



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① 1) Заметим, что если $\exists k \in \mathbb{N}: k \geq 1, k \neq 2, k \neq 3$
 $a: k^a \cdot b: k^b \cdot c: k^c$, то мы можем
 заменить числа на $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}$ или $\frac{c}{k}$, и от этого условие не
 перестанет выполняться. То есть ~~то~~ все числа пред-
 ставим в виде $2^x \cdot 7^y$.

2) $\begin{cases} a = 2^x \cdot 7^y \\ b = 2^d \cdot 7^k \\ c = 2^m \cdot 7^t \end{cases} \quad \begin{cases} ab = 2^{(x+d)} \cdot 7^{(y+k)} = 2^{14} \cdot 7^{10} \Rightarrow \begin{cases} x+d \geq 14 \\ y+k \geq 10 \end{cases} \\ bc = 2^{(d+m)} \cdot 7^{(k+t)} = 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow \begin{cases} d+k \geq 17 \\ k+t \geq 17 \end{cases} \\ ac = 2^{(x+m)} \cdot 7^{(y+t)} = 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow \begin{cases} x+k \geq 20 \\ y+t \geq 37 \end{cases} \end{cases}$

$(x, y, d, k, m) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ \leftarrow все степени ≥ 0 , т.к. числа $a, b, c \in \mathbb{N}$

3) $abc = 2^{(x+d+k)} \cdot 7^{(m+y+t)}$

4) Заметим, что условия по степеням 2 и 7 независимы,
 т.е. мы можем отдельно минимизировать каждый сомножитель

5) $\begin{cases} x+d \geq 14 \\ d+k \geq 17 \\ x+k \geq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x+d+k) \geq 51 \Rightarrow \text{т.к. все числа } \text{целые, то} \\ 2(\) - \text{четно и мин. } 3 \cdot 2 = 6 \\ \text{919 } (x+d+k) \geq \frac{51}{2} = 25,5 \Rightarrow (x+d+k) = 26 \end{cases}$

6) Аналогично для 7.

2) $\begin{cases} y+\beta \geq 10 \\ \beta+m \geq 17 \\ y+m \geq 37 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(y+\beta+m) \geq 64 \\ m+\beta+y \geq 32 \end{cases}$

$abc = 2^{x+d+k} \cdot 7^{m+y+\beta} \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$ по доказанному.

Пример: $\begin{cases} x=8 \\ d=6 \\ k=12 \end{cases}$

однако, заметим, что решая систему (2),
 мы получим, что $y-\beta \geq 20$ в то время
 как $y+\beta \geq 10$, т.е. в примере для минимума
 $y \geq 20+\beta, \beta \leq y-20, 10 \leq y+\beta \leq 2y-20 \Rightarrow$
 $\rightarrow y \geq 15 \Rightarrow$ но из условия $\beta \geq 0$ (степени
 делят y и β ≥ 20)

$\Rightarrow y \geq 20 \Rightarrow m \geq 17 \Rightarrow \beta \geq 0$ и

$\beta=0, m=17, y=20$ удовлетворяет всем условиям, (при этом показало,
 потому y не меньше 20, а сумма $\beta+m \geq 17$ по усл, при этом
 все нер-ва выполнены)

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$, при $\begin{cases} a = 2^8 \cdot 7^{20} \\ b = 2^6 \cdot 7^0 \\ c = 2^{12} \cdot 7^{17} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чертовик + Построение пример

$$\begin{aligned} X+d &= 14 \\ d+k &= 18 \\ X+k &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k-d &= 6 & k &= 12 \\ k+d &= 18 & d &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8+6 &= 14 \\ 12+6 &= 18 \\ 12+8 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y+\beta &= 10 \\ \beta+m &= 17 \\ y+m &= 37 \end{aligned}$$

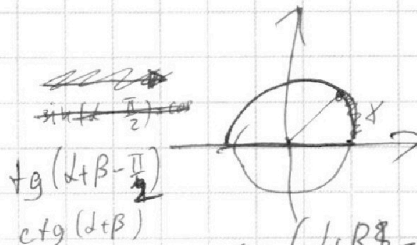
$$m-\beta = 2$$

$$y-\beta = 20$$

$$y+\beta = 10$$

$$y = 15$$

$$x = -5$$



$$\cos(\alpha + \beta - 90) =$$

$$= \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin(\alpha)$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{1}{\sqrt{7x^2+1}}$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{1-7x^2}{\sqrt{7x^2+1}}$$

$$4x \cdot \left(\frac{4}{7} + \sqrt{25-4x^2} \right) = \frac{7x}{\sqrt{49x^2+1}} \cdot \sqrt{16x^2 + \frac{16}{7}}$$

$$\frac{7x}{1} = \operatorname{tg} \alpha \quad \frac{x}{4} = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 7 \operatorname{tg} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{7 \operatorname{tg} \beta}{1 - 7 \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$\frac{4x}{h} = \frac{1-7x^2}{7x}$$

$$\frac{28x^2}{h} = 1-7x^2$$

$$h = \frac{28x^2}{1-7x^2} \quad 1-7x^2 \geq 0$$

$$\frac{(28x^2)^2}{(1-7x^2)^2} + 16x^2 = 25$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{7 \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta}{1 + 7 \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{6 \operatorname{tg} \beta}{1 + 7 \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$(28t)^2 + 16t(1-7t)^2 = 25(1-7t)^2$$

$$28^2 t^2 + 16t + 49 \cdot 16 t^3 - 2 \cdot 16 t \cdot 7t^2 =$$

$$28 \cdot \frac{7}{16} (35t)^2 + 25 - 350t - 16 \cdot 49 t^3 - 16t - 16 \cdot 14 t^2 = (28t)^2$$

$$\frac{28 \cdot 16}{9 \cdot 16} + 16 \cdot 49 t^3 - 451 t^2 - 224 t^2 + 366 t - 25 = 0$$

$$1 -$$

$$\frac{4x}{h} = \frac{7x}{1-7x^2}$$

$$\frac{7}{4} h = 1-7x^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) 1) $\frac{a+b}{a^2-bab+b^2}$ 2) $\exists m: m\text{-макс и } \begin{cases} (a+b) \equiv_m 0 \\ (a^2-bab+b^2) \equiv_m 0 \end{cases}$

3) $a \equiv_m -b \Rightarrow a^2 - bab + b^2 \equiv_m (-b)^2 - b(-b)b + b^2 \equiv_m 8b^2 \equiv_m 0$

4) Имеем 3 условия $\begin{cases} 8b^2 \equiv_m 0 \\ a \equiv_m -b \\ \text{НОД}(a,b)=1 \end{cases} \exists m=8 \cdot k, \text{ где } k \geq 1, \text{ тогда}$
 \uparrow по т.ч. $8b^2 \equiv_m 0$, то b^2 кратно k .
 (т.е. $b^2 = k \cdot x$)

$(\exists) d, k, x, m \in \mathbb{N}$.

Тогда $a \equiv_m -b \Leftrightarrow a^2 \equiv_m b^2 \quad a^2 \equiv_m k \cdot x$

a^2 также кратно k . $\begin{matrix} k+1 \\ a^2 \div k \\ b^2 \div k \end{matrix}$ \Rightarrow тогда $\text{НОД}(a,b)$ не равен единице.

~~то~~ это противоречит условию. \Rightarrow предполож. неверно и $m \neq 8k$, где $k \geq 1 \Rightarrow m \neq 8$. т.е. $m \leq 8$

Пример для $m=8$:

$b=1, a=7$. $\frac{8}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1 \quad m=8. \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{7}$ - несократимо

Ответ: $m=8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

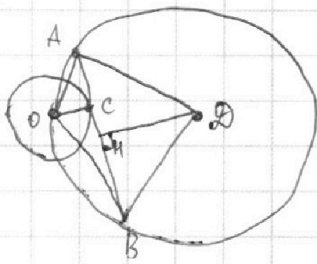
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3

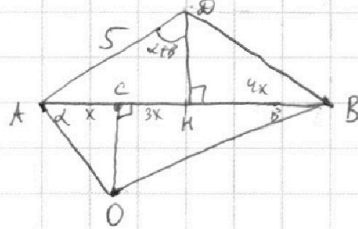


1) O - центр \odot

2) S - центр \odot

3) $SH \perp AB \Rightarrow \angle ASH = \angle BSH$

($\triangle AOB$ - $\triangle OAB$, т.к. $AO = BO = 5$)
 $AO = BO = \frac{AB}{2}$ (св. ва $\triangle OAB$)



1) $\angle AC = x$

2) $\Rightarrow BC = 7x \Rightarrow HB = AH = 4x$

3) $\angle OAB = \alpha \Rightarrow \angle ABO = \beta$

$\checkmark AB = 2\alpha + 2\beta$ (св. ва $\triangle OAB$)

$\Rightarrow \angle ASB = 2\alpha + 2\beta$ (центр \odot)

4) $\Rightarrow \angle ASH = \angle BSH = \frac{\angle ASB}{2} = \alpha + \beta$ (SH - диаметр)

5) $\text{ctg } \alpha = \frac{x}{4x}, \text{ctg } \beta = 7x$

6) $\text{ctg } \angle ASH = \frac{SH}{AH} = \frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \text{ctg } (\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg } \alpha - \text{ctg } \beta}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta} =$

$= \frac{7x^2 - 1}{8x}$

$\Rightarrow 2\sqrt{25 - 16x^2} = 7x^2 - 1$

$100 - 64x^2 = 49x^4 - 14x^2 + 1$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, \text{ т.к. } x > 0$

$x^2 = \frac{-99}{49} \notin \mathbb{R} \Rightarrow AB = 8x = 8$ Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ \exists ~~$2-7x=a$~~ \Rightarrow ур-е можно записать в виде.
 ~~$2x^2+2x+1=b$~~

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b} = a.$$

(х) видно, что при $a=0$ ур-е верно. ($\sqrt{b} - \sqrt{b} = 0$). *Допложим на сопряженные к левой части.*

~~$$b+a+b-2\sqrt{b^2+ab}=a^2$$~~

~~$$2-\sqrt{(b^2+ab)} = a^2+2b$$~~

Заметим, что под корнем у нас

справа $\sqrt{\quad}$, т.е. не более двух общих корней.

решение 1: $a=0$

решение 2: $a=1$ $\&$ $\sqrt{2-5+3} - \sqrt{2+2+1} = 2-4=b$.

~~$$b^2+ab = (2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)$$~~

~~$$a^2+2b = 2-7x-4x^2-4+4x+2x^2+2x+1 = -4x^2+9x-1$$~~

$(\sqrt{b+a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{b+a} - \sqrt{b}) = a \cdot (\sqrt{b+a} + \sqrt{b})$ *преобр равенство, т.к. $\sqrt{b+a} + \sqrt{b} > 0$*

$$(\sqrt{b+a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a \cdot (\sqrt{b+a} + \sqrt{b})$$

~~$$a=0 \quad a = a(\sqrt{b+a} + \sqrt{b})$$~~

~~$$\Rightarrow \sqrt{b} + \sqrt{b+a} = 1$$~~

~~$$\sqrt{b} = 1 - \sqrt{b+a}$$~~

~~$$b = 1 - a - b$$~~

$$\sqrt{b} = 1 - \sqrt{b+a}$$

$$b = a + b + 1 - 2\sqrt{b+a}$$

~~$$a+1 = 2\sqrt{b+a}$$~~

~~$$a^2 + 2a + 1 = 4a + 4b$$~~

~~$$(3-7x)^2 = 4(2x^2-5x+3)$$~~

~~$$49x^2 - 42x + 9 - 8x^2 + 20x - 12 = 0$$~~

~~$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$~~

~~$$D = 121 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$$~~

~~$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$~~

$b > 0$ *или* $4x$

$$b+a = 2x^2-5x+3 = (2x-3)(x-1) > 0 \Rightarrow x < 1 \vee x > \frac{3}{2}$$

$$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \approx 1$$

$$2\sqrt{61} \approx 30$$

$$\sqrt{61} \approx 15$$

$$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \approx \frac{3}{2}$$

$$22 + 4\sqrt{61} \approx 123$$

$$\sqrt{61} \approx 24$$

$$4\sqrt{61} \approx 101$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4)

итак. Зрешения.

$$a=0 \Rightarrow 2-7x=0 \quad x=\frac{2}{7}$$

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} > \frac{3}{2} \text{ (не подходит, это)}$$

и ограничения ($b > 0$, т.н. $\sqrt{\quad}$ существуют)

$$b > 0 \text{ при } \forall x, \quad a+b > 0 \text{ при } \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \quad \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < 1$$

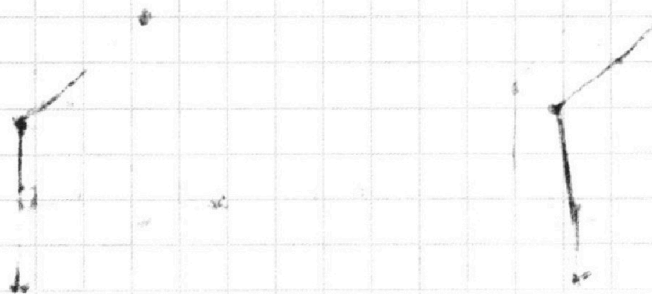
$$2\sqrt{61} < 41 - 11 = 30$$

$$\sqrt{61} < 15 = \sqrt{225}$$

\Rightarrow оба числа корни.

Ответ: $x = \frac{2}{7}$ (тоже подходит)

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) $(x - (-8))^2 + y^2 - 1 \leq 0$
 $(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

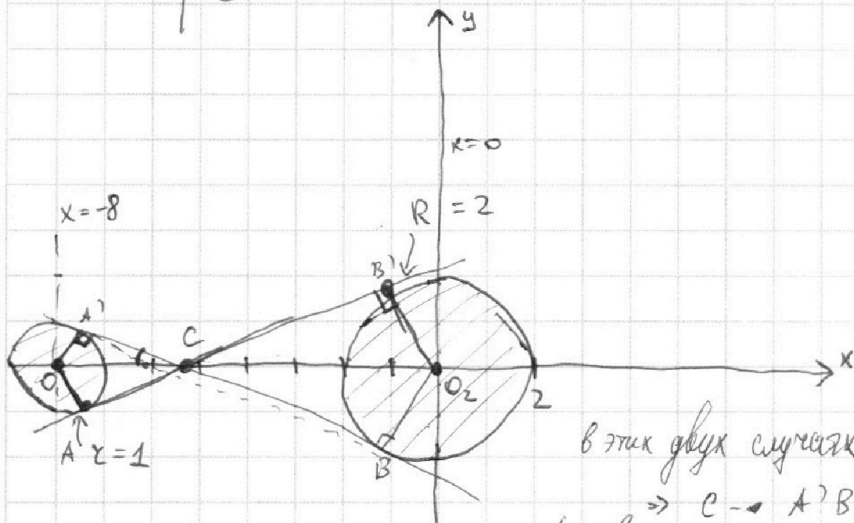
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x + 8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

это окруж. нарисуем и отметим соотв области.

если такие а есть, то прямая

$$y = ax + b$$

общая — это касательная этих окруж.



в этих двух случаях Δ -ки. $\triangle CA'O_1$ равны.

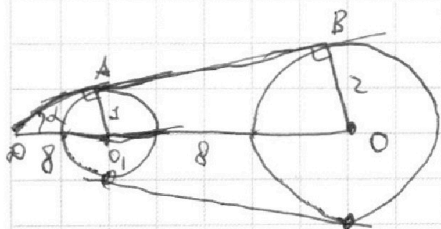
$\rightarrow C \rightarrow A'B \perp AB \Rightarrow C_x = 0$

$\triangle O_1A'C \sim \triangle O_2BC$, $k = \frac{1}{2}$ $\frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A'}{O_2B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\frac{O_1C}{8 - O_1C} = \frac{1}{2}$ $O_1C = \frac{8}{3}$

Тогда для пр-й A'B ур-е имеет вид $y = ax + k$, где

$a = \text{tg} \angle A'CO_2 = -\text{tg} \angle A'CO_1 = -\frac{O_1A'}{A'C} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{64}{9} - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{55}{9}}} =$

$= -\frac{3}{\sqrt{55}}$ (или также пойдет противоположная $a = \frac{3}{\sqrt{55}}$, т.к. они задают две общие внутр. касательные (AB'))



$\triangle ABO_1 \sim \triangle O_2BD$, $\Rightarrow \frac{AO_1}{O_1D} = \frac{O_2D}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{64-1}} = \frac{O_2D}{BD}$ $O_2D = \sqrt{64-1} = \sqrt{55}$
 $\rightarrow AB \perp O_1D = 2\sqrt{5}$

AB имеет ур-е прямой $y = ax + k$, $a = \text{tg} \angle BAO_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}}$

также подходит $a = -\frac{1}{3\sqrt{5}}$, он задает противоположно внешн. кас-ю

A'B'. других а нет, т.к. общие кас-ю окруж-тей всего 4. Ответ: $\pm \frac{\sqrt{5}}{31}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\pm \frac{\sqrt{21}}{21}$
 $+ \sqrt[3]{\frac{55}{55}}$

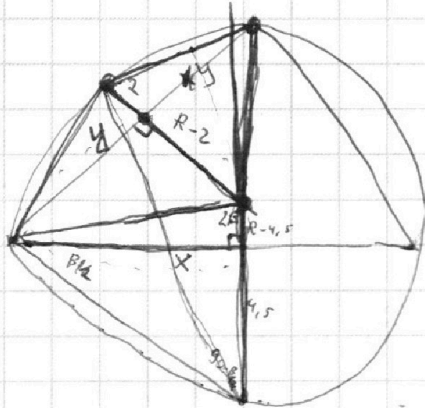
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \cancel{\text{tg } \beta} &= \frac{2}{2x} \\ \text{tg } \beta &= \frac{2}{2x} \\ \text{tg } 2\beta &= \frac{2 \cdot \frac{2}{2x}}{1 - \frac{81}{4x^2}} = \frac{x}{R-2} \end{aligned}$$

$$\frac{36}{4 - \frac{81}{x^2}} = \frac{2x}{R-2}$$

$$(9R-81)(36) = 2x \left(\dots \right)$$

$$(9R-81) \cdot 4 = 2x \left(4 - \frac{81}{x^2} \right)$$

$$\left(\frac{81}{4} - x^2 - 81 \right) \cdot 2 = \left(4x - \frac{81}{x} \right)$$

$$(81 - 4x^2 - 324) = \left(8x - \frac{162}{x} \right)$$

$$4x^2 - 243 = 8x - \frac{162}{x}$$

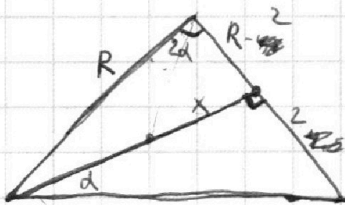
$$4x^3 - 8x^2 - 243x + 162 = 0$$

$$4 \cdot 8 - 8 \cdot 4 = 0$$

$$4 \cdot 216 - 8 \cdot 36 - 243 \cdot 6 = 0$$

~~...~~

$$x^2 = \frac{81}{4} - 9R$$



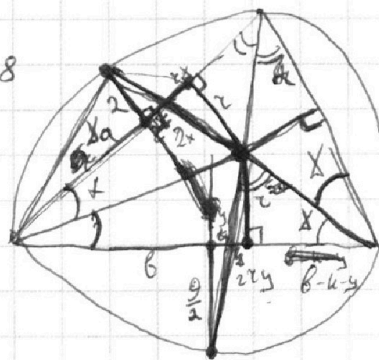
$$\text{tg } \alpha = \frac{2}{x}$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{4/x}{1 - \frac{16}{x^2}} = \frac{x}{R-2}$$

$$\frac{4/x \cdot x^2}{x^2 - 16} = \frac{4x}{4R-8}$$

$$\frac{4x}{x^2 - 16} = \frac{4x}{4 - x^2 - 8}$$

$$x^2 = 4 - 4R$$



$$\cancel{a + x(2+x) = b}$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{d} \quad \left(\frac{ax}{2} \right)^2 + x^2 = d^2$$

$$\frac{ax}{2} = 2a + 2x + \frac{7}{2}x$$

$$a + 2x + 2x = b + 2y + 2y$$

$$(a + 2x + 2x)^2 + x^2$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b - 2y - 2y}{x}$$

$$= \frac{a + 2x + 2x}{x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

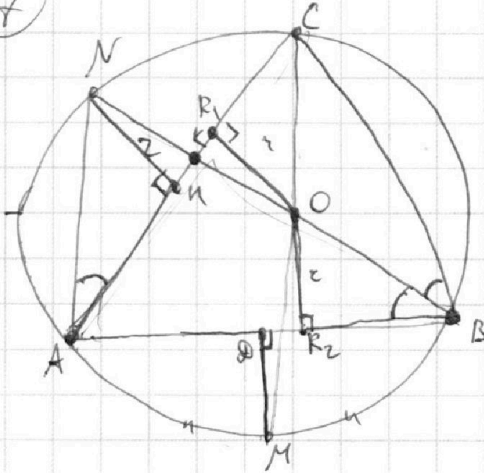
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7



1) BN - диаметр, т.к. $\sphericalangle NCB = \sphericalangle NCA$
 CM - диаметр - ед.

2) $BN \perp CM = O$
 AO - диаметр p - q (По AO диаметр - центр сферы) q - радиус

$\sphericalangle NAC = \sphericalangle OBA$ (на $\sphericalangle NCB$)

3) $OR_1 \perp AC$ $OR_1 = OR_2 = r$
 $OR_2 \perp AB$

4) $AR_1 = AR_2$ (отрезки кас-х)

5) α т.к. $\sphericalangle NCA = \sphericalangle NCB$, то
 $\sphericalangle OBA = \sphericalangle NAC$

6) $\frac{NH}{AH} = \frac{OR_2}{BR_2} \cdot \frac{OR_2}{BR_2}$

$\triangle ANH \sim \triangle OR_2B$

$\frac{2}{AH} = \frac{r}{R_2B}$, аналогично

$\frac{9}{2AD} = \frac{r}{R_1C}$

$\Rightarrow \frac{2R_2B}{AH} = \frac{9 \cdot R_1C}{2AD} = 2r$

(найти надо)

7) $M \in \omega$, NH - сеп-танта, т.к. M, N - середины дуг.

8) $\frac{9}{2} \supset BN \cap AC = K$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



② $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a^2}{b^2}-6\frac{a}{b}+1} \cdot \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = \frac{b+1}{b^2-6b+1}$

$b^2-6b+1 = k(b+1) \quad 1400-31$

$b^2 - (6+k)b + (1-k) = 0$

$b^2 - 6ab + a^2 = m(a+b)k$

$b^2 - b(6a+k) + (a^2 - ak) = 0$

$D = 36a^2 + k^2 - 12ak - 4a^2 + 4ak = 32a^2 - 8ak + k^2$

$(4a^2 - k)(8a + k)$

$\frac{1+1}{1+2-6} = \frac{1+b}{b^2-6b+1} = \frac{1+k}{49-42+1} = 1$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = a \equiv -b$

$8b^2 \equiv 0$

$a \equiv -b$

$8a^2 \equiv 8b^2$

$a^2 - 6ab + b^2 \equiv b^2 + 6b^2 + b^2 = 8b^2 \equiv 0$

$9 \neq 2 \quad b = a = 9 \quad 389 = 350 + 39$

$\frac{9+9}{81-6 \cdot 81+81} = \frac{18}{81 \cdot (-4)} = \frac{2}{-9}$

$8b^2 \equiv 0$

$a \equiv -b$

$b^2 - 6(m-b)b + (m-b)^2 = m \cdot k$

$8b^2 - 6mb - 2bm + m^2 - mk = 0$

$8b^2 - 8bm + (m^2 - mk) = 0$

$m > 8 \quad b^2 \equiv 0$

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \quad a = m \cdot k$

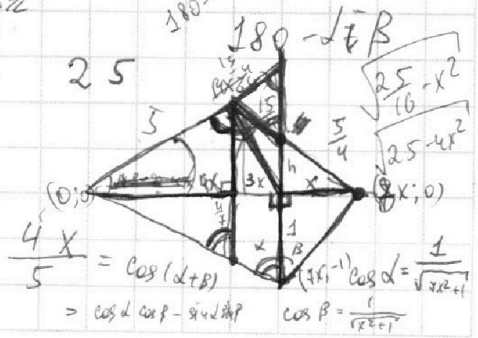
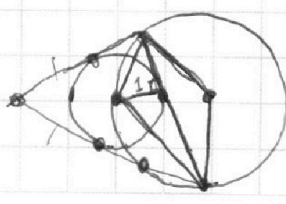
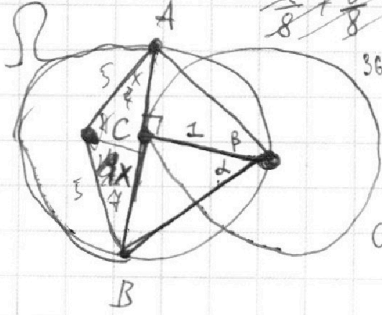
$a + b = m \cdot k$

$\frac{a+b}{8+8} = \frac{a}{8} = \frac{b}{8}$

$360 - 2d - 2B = X$

$a \equiv -b \equiv 3k$

$a = 24 + 3k$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

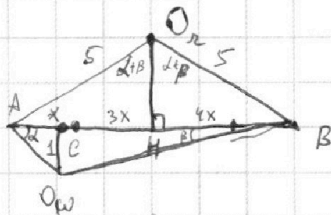
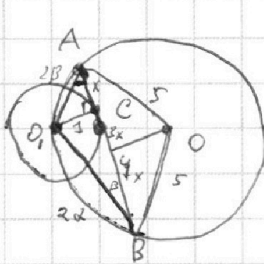
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



1) Соединим OA, OB .
 $OA = OB = R_{\Omega} = 5$

2) $O_2 H \perp AB$ (построим)

3) $O_2 C \perp AB$ (радиус \perp в т.-кр. хорды)

4) $\square AC = x \Rightarrow CB = 7x \Rightarrow AH = HB = 4x = \frac{AB}{2} \Rightarrow CH = 3x$

5) $\angle O_2 AC = \alpha, \angle O_2 BC = \beta \Rightarrow \sphericalangle A O_2 = 2\alpha \Rightarrow \sphericalangle AB = 2\alpha + 2\beta$
 $\sphericalangle B O_2 = 2\beta$

$\Rightarrow \angle A O_2 B = 2\alpha + 2\beta$, а т.к. $O_2 H$ - высота в $\triangle A O_2 B$, то $\sphericalangle A O_2 H = \alpha$
 $\sphericalangle B O_2 H = \beta$

6) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3x}{4x}, \operatorname{ctg} \beta = \frac{3x}{7x}$

$$\operatorname{ctg} \angle A O_2 H = \frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - 1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{7x^2 - 1}{8x}$$

$$\frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \frac{7x^2 - 1}{8x} \quad \sqrt{100 - 64x^2} = 7x^2 - 1 \quad t = x^2, t > 0, \text{ т.к. } x > 0$$

$$100 - 64t = 49t^2 + 1 - 14t$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad (49 + 50 - 99 = 0)$$

$$\frac{D}{4} = \frac{25^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99}{4} = \frac{625 + 490 \cdot 2 \cdot 49}{4} = \frac{625 + 980 \cdot 49}{4}$$

$$= \frac{1556}{4} = 389$$

$$t = \frac{-25 + 2\sqrt{389}}{49} \quad (+, \text{ т.к. } t > 0)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-25 + 2\sqrt{389}}{49}} \Rightarrow AB = 8x = \frac{8}{7} \sqrt{-25 + 2\sqrt{389}}$$

$$\frac{D}{4} = \frac{625 + 4900 - 49}{4} = \frac{5000 + 600 - 100 - 49 + 25}{4} = \frac{5476}{4} = 1369$$

$$t_2 = \frac{-99}{49} < 0 \Rightarrow \text{не корни}$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ ~~$t = 2 - 7x$~~

~~$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{(2x+1)(x+1)} = 2 - 7x$~~

~~$a = 2x - 3$~~
 ~~$b = x$~~

~~$\sqrt{(a-2)(x-1)} - \sqrt{(a+2)(x+1)} = 2 - 7x$~~

~~$\sqrt{ax - 2x + a + 2} - \sqrt{ax + 2x + a + 2} = 2 - 7x$~~

~~$t = ax + 2$~~
 ~~$k = 2x + a$~~

~~$k = 2x + 2x - 1 = 4x - 1$~~

~~$2 - 7x = \frac{t-k}{4} - \frac{t+k}{4} = \frac{1-7k}{4}$~~

~~$t - k - t - k - 2\sqrt{t^2 - k^2} = \frac{49k^2 - 14k + 1}{4}$~~

~~$49k^2 + 18k + 1 = -32\sqrt{t^2 - k^2}$~~

~~$D = 81 - 49 = 32$~~
 ~~$t = \frac{-9 \pm 4\sqrt{2}}{49}$~~

$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 7x + 2 = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$a = 2 - 7x$

$b = 2x^2 + 2x + 1$

$\begin{cases} b \geq 0 \\ b \geq a \end{cases}$

$\sqrt{b+a} - \sqrt{b} = a \quad (1)$

~~$\sqrt{b+a} = a + \sqrt{b} \Rightarrow (b+a)^2 = (a + \sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$~~

~~$b+a - b = 2\sqrt{b^2 - ab} = a^2$~~

$D = 4 - 8$

$a^2 = 49x^2 - 14x + 4$

$24 + \frac{1}{2} - 4$

если Эйлера, то либо оба 0, либо $a^2 + a < 0 \Rightarrow (-1; 0)$

~~$a = 0 \Rightarrow 0 = 2\sqrt{b^2} = 2|b| = 2b$~~

$a^2 = 49x^2 - 14x + 4 = 48x^2 + 48x + 24 + x^2 + x + \frac{1}{2} - 63x - 20\frac{1}{2} + 18 - 18$

~~$\Rightarrow x = \frac{3}{7}, a = -1 - 2\sqrt{b^2 + b}$~~

$2 - 7x = -1$

$4x = 3$

$x = \frac{3}{4}$

$b\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2 \cdot 9}{49} + \frac{2 \cdot 21}{49} + \frac{49}{49} = \frac{18 + 42 + 49}{49} = \frac{109}{49} = 2\frac{1}{49}$

~~$(a-a^2) = 2\sqrt{b^2 + ab}$~~

$24,5b - 9a - 38,5$

$a^4 - 2a^3 + a^2 = 4b^2 + 4ab$

$10a$

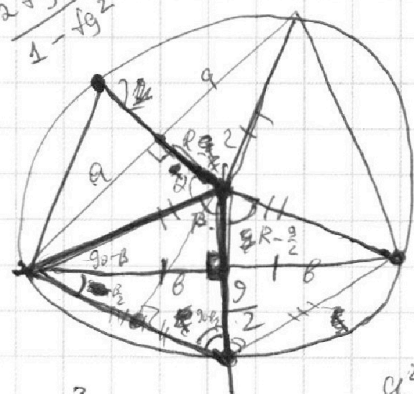
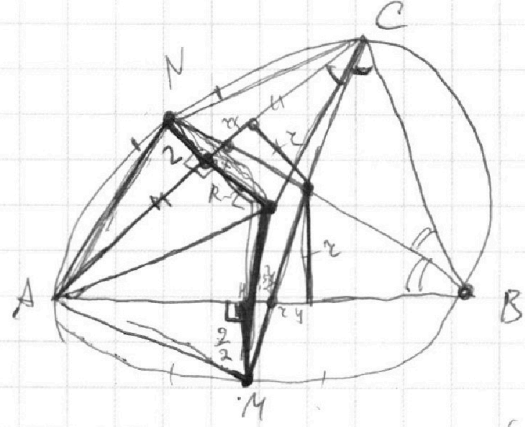
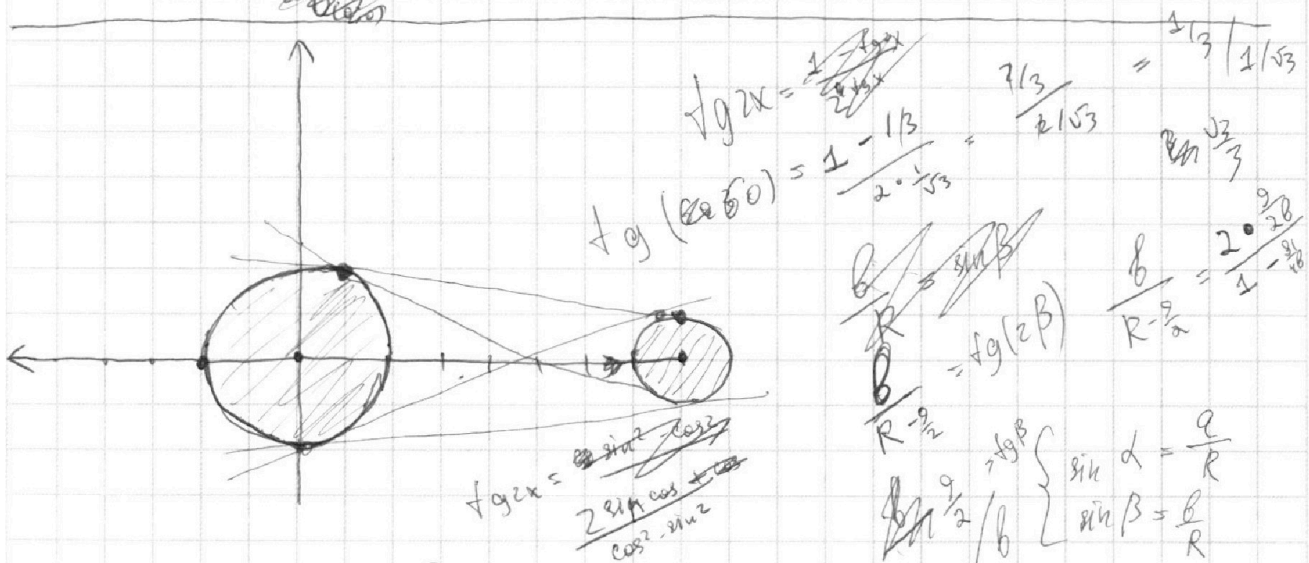
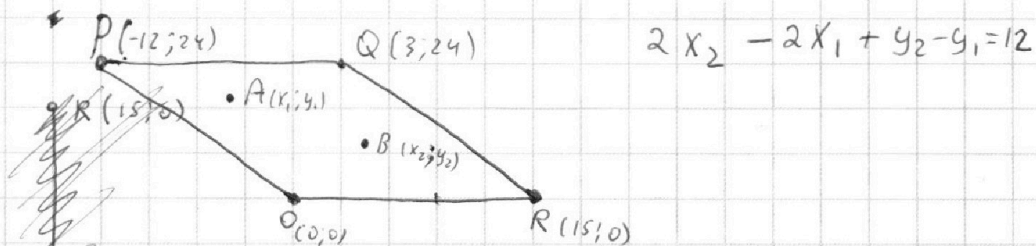
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$b \cdot R =$

$a^2 + x^2 = y^2 + b^2$

$b \left(1 - \frac{81}{4b^2}\right) = (R - \frac{a}{2}) \left(\frac{18}{2b}\right) (R - 2)^2 + a^2 = (R - \frac{a}{2})^2 + b^2$

$R^2 - 4R + 4 + a^2 = R^2 - aR + \frac{81}{4} + b^2$

$5R + 4 + a^2 = \frac{81}{4} + b^2$

$b^2 + (R - \frac{a}{2})^2 = R^2$

$b^2 = \frac{81}{4} - 9R = \frac{81 - 36R}{4} = \frac{9(9 - 4R)}{4} = \left(\frac{3}{2} - 3R\right) \left(\frac{3}{2} + 3R\right)$

$a^2 + (R - 2)^2 = R^2$

$a^2 - 4R + 4 = 0$

$a^2 = 4 - 4R = \frac{4(1 - R)}{1} = \frac{4(2 - 2R)}{2 + 2\sqrt{R}}$