



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим что $abc: 7^{37}$, м.к $ac: 7^{37}$

$$\begin{aligned} \square abc/2^{26} \Rightarrow \text{м.к } ac: 2^{20} &\Rightarrow \cancel{b/2^6} \text{ deg вхождения } 2 \text{ в } b \leq 5 \\ \text{м.к } bc: 2^{17} &= \cancel{a/2} \text{ deg вхождения } 2 \text{ в } a \leq 8 \end{aligned}$$

\Downarrow
deg вхождения 2 в $ab \leq 13$

$$\Downarrow$$
$$13 \geq 14$$

$$abc: 2^{26} \leftarrow$$

$$\Downarrow$$
$$abc: \cancel{2^6} 2^{26} \cdot 7^{37}, \text{ м.к } (2^{26}, 7^{37}) = 1$$

$$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc > 0 \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{17}$; $b = 2^6 \cdot 7^0$; $c = 2^{11} \cdot 7^{20}$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{10} \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \quad ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Сократим на } \Rightarrow \begin{matrix} a+b : m \\ a^2 - 6ab + b^2 : m \end{matrix} \Rightarrow (a+b)^2 : m \Rightarrow \begin{matrix} 8ab : m \\ a^2 + ab : m \\ b^2 + ab : m \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 8a^2 : m \\ 8b^2 : m \end{matrix}$$

\exists p -каждой простой делитель $m \Rightarrow$

$$\text{Если } \alpha_k \geq 2 \Rightarrow \begin{matrix} a^2 : p \\ b^2 : p \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a : p \\ b : p \end{matrix} \Rightarrow \frac{a}{b} \text{ - сократим}$$

?! //

$$p \leq 2$$

$\Rightarrow m$ - степень двойки

Если $\frac{a}{b} = \frac{a/2}{b/2}$

$\exists k$ - deg брансо

$$m = 2^k$$

$$\text{Если } k \geq 4 \Rightarrow a^2 : 2 \Rightarrow a : 2 \Rightarrow b : 2 \Rightarrow \begin{matrix} 8b^2 : m \\ 8b^2 : m \\ 8b^2 : m \end{matrix} \Rightarrow \frac{8b^2}{m}$$

$$k \leq 3 \Rightarrow m \leq 8$$

Пример:

$$a=1 \quad b=7 \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{8} \text{ - сократим на } 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \\ b &= \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 - 7x \\ a^2 - b^2 = 2 - 7x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = 2 - 7x \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad 2 = 7x &\Rightarrow x = \frac{2}{7} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} = \sqrt{85} \\ b &= \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 1} = \sqrt{85} \Rightarrow a - b = 0 \\ &\text{подходит} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad a + b = 1 &\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \\ &\Downarrow \\ &4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1 \\ &\Downarrow \\ &4x^2 - 3x + 3 \leq 0 \\ f(x) &= 4x^2 - 3x + 3 \\ f'(x) &= 8x - 3 \\ \text{m.k.} > 0 \Rightarrow f_{\min} = f\left(\frac{3}{8}\right) = 4 \cdot \frac{9}{64} - 3 \cdot \frac{3}{8} + 3 > 0 \\ &\Downarrow \\ &\text{корней нет} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{\frac{2}{7}\right\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим какие точки попадут в пару к A при фиксе A
(пока что уберём условие что точки в параллелограмме)

$$2x_2 + y_2 - 2x_1 - y_1 = 12$$

$\Rightarrow \underbrace{2x_2 + y_2}_{\text{const}} \Rightarrow$ мн-во решений (x_2, y_2) -
прямая с коэф. наклона -2 . Отсюда вычисляем, что
Рассмотрим $(x_1 + 6; y_1)$ - корень

Заметим, что стороны OP и QR имеют ^{тоже} ~~тоже~~

коэф. наклона $-2 \Rightarrow$ каждой точке параллело-
грамма соответствует ^{в пару} целые точки лежащие
на прямой $\text{const} \parallel OP$ и QR (прямая и точки
могут быть вне паралл-ма) Заметим

Заметим что ^{прямые} PQ и OR имеют ~~этот~~ коэф. наклона 0

Отсюда замечаем что если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_1 + 6; y_1) \in OPQR$
то все ^{целые} точки прямой $\parallel QR$, то $0 \leq y \leq 24$ попадет
в пару к A , а если условие не выполнено, то все точки на прямой
через B вне $OPQR \Rightarrow y_A$ нет пары. целые точки

Также если $A', A, B' \in OPQR$, то (A, B) - пара, то если
 $A'A \parallel QR$, то (A', B) - пара, а если нет то нет. \Rightarrow всего
пар в $(24+1)$ раз больше чем для ^{пар} точек под OR

пар для точек на $OR = (15+1-6) \cdot (24+1) = 250 \Rightarrow$ всего 20 пар

625

Ответ: 625

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что мы нашли ~~еще~~ ~~параболу~~ параболу
пару a и b зафиксировали

$ax - y + 10b = 0 \Rightarrow ax + 10b = y \Rightarrow$ ~~прямая~~ прямая
проходящая через $(0; 10b)$ и ~~касательная~~ касательная
назовем l

$(x+8)^2 + y^2 - 1$ - окружность с центром в $(-8; 0)$
радиуса 1 ~~назовем~~ w_1

$x^2 + y^2 - 4$ - окружность с центром в $(0; 0)$ ~~радиуса~~ радиуса 2
~~назовем~~ w_2

$(x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ ~~знак~~ \Leftrightarrow количество точек
на l и лежащих ровно в 1 из $\{w_1; w_2\}$ или на w_1 или w_2
ровно 2. Заметим что если прямая проходит внутри
 w_1 или w_2 то таких точек ∞ (т.к. w_1 и w_2 пересекаются) $\Rightarrow l$ -
касательная, т.к. 2 точки то l - ~~общая~~ касательная
 w_1, w_2 . Найдем уравнения всех ~~касательных~~ касательных
Найдем уравнение ~~касательных~~ касательных (существование
 b для каждого найдем ~~а~~ ~~каждый~~ a очев., т.к. у ~~каждой~~ прямой
есть уравнение)

Всего 4 варианта каср: если внешняя, то $\pm \frac{\sqrt{63}}{63} = \pm \frac{\sqrt{7}}{21}$
если внутренняя, то $\pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$

~~еще~~

\Rightarrow это все
параболы l

Ответ: $\left\{ \frac{\sqrt{7}}{21}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{3\sqrt{55}}{55}; -\frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$

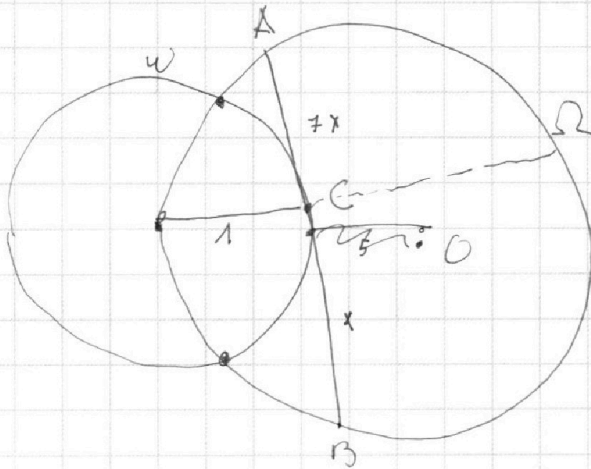
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

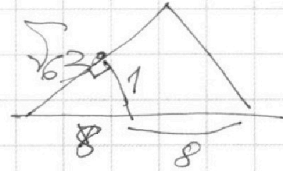
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4x^2$$



$$\frac{x+8}{x} = \frac{2}{1}$$

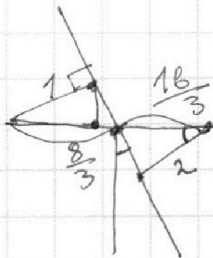
$$x=8$$

$$15+17+20 = 52 \quad 26$$

~~10~~ 6
 c 11
 a 9

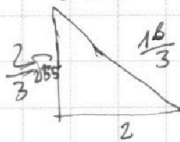
$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$4x^2-3x+4 + 2\sqrt{\quad} = 1$$



$$250$$

$$25$$



$$\frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$4x^2 - 3x + 9$$

$$x^2 - 3x + 0,75x + 0,75$$

$$2x \quad 0,75x$$

$$64 \quad \frac{256}{9}$$

$$2/$$

$$\frac{36}{\sqrt{55}}$$

$$\frac{220}{9} = 24,55$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$1 + 7$
 $a+b : m$ $50 - 6 \cdot 7 = 8$ $a^2 - b^2 = 49 - 49 = 0$

$a^2 - 6ab + b^2 : m \Rightarrow 8ab : m$ $a - b = 2 - 7x$

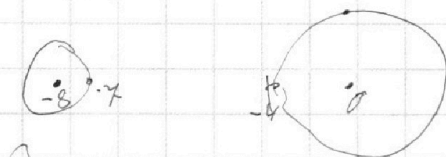
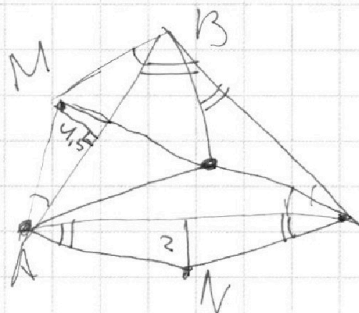
$8 + 28 + 49 = 8 + 7 \cdot 7$ $8b^2 : m$ $m : p$ $a + b = 1$
 $8a^2 : m$

$-0,5 \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{2} \quad 0,5$ $b : p \Rightarrow 8 : p$ $8 - 76 = -68$
 $p = 2$

$2x^2 - 5x + 3$ $2x^2 + 2x + 1$

$(2x - 3)(x - 1) = 2x^2 - 5x + 3$

$2x \quad 1 \quad 0 : 0$
 $1 \quad 1 \quad -6 : 12$
 $\frac{3}{2} \quad 1 \quad -12 + 12 : 0$
 $a = 1$
 $b = 0$



$\frac{AB}{2 \sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{NC}{\sin \alpha}$

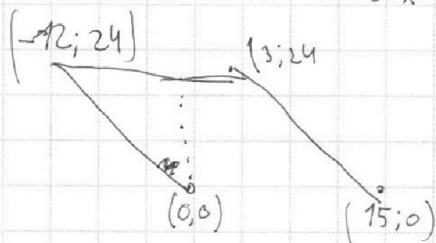
$\sin \alpha = \frac{2}{NC}$ $\frac{AC}{2 \cos \beta} = \frac{2}{\sin \alpha}$

$\frac{AB}{2 \cos \beta} = \frac{2,5}{\sin \beta}$

$(x - 2,5)^2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$

$\frac{9}{4} + 3 + 1 = \frac{13}{4}$

$\sqrt{5}$





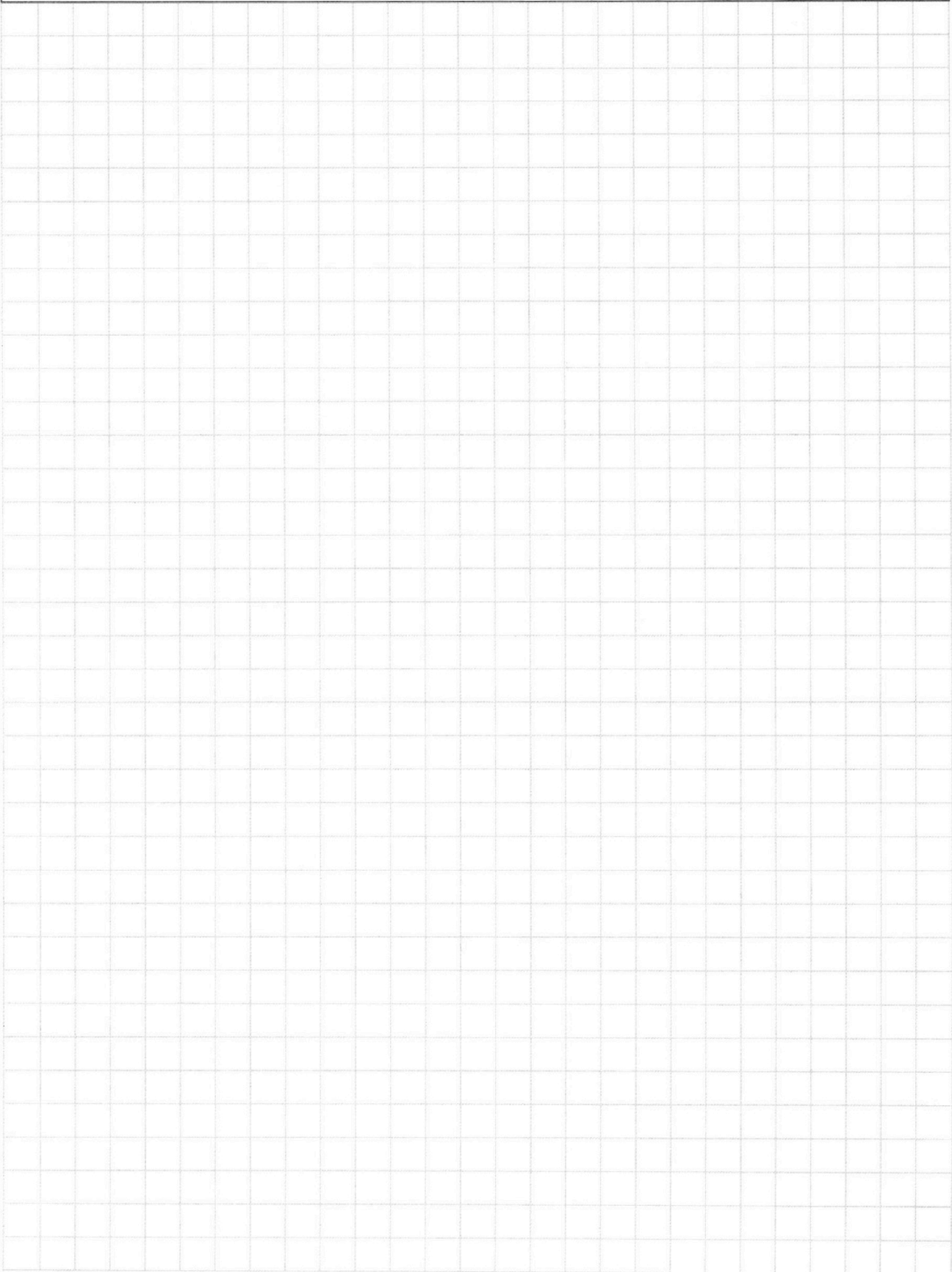
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





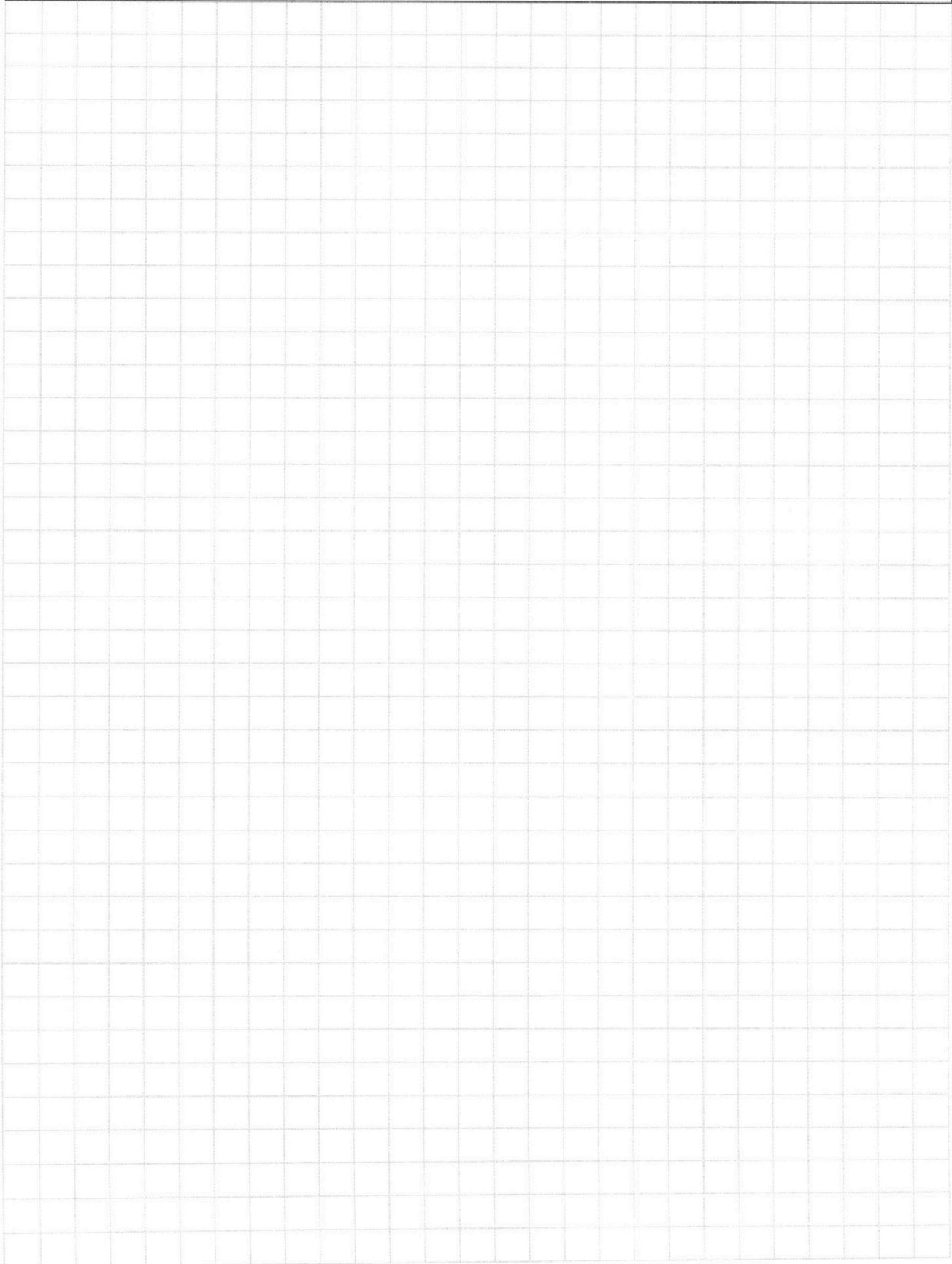
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

