



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметил что  $abc: 7^{37}, m \cdot k ac: 7^{37}$

$$] abc: 2^{26} \Rightarrow m \cdot k ac: 2^{20} \Rightarrow \cancel{b} \cancel{7^2} \deg \text{вхождения } 26 b \leq 5 \\ m \cdot k bc: 2^{17} = \cancel{a} \cancel{7^2} \deg \text{вхождения } 26 a \leq 8$$

$$\downarrow \\ \deg \text{вхождения } 26 ab \leq 13$$

$$13 \geq 14$$

??

$$abc: 2^{26} \quad \leftarrow$$

$$\downarrow \\ abc: 2^{26} \cdot 7^{37}, m \cdot k (2^{26}, 7^{37}) = 1$$

$$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc > 0 \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Пример:  $a = 2^9 \cdot 7^{14}; b = 2^6 \cdot 7^0; c = 2^{11} \cdot 7^{20}$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10} \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \quad ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Сократим на } \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} : m = \frac{(a+b)^2}{(a^2-6ab+b^2) \cdot m} : m = \frac{8ab}{m}$$

$$\frac{a^2-6ab+b^2}{m} \Rightarrow \frac{b^2+ab}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{8a^2}{m}, \frac{8b^2}{m}$$

], р-край простой делитель m

$$\text{Если } m > 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} : p \Rightarrow \frac{a}{b} : p \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \text{сократим на } //$$

?

$$b \leq 2$$

], m - степень двойки

~~если  $a \neq b$~~

$$m = 2^k$$

$$\text{Если } k \geq 4 \Rightarrow a^2 : 2^4 \Rightarrow a : 2 \Rightarrow b : 2 \Rightarrow \frac{8b^2}{m}$$

$$\frac{8b^2}{m}$$

$$k \leq 3 \Rightarrow m \leq 8$$

Пример:

$$a=1, b=7 \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{8} - \text{сократим на 8}$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3]

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \\ b &= \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{aligned} \implies \begin{cases} a-b = 2-7x \\ a^2-b^2 = 2-7x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = 2-7x \\ a+b = 1 \end{cases}$$

$$1) 2-7x \Rightarrow x = \frac{2}{7} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} = \sqrt{85} \Rightarrow a-b=0 \\ b = \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 1} = \sqrt{85} \quad \text{найдено}$$

$$2) a+b=1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 1 \leq 0$$

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 8x - 3$$

$$m \cdot k_4 > 0 \Rightarrow f_{\min} = f\left(\frac{3}{8}\right) = 4 \cdot \frac{9}{64} - 3 \cdot \frac{3}{8} + 1 > 0$$

корень корней нет

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7} \right\}$$

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим какие точки подходят в пару к А при фикс. А  
(пока что удобнее считать что точки в паре лежат на прямой)

$$2x_2 + y_2 - 2x_1 - y_1 = 12 \Rightarrow 2x_2 + y_2 = \text{const}$$

прямая с наклоном -2. Отсюда вычисляем, что

точки  $(x_1 + 6; y_1)$  - корень

Заметим, что стороны OP и QR имеют тот же наклон -2  $\Rightarrow$  каждой точке параллелограмма соответствует <sup>в пару</sup> две точки лежащие на прямой соотв. || OP и QR (прямая и точки могут быть вне параллелограмма) замечание

Заметим что  $PQ$  и  $OR$  имеют тот же наклон

Отсюда Замечаем что если  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_1 + 6; y_1) \in OPQR$   
то все <sup>участие</sup> точки прямой  $\parallel QR$ , ~~но он с~~  $y \leq 24$  подходит в пару к А, а если условие не выполнено, то все точки на прямой через В все  $OPQR \Rightarrow$  у А нет пары. участие точек

Также если  $A', A, B \in OPQR$ , ~~и~~  $(A, B)$  - пара, то если  $A' A \parallel QR$ , то  $(A', B)$  - пара, а если нет то нет.  $\Rightarrow$  всего пар в  $(24+1)$  раз больше чем для ~~пар~~ точек на OR

наш ~~пар~~ точек на OR =  $(15+1-6) \cdot (24+1) = 250 \Rightarrow$  всего 20 пар

G25

Ответ: 625



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что мы нашли ~~сред~~ подобную  
пару чисел задавая

$ax - y + 10b = 0 \Rightarrow ax + 10b = y \Rightarrow$  прямая ~~корни~~-траектория  
проходящая через  $(0; 10b)$  и сколько квадранта  
 $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$  проходит  
 $(x+8)^2 + y^2 - 1$  - окружность с центром в  $(-8; 0)$   
радиуса 1 из  $w_1$ , радиуса 2

$x^2 + y^2 - 1$  - окружность с центром в  $(0; 0)$  радиуса 1 из  $w_2$

$((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2) - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$  Количество точек  
на  $\ell$  и лежащих пары в 1 из  $\{w_1, w_2\}$  или на  $w_1 \cap w_2$   
равно 2. Заметим что если прямая проходит сквозь  
 $w_1 \cap w_2$  то таких точек  $\infty$  (т.к.  $w_1 \cap w_2$  пересекаются)  $\Rightarrow \ell$ -  
касательная, т.к 2 точки на  $\ell$  - должна касаться на  $w_1 \cap w_2$ .  
Линии уравнением всех ч.к касательных  
 найдут уравнение квадр.  $\begin{cases} \text{м.в.а.} \\ \text{всех} \end{cases}$  касательных (существование  
в для каждого найденного  $\ell$  очев., т.к у  $A$  есть прямой  
есть уравнение)

Всего 4 варианта квадр.: если внешняя, то  $\pm \frac{\sqrt{63}}{63} = \frac{\sqrt{7}}{21}$   
если внутренняя, то  $\pm \frac{\sqrt{55}}{55}$

$\Rightarrow$   
это все  
подходящие  $\alpha$

Ответ:  $\left\{ \frac{\sqrt{7}}{21}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{\sqrt{55}}{55}; -\frac{\sqrt{55}}{55} \right\}$

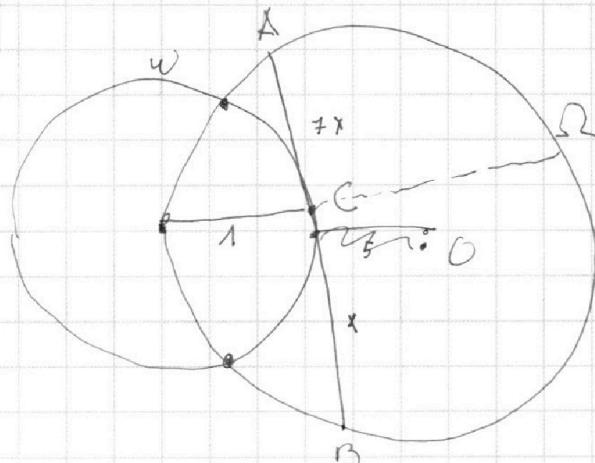
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

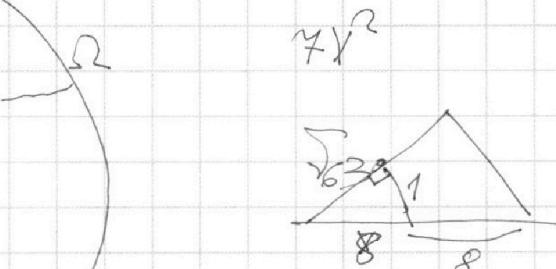
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$15 + 14 + 20 = 52 \quad 26$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 11 \\ \hline 66 \end{array}$$

$$a \quad 9$$



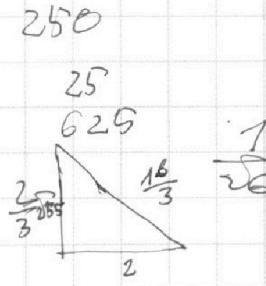
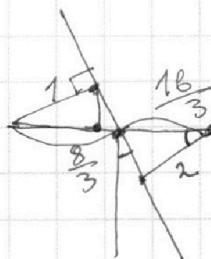
$$\frac{x+8}{x} = \frac{2}{7}$$

$$x = 8$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + \cancel{2\sqrt{}} = 1$$

$$\begin{array}{l} 4x^2 - 3x + 3 \\ \underline{- 3x} \quad 0,75x + 0,75 \\ \hline 2x \quad 0,75x \end{array}$$



$$64 \frac{256}{9}$$

$$2 / \quad \cancel{\frac{36}{255}} = 4 \cdot 55$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b : m$$

$$50 - 6 \cdot 7 = 8$$

$$a^2 - b^2 = 4 \cancel{2} \cdot 2 - 7x$$

$$a^2 - cab + b^2 : m \Rightarrow 8ab : m$$

$$a-b = 2 - \cancel{x}$$

$$8b^2 : m$$

$$m : p \quad a+b=1$$

$$8d^2 : m$$

$$b : p \Rightarrow 8 : p \quad 8 - 76 + 144$$

$$8+28+49 = 8+77$$

$$p=2$$

$$-0,5 \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{2} \quad 0,5$$

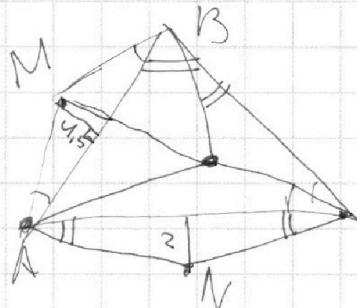
$$2x^2 - 5x + 3$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$(2x-3)(x-1) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\begin{array}{cccccc} 2x & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0:0 & & & & \\ -6:12 & & & & \\ -12+12:0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a=1 \\ b=0 \end{array}$$



$$\begin{array}{c} (-8)^{-7} \\ C \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 8 \\ C \end{array}$$

$$\frac{AB}{2\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\angle} = \frac{NC}{\sin\angle}$$

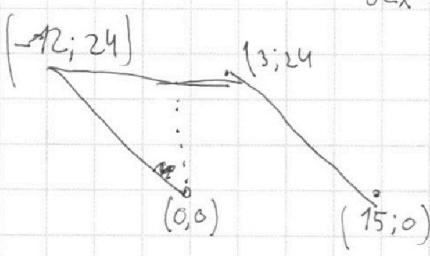
$$\sin\angle = \frac{2}{NC}$$

$$\frac{AC}{2\cos\beta} = \frac{2}{\sin\angle}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{AB}{2\cos\beta} = \frac{2,5}{\sin\beta}$$

$$(x-2,5)^2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$$



$$\frac{9}{2} + 3 + 1 =$$

$$\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

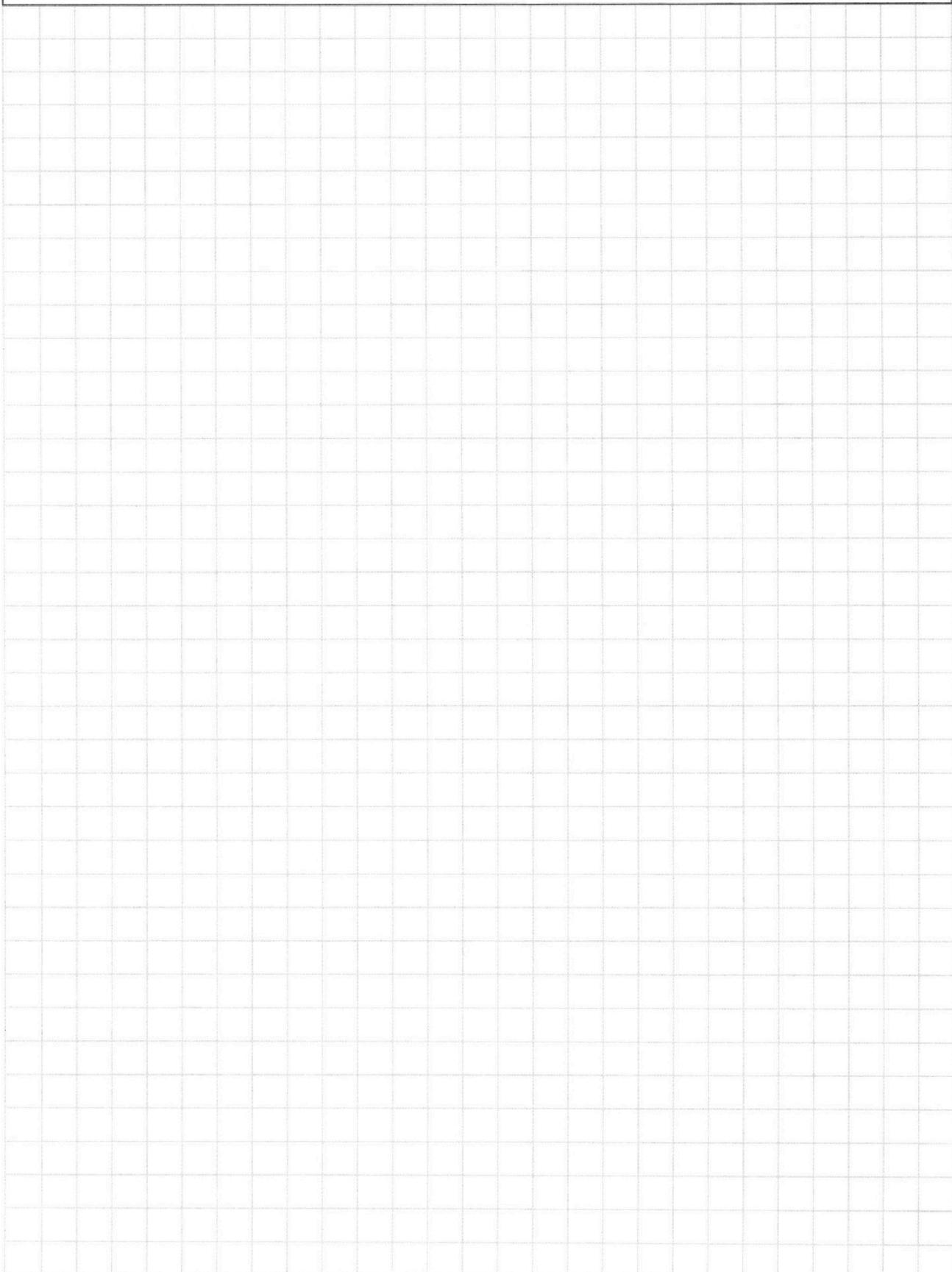
5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**