Докажем, что  $\beta > 0$  для сопряженные к левой части.

$$\sqrt{\beta} + \alpha = 2 - 7x$$

$$(\sqrt{\beta} + \alpha)^2 = (2 - 7x)^2$$

$$\beta + \alpha^2 + 2\sqrt{\beta} = 49x^2 - 28x + 4$$

$$\beta + \alpha^2 + 2\sqrt{\beta} = 49x^2 - 28x + 4$$

Запомним, что под корнем у нас

сторона квадрата.

скрадка  $\alpha \neq 0$ , т.е. не более двух общих корней.

решение 1:  $\alpha=0$

$$\text{решение 2: } \alpha=1 \Rightarrow \sqrt{\beta} = 2 - 7x$$

$$\beta = (2 - 7x)^2$$

$$\beta = (2 - 7x)^2 = 49x^2 - 28x + 4$$

$$\bullet (\sqrt{\beta} + \alpha)(\sqrt{\beta} - \alpha) = \alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta})$$

$$(\sqrt{\beta} + \alpha)^2 - (\sqrt{\beta})^2 = \alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta})$$

$$\alpha = \alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta})$$

$$\Rightarrow \sqrt{\beta} + \sqrt{\beta} = 1$$

$$\sqrt{\beta} = 1 - \sqrt{\beta}$$

$$\sqrt{\beta} = 1 - \sqrt{\beta}$$

$$\sqrt{\beta} = 1 - \sqrt{\beta}$$

$$\beta = 1 - 2\sqrt{\beta}$$

$$\alpha + 1 = 2\sqrt{\beta}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 4\alpha + 4\beta$$

$$(3 - 7x)^2 = 4(2x^2 - 5x + 3)$$

$$49x^2 - 42x + 9 = 8x^2 + 20x - 12 = 0$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\Delta = 121 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$$

$$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \quad ?$$

$$\frac{2\sqrt{61}}{41} \quad ?$$

$$\frac{\sqrt{61}}{2} \quad ?$$

$$\beta > 0 \text{ при } x$$

$$\beta + \alpha = 2x^2 - 5x + 3 = (2x-3)(x-1) > 0 \Rightarrow x < 1 \quad |x > \frac{3}{2}$$

$$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{61}}{41} < 1.23$$

$$\frac{\sqrt{61}}{2} < 1.01$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) 8. итак, 3 решения.

$$a=0 \Rightarrow 2 - 7x = 0 \quad x = \frac{2}{7}$$

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} > \frac{3}{7} \text{ и } \frac{11}{7}$$

и ограничения  $\begin{cases} \beta > 0 \\ a+\beta > 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{7} \text{ существует}$

$\beta > 0$  при  $\forall x$ ,  $a+\beta > 0$  при  $\begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{7} \end{cases}$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < 1$$

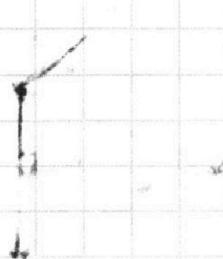
$$2\sqrt{61} < 41 - 11 = 30$$

$$\sqrt{61} < 15 = \sqrt{225}$$

$\Rightarrow$  оба числа корни.

Ответ:  $x = \frac{2}{7}$  (тоже подходит)

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

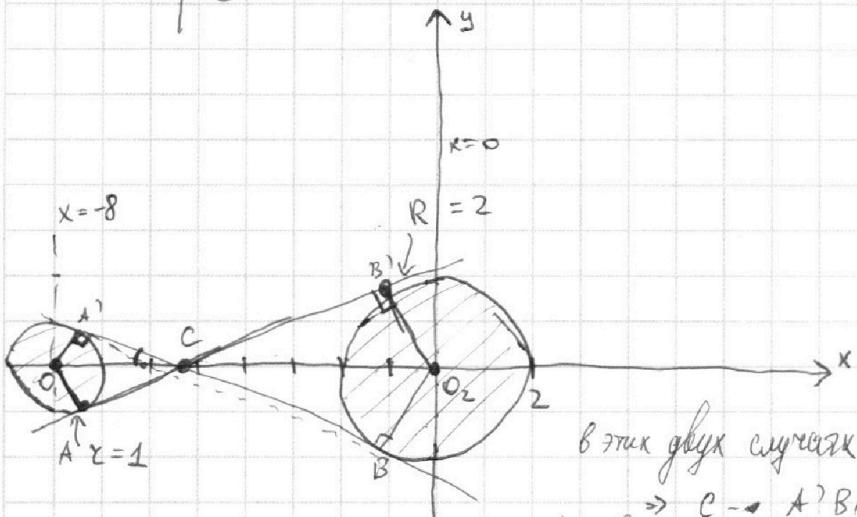
6

$$((x - (-8))^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

это окр-ти. Начертим и отмечим  
соств областю.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$



если такие  $\alpha$  есть,  
то прямая

$$(y = \alpha x + b)$$

одна  
- это пасатолиния  
этак окр-тий.

В этих двух случаях  $\Delta$ -ки.  $CA'0$ ,  $CA0$ ,  $ABA'$ .

$$\Rightarrow C \rightarrow A'B \cap AB' = C, C_x = 0.$$

$$\Delta OA'C \sim \Delta O_2BC, k = \frac{1}{2}, \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A'}{O_2B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

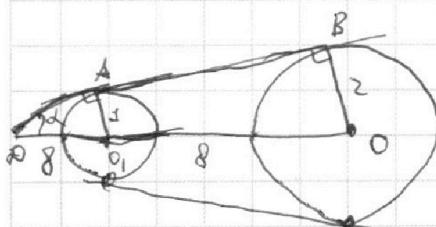
$$\frac{O_1C}{CO_2} = \frac{1}{2}, O_1C = \frac{8}{3}$$

Тогда гип-и  $A'B$  ур-е имеет вид  $y = \alpha x + k$ , где

$$\alpha = \operatorname{tg} \angle A'C O_2 = -\operatorname{tg} \angle C O_1 A' = -\frac{O_1 A'}{A' C} = -\frac{\sqrt{64-1}}{\sqrt{64-1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{63}{3}}} =$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{55}} \quad \left( \text{также получаем противоположную} \quad \alpha = \frac{3}{\sqrt{55}}, \text{ т.к. он} \right.$$

$\text{задает две общие внутр. касательные } (AB')$



$$AB \cap OO_1 = \emptyset, O_1A \parallel OB (\perp \text{на } BD) \Rightarrow \frac{AO_1}{OO_1} = \frac{AD}{BD}$$

$$\Delta ADO_1 \sim \Delta OBD, \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AO_1}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

~~$$\Rightarrow AD = \sqrt{64-1} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$~~

~~$$\Rightarrow AB - AD = 2\sqrt{7}$$~~

$$AD = \sqrt{64-1} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

$AB$  имеет ур-е прямой  $\alpha \cancel{=} y = \alpha x + h$ ,  $\alpha = \operatorname{tg} \angle BAO = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

также получаем  $\alpha = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$ , он задает противоположную внешн. кас-ю

$A'B$ . других  $\alpha$  нет, т.к. общих внешн. кас-ов окр-тий всего 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*ответ*  $\pm \frac{\sqrt{7}}{21}$

$$\begin{array}{r} + 3\sqrt{55} \\ \hline 55 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

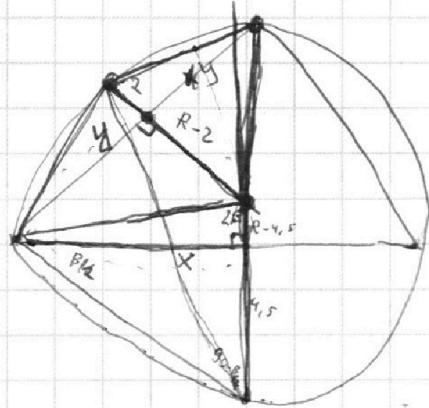
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



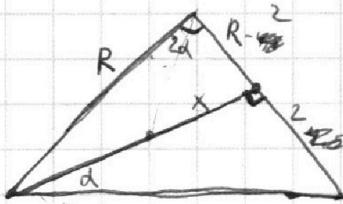
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 = \frac{81}{4} - 9R$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{x}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4/x}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{x}{R-2}$$

$$\frac{\frac{4}{x} \cdot x^2}{x^2 - 16} = \frac{4x}{4R-8}$$

$$\frac{4x}{x^2 - 16} = \frac{4x}{4-x^2 - 8}$$

$$\alpha + x(2+2) = 6$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{x}$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \cdot \frac{2}{x}}{1 - \frac{81}{x^2}} = \frac{2x}{R-9}$$

$$\frac{36}{4 - \frac{81}{x^2}} = \frac{2x}{R-9}$$

$$(9R-81)(36) = 2x \left( \right)$$

$$(9R-81) \cdot 4 = 2x \left( 4 - \frac{81}{x^2} \right)$$

$$\left( \frac{81}{4} - x^2 - 81 \right) \cdot 2 = \left( 4x - \frac{81}{x} \right)$$

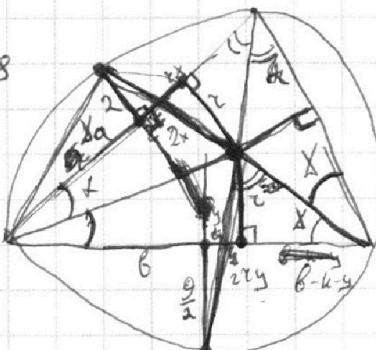
$$(81 - 4x^2 - 324) = (8x - \frac{162}{x})$$

$$4x^2 - 243 = 8x - \frac{162}{x}$$

$$4x^3 - 8x^2 - 243x + 162 = 0$$

$$4 \cdot 8 - 8 \cdot 4 -$$

$$4 \cdot 216 - 8 \cdot 36 - 243 = 0$$



$$\alpha + 2x + \gamma x = 6 + 9y + 2\gamma y$$

$$(a + 2x + \gamma x)^2 + \gamma^2$$

$$\left( \frac{ax}{2} \right)^2 + \gamma^2 = d \quad \frac{a}{2} = \frac{6 - 9y - 2\gamma y}{\gamma} =$$

$$\frac{a\gamma}{2} = a + 2x + \gamma x$$

$$= \frac{a + 2x + \gamma x}{\gamma}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

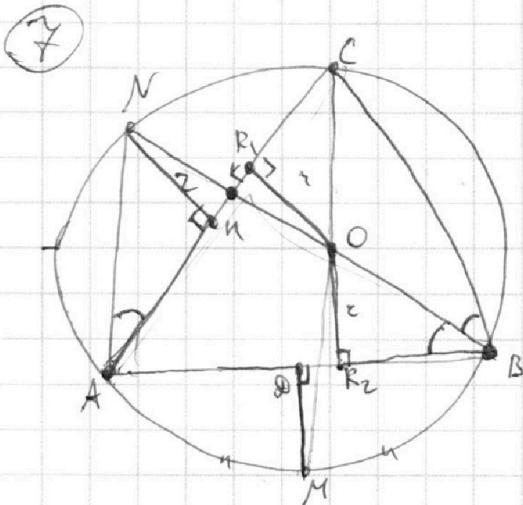
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- 1)  $BN$ -бис-ся, т.к.  $\angle NCA = \angle NBC$ .
- 2)  $BNA(M) = 0$ .  
AO-искривл  $r$ -е (по ля бис-с)  
или  
 $\angle NAC = \angle OBA$  (на  $\cup NC$ )
- 3)  $OR_1 \perp AC$      $OR_2 \perp AB$      $OR_1 = OR_2 = r$
- 4)  $AR_1 = AP_2$  (отрезки пас-к)
- 5)  $\Rightarrow$  а т.к.  $\angle NCA = \angle NBC$ , то  
 $\angle OBA = \angle NAC$

6)  ~~$\triangle ANH$~~   $\frac{NH}{AH} = \frac{BR_2}{BR_1}$

$\sim \triangle OR_2B$

$$\frac{2}{AH} = \frac{r}{R_2 B}, \text{ аналогично: } \frac{9}{2AD} = \frac{r}{R_1 C}$$

$$\Rightarrow \frac{2rB}{AH} = \frac{9 \cdot R_1 C}{2AD} = 2r.$$

(найти надо)

7)  $MN \approx 1, NH$ -сер-прач, т.к.  $MN$ -середина дуги.

8)  $\square BN \cap AC = K$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

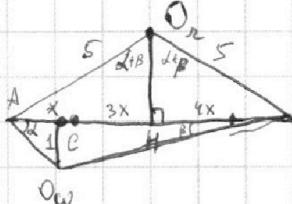
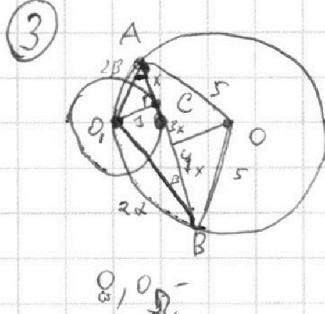
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Соединим  $OA, OB$ .

$$OA = OB = R_{O_2} = 5$$

2)  $O \perp H \perp AB$  (построим)

3)  $O \perp C \perp AB$  (радиус  $\perp$  к  
кассе)

$$4) \square A C = x \Rightarrow C B = 7x \Rightarrow A H = H B = 4x = \frac{AB}{2} \Rightarrow C H = 3x$$

$$5) \angle O_w A C = \alpha, \angle O_w B C = \beta. \Rightarrow \angle A O_w = 2\alpha \Rightarrow \angle A B = 2\alpha + 2\beta$$

$$\angle B O_w = 2\beta$$

$$\Rightarrow \angle A O_2 B = 2\alpha + 2\beta, \text{ а р.н. } O_2 H - \text{ высота } O_2 P \text{ в } \triangle A O_w B, \text{ то } \angle A O_2 B = \angle B O_2 H = \alpha + \beta$$

$$6) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{4} x, \operatorname{ctg} \beta = \frac{7}{4} x$$

$$\operatorname{ctg} \angle A O_2 H = \frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta} = \frac{7x^2 - 1}{8x}$$

$$= \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} - 1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{7x^2 - 1}{8x}$$

$$\frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \frac{7x^2 - 1}{8x} \quad \sqrt{100 - 64x^2} = 7x^2 - 1 \quad t = x^2 \quad t > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

$$100 - 64t = 49t^2 + 1 - 14t \quad t_1 = 1 \quad (49 + 50 - 99 = 0)$$

$$\frac{25}{4} = 25^2 + 49 \cdot 1 = 625 + 490 \cdot 2 \cdot 1 = 625 + 980 - 49 = \frac{931}{4} >$$

$$= 1556 = 4 \cdot 389$$

$$t = -25 + 2\sqrt{389} \quad (+, \text{ т.к. } t > 0)$$

$$49$$

$$\rightarrow x = \sqrt{\frac{-25 + 2\sqrt{389}}{49}} \Rightarrow AB = 8x = \frac{8}{\sqrt{49}} \sqrt{-25 + 2\sqrt{389}}$$

$$\frac{8}{4} = 625 + 4900 - 49 = 5000 + 600 - 100 - \frac{49+25}{124} = 5476 -$$

$$= 401369 - 401324 = 5476$$

$$t_2 = \left( \frac{-99}{49} \right) : 1 < 0 \Rightarrow \text{некорене}$$

но теор. выше

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8$$

ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{Type} \quad \sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{(2x+1)(x+1)} = 2 - 7x \\
 & \text{Type} \quad \sqrt{(a-2)(x-1)} - \sqrt{(a+2)(x+1)} = 2 - 7x \\
 & \text{Type} \quad \sqrt{ax-2x+a+2} - \sqrt{ax+2x+a+2} = 2 - 7x \\
 & t = ax+2 \\
 & k = 2x+a \\
 & k = 2x+2x-1 = 4x-1 \\
 & 2-7x = (\cancel{4x}) - 7x + \frac{\cancel{7}}{4} - \frac{7}{4} \\
 & = \frac{1}{4} - \frac{7}{4}k = \frac{1-7k}{4} \\
 & 49k^2 + 18k + 1 = -32\sqrt{t^2 - k^2} \\
 & 49k^2 + 18k + 1 = -32\sqrt{t^2 - k^2} \\
 & 49k^2 + 18k + 1 = 49k^2 - 44k + 1
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2x^2 + ax + 1} - \cancel{7x + 2} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - \cancel{2x}$$

$$a = 2 - 3x$$

$$f = 2x^2 + 2x + 1$$

$$\sqrt{\theta + a} - \sqrt{\theta} = a. \quad (1)$$

$$\cancel{b-a} \quad b \quad \cancel{2\sqrt{b^2-ab}}^1 = a^2 \quad \mathfrak{D} = 4 - 8$$

$$q^2 + a = -2\sqrt{b_2 - a^2}$$

если  $\exists$  корни, то либо оба  $\underline{0}$ , либо  $a^2 + a < 0 \Rightarrow$   $(\underline{-1}, 0)$

$$a=0 \quad 0 = 2\sqrt{0^2} = -2181 = -28$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad -2\sqrt{\beta^2 + 1}$$

$$a^2 = 49x^2 - 14x + 4$$

$a \in$

$$a < 0 \Rightarrow (-\infty, 0)$$

$$a^2 = 48x^2 + 98x + 24 +$$

$$x^2 + x + \frac{1}{3} - 63x^{-2}$$

$$\frac{40}{+ 43} = 18 + 43 + 40 \quad 109 \quad + 18 - 18$$

~~99~~ ~~49~~ - ~~49~~ ~~49~~ ~~70~~

$$24,58 - 99 = 24,58$$

- 30,5

$$+ 4ab \quad 100$$

$$\cancel{3x^2}(a - a^2) \leq 2\sqrt{b^2 + ab}$$

$$24,58 - 9a - \cancel{38,5}^{\cancel{62+670}}$$

$$a^4 - 2a^3 + a^2 = 4b^2 + 4ab \quad \text{or} \quad -24,5b + 38,5$$

Page 10 of 10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

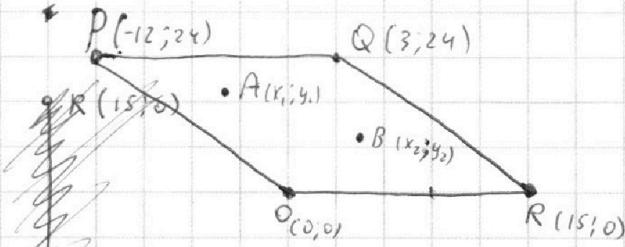
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

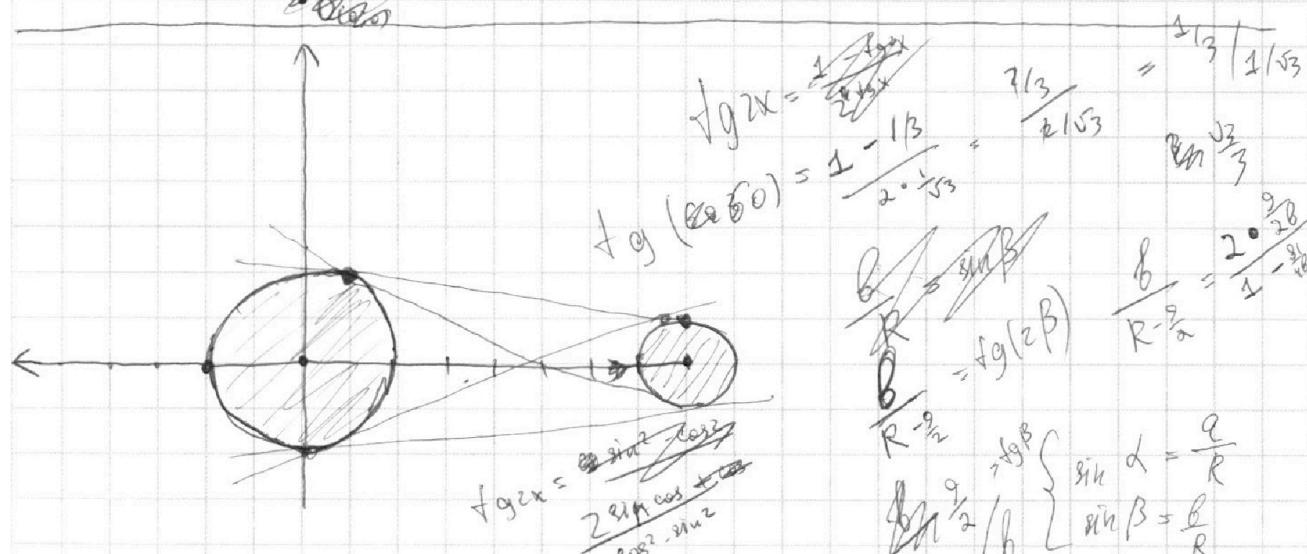
МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

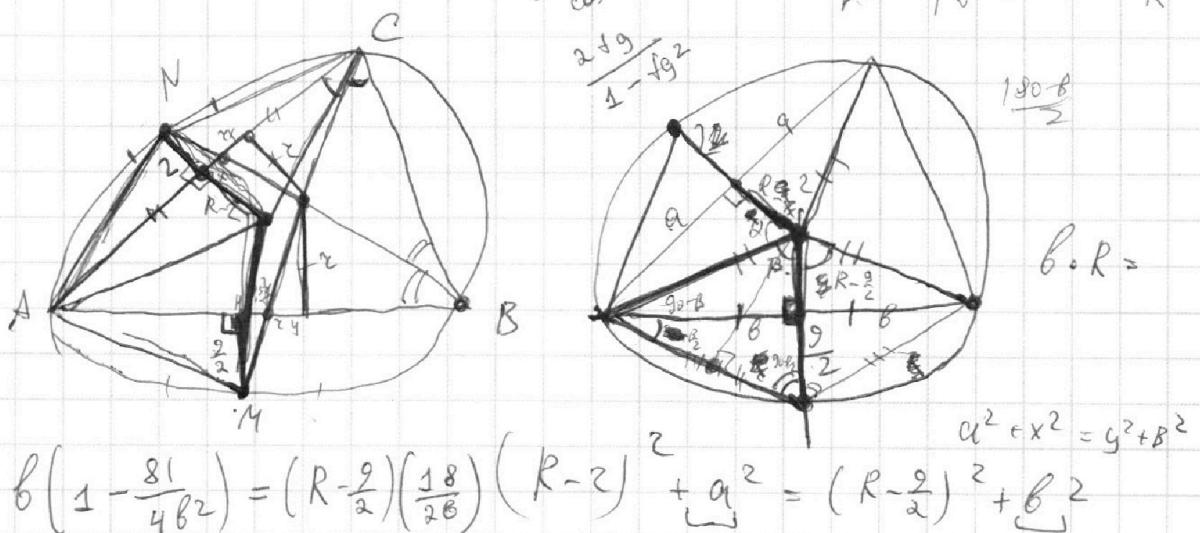


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}(2\beta) = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{q}{R} \\ \sin \beta = \frac{b}{R} \end{cases}$$



$$b\left(1 - \frac{81}{4b^2}\right) = \left(R - \frac{q}{2}\right)\left(\frac{18}{2b}\right) (R - r)^2 + a^2 = \left(R - \frac{q}{2}\right)^2 + b^2$$

$$R^2 - 4R + 4 + a^2 = R^2 - 9R + \frac{81}{4} + b^2$$

$$b^2 + \left(R - \frac{q}{2}\right)^2 = R^2$$

$$b^2 = \frac{81}{4} - 9R \quad 5R + 4 + a^2 = \frac{81}{4} + b^2$$

$$= \left(\frac{9}{2} - 3\sqrt{R}\right)\left(\frac{9}{2} + 3\sqrt{R}\right)$$

$$a^2 + (R - r)^2 = R^2$$

$$a^2 - 4R + 4 = 0$$

$$[a^2 = 4 - 4R] \quad \{ (2 - 2\sqrt{R}) (2 + 2\sqrt{R}) \}$$