



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} \cdot 7^1, bc : 2^{17} \cdot 7^3, ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

т.к. $a^2 b^2 c^2$ является квадратом, то все его присущие

делимости при разложении на множители

имеют четную степень \Rightarrow т.к. $a^2 b^2 c^2 : 2^{55}$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{56} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{56} \cdot 7^{68} \Rightarrow abc : 2^{22} \cdot 7^{34} \Rightarrow$$

найменшее натуральное $a, b, c \in \mathbb{N}$, т.о.

$$abc \geq 2^{22} \cdot 7^{34} \Rightarrow$$
 наименшее значение $abc = 7 \cdot 2^{22} \cdot 7^{34}$.

$$2^{28} \cdot 7^{34} : 2^{28} \cdot 7^{34} \Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$
 подходит.

$$0 \text{ реш. } 2^{28} \cdot 7^{34}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ -несократима $\Rightarrow (a, b) = 1 \Rightarrow (a+b, ab) = 1$ т.к. $a+b$ не
делится ни на один из делителей a или b , а ab -то
произведение a и b)

$$\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - ab}$$

$(a+b, ab) = 1 \Rightarrow ((a+b)^2, ab) = 1 \Rightarrow$ т.к. $(ab, (a+b)^2) = 1$, то

единственный множитель, который может делить
в 3значение
за исключением $ab \Rightarrow$ наибольшее $m=209$

Пример: $a=4$ $b=5$ $\frac{4}{5}$ -несократима

$$\frac{4+5}{(4+5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{9(9-20)} = \frac{1}{-11}$$

Образ: ~~4~~ $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

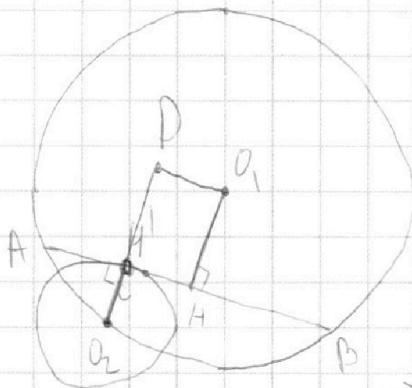
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(i) $M \in [AB] \wedge O_1 M \perp AB$

O_1 - центр Ω O_2 - центр ω

$A = O_1 B = 13 \Rightarrow$ т.к. $O_1 M$ - высота \triangle

$O_1 M$ - медиана и биссектриса $\triangle O_1 B O_2$

$\Rightarrow AM = MB$

(ii) $O_1 M \perp AB, M \in [AB] \Rightarrow AM = 7x, MB = 17x \Rightarrow AB = 24x$

$\Rightarrow AM = MB = 12x \Rightarrow M H = 5x$

предположим $O_2 M \parallel O_1 D$ т.к. $M D = O_1 M$. т.к. $O_2 M \parallel O_1 D$, т.к.

$M D O_1 D = \pi \Rightarrow DO_1 = MH = 5x$.

по рис. $DM = \sqrt{13^2 - (2x)^2} = \sqrt{169 - 4x^2}$

по рис. $O_1 D_2 = \sqrt{(DO_2)^2 + (DO_1)^2} = \sqrt{(7 + \sqrt{169 - 4x^2})^2 + (5x)^2} =$

$= \sqrt{49 + 169 - 14x^2 + 14\sqrt{169 - 4x^2} + 25x^2} = 13$ т.к. $O_2 D_2$ - радиус ω

$69 + 105 - 119x^2 + 14\sqrt{169 - 4x^2} = 169 \Rightarrow 119x^2 - 49 = 14\sqrt{169 - 4x^2}$

$f(x) = 119x^2 - 49 \quad g(x) = \sqrt{169 - 4x^2} \quad g(x) = 169 - 4x^2$

$f(x) \downarrow (-\infty; 0]$, $g(x) \uparrow (-\infty; 0]$ (об. ба вб. функции) \Rightarrow

на этом промежутке $f(x) \uparrow [0; +\infty)$ & $g(x) \downarrow [0; +\infty)$

так. $\sqrt{x} \circ g(x)$ не является монотонной (об. ба вбн.),

и не имеет монотонно однозначное определение $D(\sqrt{x} \circ g(x)) = [-\frac{13}{12}, \frac{13}{12}]$

аналогично $f(x) \uparrow [0; +\infty)$, $g(x) \downarrow [0; +\infty)$ \Rightarrow монотонные



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нужно написать.

1. к. нах. все интересуют $x \in \mathbb{Q}$, то у уравнения

$$119x^2 - 4y = 14 \sqrt{165 - 14y^2} \text{ только 1 корень нам нужно}$$

$$\begin{aligned} & 4x = 1, \quad 119 \cdot 1^2 - 4y = 20 \\ & \sqrt{165 - 14y^2} = 20 \end{aligned} \Rightarrow x = 1 - \text{20 корень}$$

$$\Rightarrow 1. к. AB = 2n x, \text{то } AB = 2n$$

О т в е т: $2n$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$\Rightarrow t = 3x^2 + 3x + 1$, $k = 1 - 9x$. Тогда:

$$\sqrt{t+k} - \sqrt{t} = k \quad (\Rightarrow) \quad t+k = k^2 + 2\sqrt{t}k + t \quad \left(\begin{array}{l} k \geq 0 \\ \sqrt{t+k} \geq \sqrt{t} \end{array} \right) \quad (\Rightarrow) \quad k(1-k) = \sqrt{t}k \quad \left(\begin{array}{l} k \neq 0 \\ \sqrt{t+k} \geq \sqrt{t} \end{array} \right) \quad \sqrt{t+k} \geq \sqrt{t}$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{cases} t = \frac{k^2 - 2k + 1}{2} \\ t \geq 0 \end{cases}$$

Подставим x
вместо k и t

$$(k \geq 0) \quad \sqrt{t+k} \geq 0$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 = \frac{81x^2 - 18x + 1 - 2 + 18x + 1}{2} \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \text{ - верно всегда для любых } x \\ (-9x)^2 + 9x \geq 0 \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$(-9x)^2 + 9x \geq 0 \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0$$

$$k=0$$

$$(-9x)^2 + 9x \geq 0 \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \begin{cases} 37,5x^2 - 3x - 1 = 0 \\ x \leq \frac{1}{9} \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{3-\sqrt{159}}{2}, \frac{17}{9} \right\}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{159}}{2} \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x \geq 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad x \in \left\{ \frac{3-\sqrt{159}}{2}, \frac{17}{9} \right\}$$

$$x = \frac{1}{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Л МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

в иту парижского МГ и (OP)_a =>
и в какого же следующего рода
будет состоять все такие часы для
предназначения.

В ряду С $y=0$ час 8:00 $1h + 126 = 140$
 \Rightarrow т.ч. всего 140 часов (также можно учесть
26) то есть парижские

$$140 \cdot 4 = 1960$$

час.

Отв: 1960 часов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нашли уравнение прямой (OP) и (RQ)

$$\frac{x_1}{-13} = \frac{y_1}{26} \quad (\Rightarrow) \quad y = -2x \quad (OP)$$

$$\frac{x_2 - 3}{13} = \frac{y_2 - 26}{-26} \quad (\Rightarrow) \quad y = -2x + 32 \quad (RQ)$$

Задача 1. Найдите точку с координарами (x_1, y_1)

такая ГМТ удовлетворяет уравнению $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 0$

\Rightarrow в левой части уравнения $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 0$

точная прямая $II (OP) \text{ и } I (RQ)$ ~~не~~ ~~забыть~~ ~~забыть~~ ~~забыть~~ ~~забыть~~

~~x_1, y_1~~

Проверим все точки с координатами (x_1, y_1)

6 #. Найдем будем идти по строкам снизу вверх,
~~снизу~~ сева направо.

1) $(0, 0)$. ~~1~~ Выберем точку (x_2, y_2) с координатами
записанными по Y. ~~тогда~~ (это правило О.К. если
мы идем по Y и не 6 #) это точка $(7, 0)$. Значит
мы при ~~выбираем~~ X на 1 ~~будет~~ ~~записать~~
а 1 это ~~запись~~ запись уменьшить
чтобы, а если ~~запись~~ то получим число, то

$1 \cdot 7 - 2 \cdot 0, 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 7 - 0 = 7$ ~~запись~~ ~~запись~~

Следует $y = y_1 + 2x_1 - 2x_2 + 14$ то ~~запись~~ получим (?)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-1)^2 - 16) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-1)^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Запишем, что $x^2 + y^2 = 1$ - ур. Ω окр.

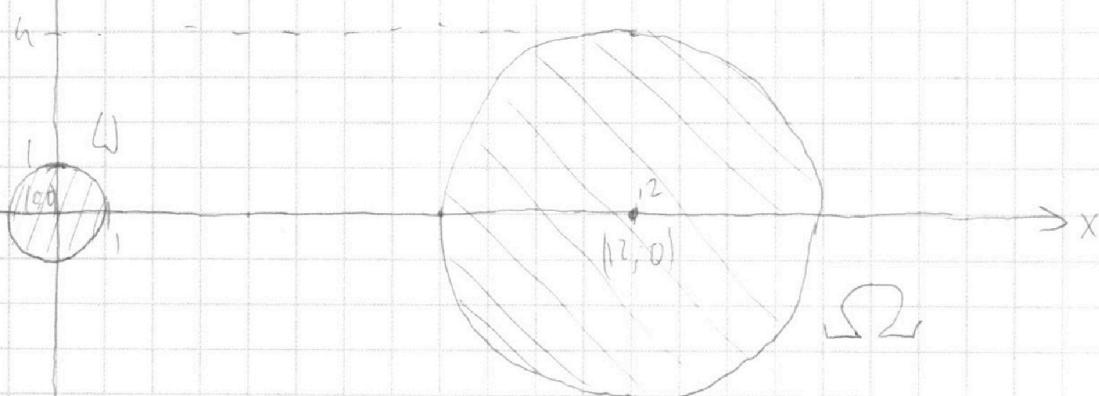
$$x^2 + (y-1)^2 = 16 \text{ - ур. } \ell \text{ окр.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y-1)^2 - 16 \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Изобразим в координах

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 16 \quad (4)$$

Y



(1) исходим из условия, что Ω не содержит
всей области $\Omega\bar{\cup}$ и ее окружности и
окруженности Ω без ее окружности III-я область

(2) исходим аналогично, но Ω и $\Omega\bar{\cup}$ не могут
пересекаться ($(\Omega\cap(\Omega\bar{\cup}))\cap\Omega\bar{\cup}$ - эта область

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\begin{array}{l} e=1 \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} C=\frac{5}{12} \\ e=1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} C=-\frac{1}{12} \\ e=1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} e=-1 \\ C=-\frac{5}{12} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} e=-1 \\ C=\frac{1}{12} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

тогда получаем и урл (т.к. урл э парн. то ч12)

$$\frac{5}{12}x + \frac{\sqrt{119}}{12}y + 1 = 0 \quad (=) \quad \frac{5}{\sqrt{119}}x + y + \frac{12}{\sqrt{119}} = 0 \quad (\text{вычленить корн. перед } x)$$

$$-\frac{1}{12}x + \frac{\sqrt{15}}{16} + 1 = 0 \quad (=) \quad -\frac{1}{\sqrt{15}}x + y + \frac{16}{\sqrt{15}} = 0$$

$$-\frac{5}{12}x + \frac{\sqrt{119}}{12}y - 1 = 0 \quad (=) \quad -\frac{5}{\sqrt{119}}x + y - \frac{12}{\sqrt{119}} = 0$$

$$-\frac{1}{12}x + \frac{\sqrt{15}}{16} - 1 = 0 \quad (=) \quad \frac{1}{\sqrt{15}}x + y - \frac{16}{\sqrt{15}} = 0$$

Таким образом получаем в 780 \{ \frac{5\sqrt{119}}{119}; -\frac{5\sqrt{119}}{119},

$$-\frac{4\sqrt{15}}{15}; \frac{4\sqrt{15}}{15} \}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \{ -\frac{5\sqrt{119}}{119}; -\frac{4\sqrt{15}}{15}; \frac{4\sqrt{15}}{15}, \frac{5\sqrt{119}}{119} \}$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

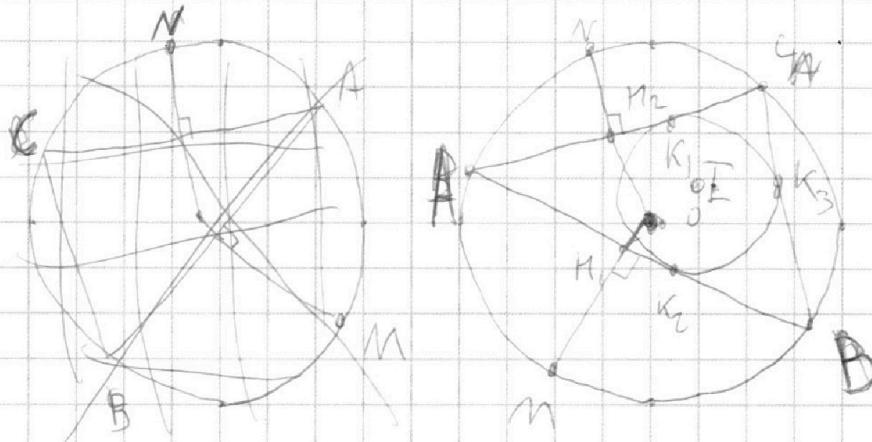
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По условиям $NP_2 = 2,5$ $MN_1 = 5$.

$\sqrt{AM} = \sqrt{MB} \Rightarrow AM = MB \Rightarrow \triangle AMB - \text{р/с} \Rightarrow MN_1 - \text{медианы}$, след.

Аналогично NP_2 - медиана и след. для $\triangle ANC$

тогда $AP_2 = P_2C$. $\times \triangle ADC$. $AD = DC = r \Rightarrow \triangle ADC - \text{р/с} \Rightarrow$

\Rightarrow т.к. OP_2 - медиана, то OP_2 - бис., высота \Rightarrow

$\Rightarrow OP_2 \perp AC \Rightarrow P_2 \in [NO]$. Аналогично $P_1 \in [MQ]$

$\Rightarrow OA > r$. тогда $ON_1 = r - 5 \Rightarrow \cos \angle P_1OB = \frac{r-5}{r} = \frac{5}{r}$

$$\cos \angle P_1OB = \cos 2\angle P_1OB = 1 - 1 + \frac{10}{r} - \frac{25}{r^2} = \frac{10r-25}{r^2}$$

Аналогично $\cos \angle P_2AB = \cos 2\angle P_2AB = 1 - 1 + \frac{10}{r} - \frac{25}{r^2} = \frac{10r-25}{r^2}$

$$= \frac{10r\sqrt{r^2-10r+25}}{r^2} = r \frac{r+5}{r} = r+5$$

Аналогично $AC = r+2,5$. ~~50%~~ ~~50%~~

II - член φ отмеченной окружности, а также
расстояние - до K_1, K_2, K_3 .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle A K_1 = x$. Тогда $(K_1 = r+2,5-x \Rightarrow K_3 = r+2,5-x)$,
 $\Rightarrow BK_3 = AK_2 = x \Rightarrow BK_2 = r+5-x \Rightarrow BK_3 = r+5-x$,
 тогда $\beta = 2r+7,5-2x$.

$\cos \alpha$ мы знаем $\cos \angle AOM$, $\cos \angle ON$.

$\angle AOM = \frac{1}{2} \angle CAB$, $\angle AON = \frac{1}{2} \angle ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \cdot r \cdot r \cdot \cos(\angle CAB) = \frac{1}{2} \angle CAB$, т.е. $\angle CAB = \angle AON + \angle AOM$.

из координат мы можем также найти
шаги из прямой O_1M_1B и ODN_2C .

тогда можно найти $\cos \angle CAB$ и выразить

$\angle CAB$ из $\angle CB$ для x . из этого получим искомую x
также зная x и $\angle CAB (\angle OAB = \frac{1}{2} \angle CAB)$ можно
из тригонометрии найти IA .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 59 \\ \times 3 \\ \hline 159 \\ + 127 \\ \hline 226 \end{array}$$

$$504$$

$$126 + 7,5\sqrt{154}$$

$$\frac{9+3\sqrt{154}}{2}$$

$$1,5$$

$$ax + y + b = x^2 + y^2 + -1$$

$$3 \cdot 64$$

$$2x^2(1-\cos\beta) = 5x - 6,25$$

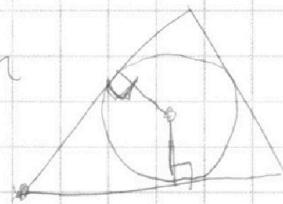
$$192 + 2n + 1$$

$$15^2 - 25$$

$$217$$

$$603$$

$$\cos\beta = \frac{6,25 - 5x - 2x^2}{2x^2}$$



$$r=5$$

$$r=2,5$$

$$\cos$$

$$\frac{r-5}{r}$$

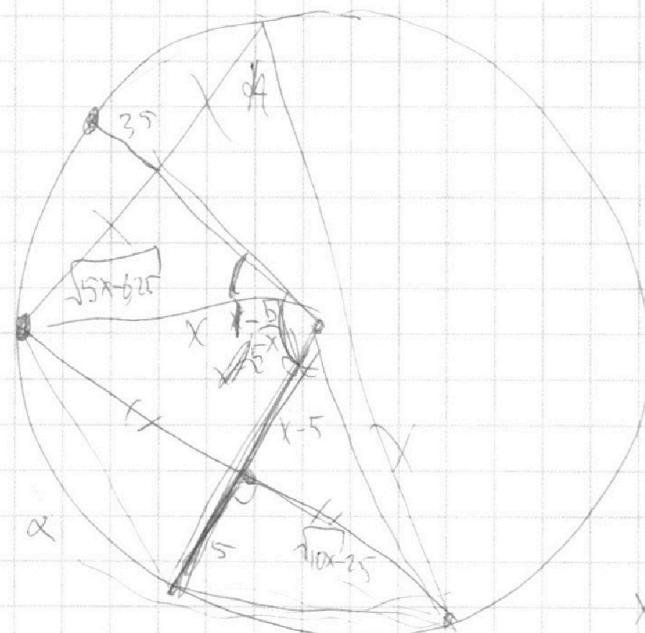
$$\frac{r-2,5}{r}$$

$$1 - \frac{5}{r}$$

$$1 - \frac{2,5}{r}$$

$$1 - 2\cos^2\alpha$$

$$x^2 - x^2 + 7,5\sqrt{10x - 25}$$

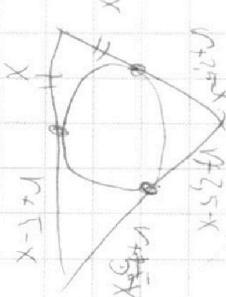


$$\alpha$$

$$2x^2 - 2\cos\alpha x^2 = 10x - 25$$

$$2x^2(1 - \cos\alpha) = 10x - 25$$

$$\cos\alpha = \frac{25 - 10x - 2x^2}{2x^2} - \cos\beta = \frac{5}{x} - \frac{25}{2x^2}$$



$$x^2 - 5^2 + 12$$

$$x^2 - 25 + 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

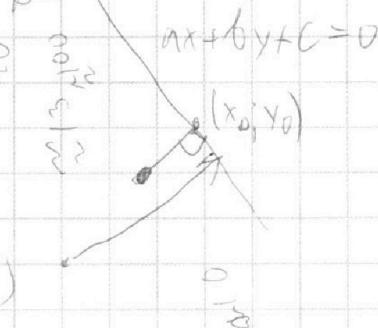


- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8



ab

b 7

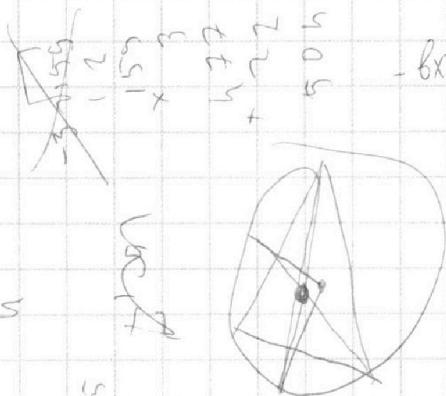
12

2 3

$$\{a; b\} \cancel{\times} \quad \{b; a\}$$

0

$$|ax_0 + by_0 + c| = 1$$



$$-bx_0 + ay_0 = 0$$

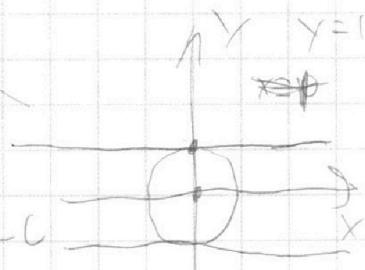
$$ay_0 = bx_0$$

$$x_0 = \frac{a}{b}y_0$$

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

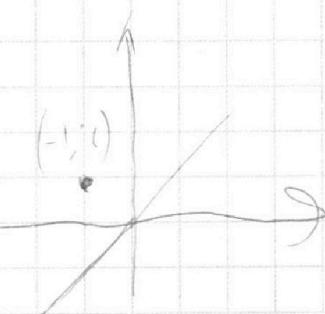
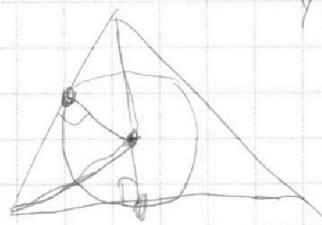
$$\frac{a^2}{b^2}y_0^2 + by_0 + c = 0$$

$$\frac{a^2}{b^2}y_0^2 + by_0 = -c$$



$$y_0 = -c$$

$$y = -1$$



$$c = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{16}$$

$$\left(\begin{array}{c} 15 \\ 20 \\ 27 \\ 2 \\ 3 \\ 12 \\ 15 \\ 20 \\ 27 \\ 2 \\ 3 \\ 12 \\ 27 - 6 - 5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 15 \\ 20 \\ 27 \\ 2 \\ 3 \\ 12 \\ 15 \\ 20 \\ 27 \\ 2 \\ 3 \\ 12 \\ 27 - 6 - 5 \end{array} \right)$$

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$rp = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(-1, -1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$\begin{array}{r} 40,5 \\ 32 \\ \hline 23 \\ 55 \end{array}$$

$$ab(c^2) = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} =$$

$$(x-1)^2 \quad a+b = km$$

$$90,5 \quad k^2 m^2 - 9ab = nm$$

$$32,5$$

$$9ab = m(k^2 m^2 - nm)$$

$$(4b; a+b) = 0 \quad (9)$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

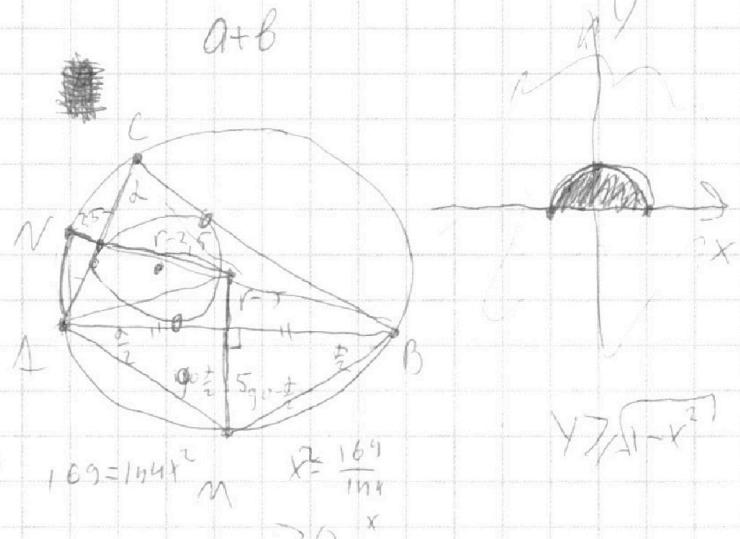
$$\boxed{(2+1)(1)} \quad 36 - 2n = 12 \Rightarrow n = 12\sqrt{3}$$

$$\boxed{1} \quad \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad -5 \quad 8 \quad y=12$$

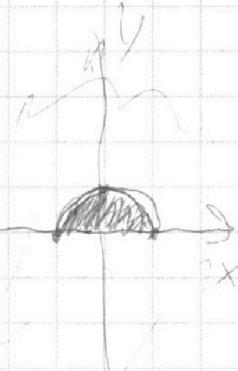
9-

$$\begin{aligned} &\sqrt{t+k} + \sqrt{t-k} = 5x+1 \\ &\sqrt{t+k} - \sqrt{t-k} = k \quad (=) \quad t+k = k^2 + 2k\sqrt{t} + t \\ &-k^2 = 2k\sqrt{t} \quad (=) \quad t = \frac{-k}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3 + \sqrt{159}}{2} \right|^2 = \frac{27 + 18\sqrt{159} + 159 - 3 - 3\sqrt{159}}{4}$$



$a+b$



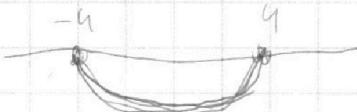
$$Y \geq \sqrt{1-x^2}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

20

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$x \in [-n; n]$$



$$(x-h)(x+h)$$

$$(x-h)(x+h) + (y-12) \stackrel{?}{=} 0$$

75

150

25

150

3 + 150



$$\begin{aligned} &\frac{3+13}{2} \quad x = \\ &y = \frac{12}{h} \quad h \\ &+ 300 \end{aligned}$$

+ 300

75

150

25

150

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

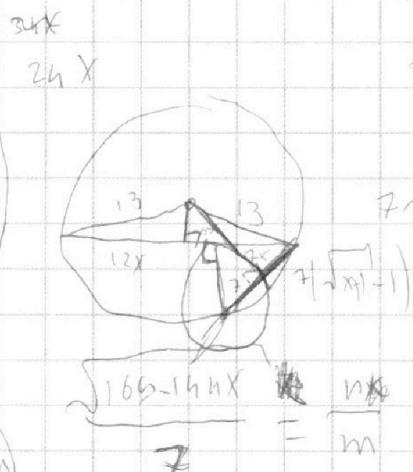
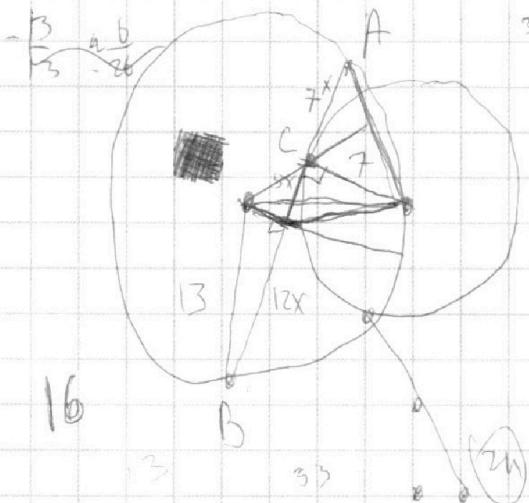
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

0-32



$$-26x + 26 = 33 - 26 \cdot 13$$

$$-2x + 6 = y - 26$$

$$-2x + 36$$

$$\frac{165 - 144x}{7} = \frac{m}{n}$$

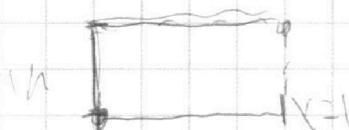
$$7n = m\sqrt{165 - 144x}$$

$$1/2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = m$$

$$9x = y$$

$$63 \quad \left(7 + \sqrt{169 - 144x}\right)^2 + 25x^2 = 169$$

$$49 + 169 - 144x + 14\sqrt{169 - 144x} + 25x^2 = 169$$



$$70 + 14\sqrt{169 - 144x} + 25x^2 = 169$$

$$(144x - 49 - 25x^2)^2 = 196(169 - 144x)$$

$$(-13, 26), (3, 26)$$

$$(26, 0)$$

$$0 \leq y \leq 26$$

$$\angle X$$

$$(13^2, 0)$$

$$(0, 26)$$

$$(0, 0)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом у прямой ^{имеющие} золотое соотношение от 0 до 26.

~~нек~~ (при этом точка ~~также~~ тоже не будет лежать

на прямой № 6 с наклоном $y = 2x + y_1 - 2x + 14$
в $(0,0)$) \Rightarrow $y(0,0) = (0,0)$ ~~14~~ точек.

2) $(1;0), (2;0) \dots (9;0)$. Таких точек все ~~имеющие~~ $(1;0)$

$\Rightarrow 9 \cdot 14 = 126$ вариантов

3) $(10;0), (11;0) \dots (16;0)$. В таких точках самая первая

точка ~~имеющая~~ лежит за прямую №

(то $(10;0)$ не лежит ~~также~~ то $(11;0)$, а ~~затем~~ лежит

первая точка $(11;0) - (10;0) \dots$), а ~~затем~~

и все прямые образованные точками будут

линейные $\Rightarrow 0$ вариантов.

ii) все оставшиеся золотые, что оставшиеся

точки выбираются увеличением y на 2

и, соответственно x на 1 (то есть прямые

на которых лежат эти две точки). тогда

$(0;0)$ будет использовать следующее

точка ~~и~~ $(1;2)$. Значит, что ГМТ не подходит

иных точек не изменится ($y = -1 \cdot 2 + 2 - 2x + 14 = y = -2x + 14$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

После упр. 3 и в Ω отсевают окружности
 $w \in \partial\Omega \setminus \{w \in \Omega\}$ это круги, а не
окружности)

Значит ве с овалом это Ω и то есть
таких $w \in \Omega$ что $w \in \Omega$

$ax + y - b = 0$ - это прямая \Rightarrow будем говорить

2 решения ~~така~~ одна, когда это

~~окружностей~~ прямые ~~одна~~ лежат одна

сразу ~~две~~ окружности. таких прямых
существует и.

$cx + dy - e = 0$ - параллельное уравнение $ax + y - b = 0$

Тогда получаем ~~одинаковы~~ (одинаково расположены) \Rightarrow (1) и (2)

$$\left| \begin{array}{l} 1 = |e| \\ 4 = |C \cdot 2 + e| \end{array} \right.$$

(\Rightarrow)

$$\left| \begin{array}{l} e = \pm 1 \\ 12c = e \pm h \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} e = 1 \\ c = \frac{h}{12} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} e = 1 \\ c = \frac{h}{12} \\ d = \frac{\sqrt{1+4h^2}}{12} \end{array} \right.$$

~~12c = h~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!