



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть $ab = 2^{15} \cdot 7^6 x$, $bc = 2^{17} \cdot 7^{18} y$, $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} z$ ($x, y, z \in \mathbb{N}$)

$$\text{Тогда } abc = \sqrt{(abc)^2} = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \sqrt{2^{15} \cdot 7^6 x \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} y \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} z} = \\ = \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68} xyz} = 2^{27.5} \cdot 7^{34} \sqrt{2xyz} \in \mathbb{N}.$$

Наименьшим значением $\sqrt{2xyz}$ будет явиться 2
($m. n. \sqrt{2} > 1$). Значит, $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{34}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Пусть $a+b = mk$. Тогда:

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{mk}{a^2+2ab+b^2-9ab} = \frac{mk}{m^2k^2-9ab} = \frac{mk}{m(mk^2-\frac{9ab}{m})}$$

Допустим, что $m=9x$, где x — делитель a (при этом из несократимости $\frac{a}{b}$ следует, что $b \nmid x$). ~~Тогда~~

* Выразим $a=xy$. Тогда $a+b = xy+b = \frac{y^m}{g} + b = mk$. Отсюда следует, что $b:m$ (иначе сумма не была бы целым m).

Но тогда a и b имеют общий делитель — m , что невозможно по условию.

Если же $m=9\alpha\beta$, где α — делитель a , а β — делитель b ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}, \alpha \neq \beta$), то $a+b = \frac{pm}{g\beta} + \frac{qm}{g\alpha}$, т.е. невозможно по условию приведено.

Аналогично будет с делителем b .

Значит единственным вариантом $m=9$.

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$1) a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}, a \geq 0; b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, b \geq 0$$

$$a^2 - b^2 = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = -9x + 1$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$2) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \neq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$(a-b)(a+b-1) < 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$2) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\frac{1}{9} u 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} u \frac{8}{9}$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 +$$

$$+ 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1$$

$$\sqrt{3} u \frac{8}{3}$$

$$3 u \frac{64}{9}$$

$$6x^2 - 3x + 2 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1$$

$$29 < 69 \Rightarrow \frac{1}{9} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ единица по ОДЗ}$$

$$\begin{cases} 4(9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2) = \\ -6x^2 + 3x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 8 = (6x^2 - 3x + 2)(6x^2 - 3x + 2) \\ 6x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 8 = 36x^4 - 18x^5 + 12x^2 - 18x^3 + 9x^2 - 6x + 6x^2 - 6x + 4 \\ 6x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 33x^2 + 36x^2 - 12x + 4 = 0 \\ 6x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 69x^2 - 12x - 4 = 0, D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 144 + 16 \cdot 69 = 1148 = \\ 6x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$= 4 \cdot 7 \cdot 41$$

$$\begin{cases} x \in \emptyset \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases}; x \in \emptyset$$

$$\begin{cases} 6x^2 - 3x + 2 = 0 \\ D = 9 - 48 < 0 \Rightarrow 6x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \forall x //$$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{9} \right\}$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 24 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 > 0 \forall x //$$

$$x \in (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup$$

$$\cup [1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$$

$$1) 289 < 300 < 324$$

$$17 < 10\sqrt{3} < 18$$

$$1,8 < \sqrt{3} < 1,8$$

$$\frac{17}{30} < \frac{\sqrt{3}}{3} < 0,6$$

$$\frac{47}{30} < \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 < 1,6$$

$$-0,6 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < -\frac{17}{30}$$

$$-0,4 < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{13}{30} //$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

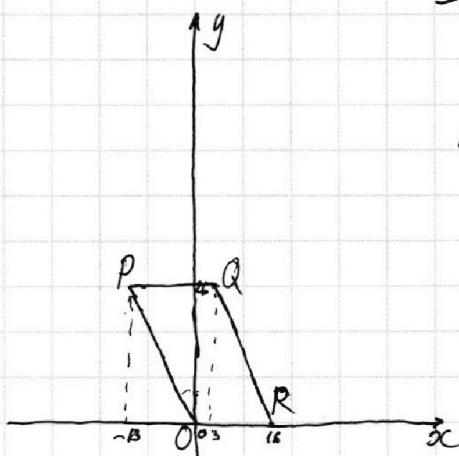
Найдём уравнение прямых, содержащих стороны параллелограмма:

$$y = kx + b$$

$$\text{PO: } \begin{cases} 0 = 0 \cdot k + b \\ 26 = -13k + b \end{cases} \begin{cases} b = 0 \\ k = -2 \end{cases} \Rightarrow y = -2x$$

$$\text{PQ: } \begin{cases} 26 = -13k + b \\ 26 = 3k + b \end{cases} \begin{cases} b = 26 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 26$$

$$\text{QR: } \begin{cases} 26 = 3k + b \\ 0 = 16k + b \end{cases} \begin{cases} -13k = 26 \\ b = -16k \end{cases} \begin{cases} k = -2 \\ b = 32 \end{cases} \Rightarrow y = -2x + 32$$



$$\text{OR: } \begin{cases} 0 = ok + b \\ 0 = 16k + b \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

Так как точки должны лежать внутри n-тина (линейная унимы), для координат каждой из них должны выполняться неравенства!

$$\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq 26 \\ y \leq -2x + 32 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \in [0; 26] \\ -2x \leq y \leq -2x + 32 \\ 2x \leq 32 - y \\ 2x \geq y \end{cases} \quad \begin{cases} y \in [0; 26] \\ x \leq 16 - \frac{y}{2} \\ y \geq -\frac{y}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y \in [0; 26] \\ x \in [\frac{y}{2}; 16 - \frac{y}{2}] \end{cases}$$

П.к. $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$ по условию: $y \in \{0; 1; \dots; 26\}$ (27 значений)
 $x \in \{\lceil -\frac{y}{2} \rceil; \lceil -\frac{y}{2} \rceil + 1; \dots; \lceil -\frac{y}{2} \rceil + 16\}$ (16 значений)

Рассмотрим равенство из условия:

$$2x_1 - 2x_2 + y_2 - y_1 = 14$$

При y_1 — нечётное, $2x_1 \in \{-\frac{y_1+1}{2}; \dots; -\frac{y_1+1}{2} + 16\}$, а
при y_1 — чётное $2x_1 \in \{-\frac{y_1}{2}; \dots; -\frac{y_1}{2} + 16\}$. Аналогично с x_2 и y_2 .
Рассмотрим различные случаи чётности y_1 и y_2 .

I y_1 — чётное и y_2 — чётное: $2x_1 = -y_1 + a$, $2x_2 = -y_2 + b$, где $a, b \in \{0; 1; \dots; 16\}$
 $-y_2 + y_1 + b - a + y_2 - y_1 = 14$

$$b - a = 14$$

$$\begin{cases} b = 14 + a \\ b, a \in \{0; 1; \dots; 16\} \end{cases} \Rightarrow 3 \text{ варианта } (a \in \{0; 1; 2\}) \text{ где } x_1 \neq x_2$$

~~всего 48 вариантов на y_1 и y_2~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

II y_1 -неч., y_2 -чел.: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -y_1 + 1 + a, \\ x_2 = -y_2 + b \end{cases}$ (а и б сейчас
и далее аналогично
 $-y_2 + b + y_1 + 1 + a + y_2 = 14$

$b = 15 + a \Rightarrow 2$ варианта ($a \in \{0, 1\}$) на x_1 и x_2 и
 $13 \cdot 14$ ~~вариантов~~ вариантов на y_1 и y_2

III y_1 -неч., y_2 -неч.: $2x_1 = -y_1 + 1 + a, 2x_2 = -y_2 + 1 + b$

$-y_2 + b + 1 + y_1 - a + 1 = y_1 + y_2 = 14$

$b = 14 + a \Rightarrow 3$ варианта ($a \in \{0, 1, 2\}$) на x_1 и x_2 и
~~75~~³ вариантов на y_1 и y_2

Случай для y_1 -чел и y_2 -неч. не рассмотрен, поскольку является сл. II (тогда
Суммарно $(3+2+3) \cdot 27^2 - 8 \cdot 27^2 = 3 \cdot 14^2 + 2 \cdot 13 \cdot 14 + 3 \cdot 13^2 =$ ~~меньшее значение~~
 $= 3 \cdot 196 + 2 \cdot 182 + 3 \cdot 169 = 588 + 364 + 508 = 1459$ *решение: 1459*

решение: 1459

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

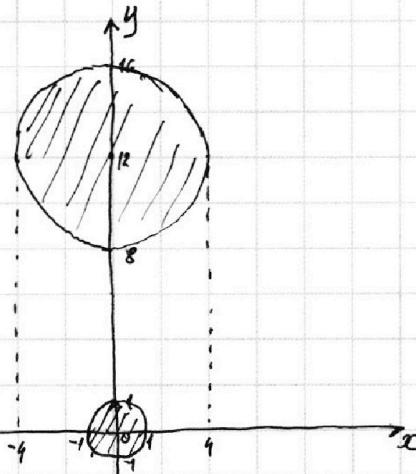
МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

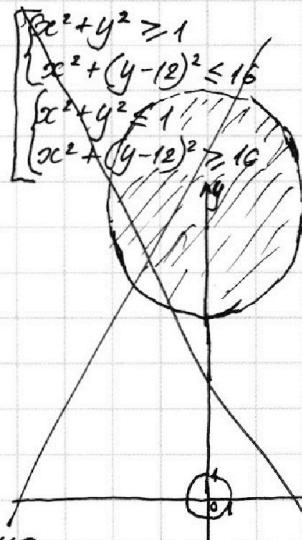
Задача 6

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$



Рассмотрим неравенство (1):

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \leq 16 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

Из совокупности систем видно, что решениями неравенства (1) будут являться внутренние области окружностей (вместе с краями).

$y = -ax + 8b$ — прямая. Поэтому, чтобы решения было только 2, прямая должна касаться окружностей (крайней обеих), но не пересекать их (иначе решений будет бесконечно много).

Обозначим точки касания координатами (x_a, y_a) и (x_b, y_b) .

Тогда, т.к. точки будут лежать на окружностях, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} x_a^2 + y_a^2 = 1 \\ x_b^2 + (y_b - 12)^2 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x_a^2 = 1 - y_a^2 \\ x_b^2 = 16 - (y_b - 12)^2 \end{cases}$$

Т.к. точки должны лежать на одной прямой, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} y_a = -ax_a + 8b \\ y_b = -ax_b + 8b \end{cases} \quad \begin{cases} y_a - 8b = -ax_a \\ y_b - 8b = -ax_b \end{cases} \quad \begin{cases} y_a^2 - 16by_a + 64b^2 = a^2x_a^2 \\ y_b^2 - 16by_b + 64b^2 = a^2x_b^2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y_a^2 - 16by_a + 64b^2 = a^2 - a^2y_a^2 \\ y_b^2 - 16by_b + 64b^2 = 16a^2 - a^2(y_b - 12)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_a^2(a^2+1) - 16by_a + 64b^2 = 0 \\ y_b^2(a^2+1) - 16by_b + 64b^2 = 16a^2 + 24a^2y_b - 144a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_a^2(a^2+1) - 16by_a + 64b^2 = 0, D = 256b^2 - 4 \cdot 64b^2(a^2+1) \geq 0 \\ y_b^2(a^2+1) - y_b(16b+24a^2) + 64b^2 + 128a^2 = 0, D = (16b+24a^2)^2 - 4(a^2+1) \cdot 64(b^2+2a^2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 - b^2a^2 \geq 0 \\ 256(b+1) \geq 0 \\ (16b+24a^2)^2 - 256(a^2+1)(b^2+2a^2) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2(1-a^2) \geq 0 \quad b^2a^2 \leq 0 \\ 64(2b+3a^2)^2 - 64 \cdot 4(a^2+1)(b^2+2a^2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 - b^2a^2 \leq 0, \text{ но } b^2a^2 \geq 0 \quad \forall a \neq b \\ (2b+3a^2)^2 - 64(a^2+1)(b^2+2a^2) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ (2b+3a^2)^2 - 4(a^2+1)(b^2+2a^2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b=0 \\ 4b^2 - 4b^2 \geq 0 \\ b=0 \\ 9a^4 - 4(a^2+1) \cdot 2a^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b-\text{любое число} \\ b=0 \\ 9a^4 - 8a^4 - 8a^2 \geq 0 \\ a^2(a^2-8) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b \in (-\infty; +\infty) \\ b=0 \\ a \in (-\infty; -2\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [2\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} ; \quad a \in (-\infty; -2\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$$

$\frac{+}{-} \frac{-}{-2\sqrt{2}} \frac{!}{0} \frac{-}{2\sqrt{2}} \frac{+}{+}$

Anleit: $a \in (-\infty; -2\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

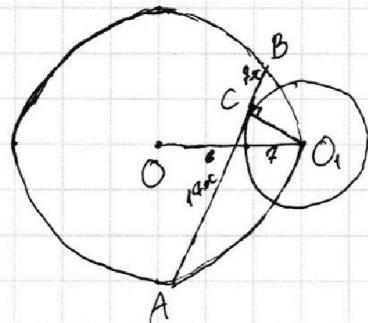
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

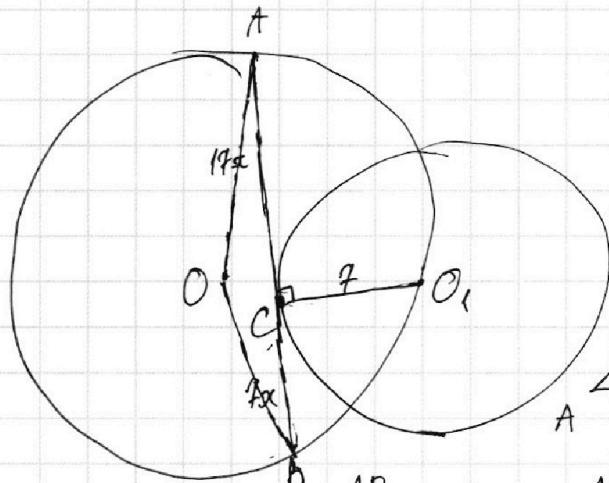
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

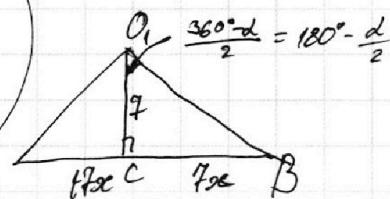
МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$OA = OB = 13 \quad \angle AOB = \alpha$$



$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - \frac{\alpha}{2})} = 2 \cdot 13 = 26 \quad AB^2 = 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cos \alpha = 2 \cdot 169(1 - \cos \alpha)$$

$$\frac{AB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 26$$

$$\frac{AB^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 26^2$$

$$AB = 13\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$$

$$\frac{AB^2}{2 \cdot 169} = 1 - \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{AB^2}{2 \cdot 169}$$

$$\frac{AB^2}{2 \cdot 169} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

~~$$\frac{3}{24} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{3 - 18 + 54}{24}$$~~

~~$$\frac{13}{9}$$~~

~~$$\frac{54}{39} - \frac{18}{39} = \frac{36}{39}$$~~

~~$$\frac{18}{39} - \frac{18}{39} = 0$$~~

~~$$\frac{1}{24} + \frac{1}{3} + 1 = 1 + 9 + 27$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\Delta_1 \in \{-26; -25; \dots; -2\} \quad \Delta_2 \in \{-16; -12; 16\}$$

$$\Delta_3 \in \{53; \dots; -15\}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 7^{18}$$

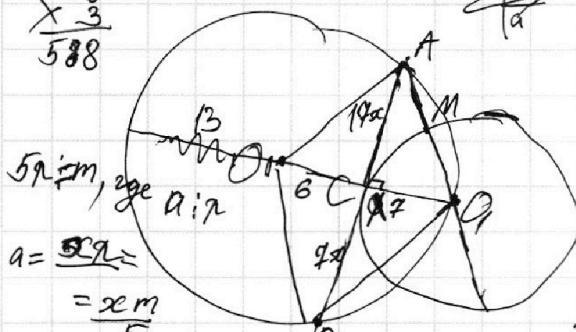
$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{58} \cdot 7^{29} \cdot k$$

$$\frac{a}{b} \text{ - не симп.}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{b(\frac{a}{b} + 1)}{a^2 - 9ab + b^2}$$

$$\frac{196}{588}$$



$$a = \frac{52}{5} \approx$$

$$= 10 \text{ см}$$

$$\frac{24}{28} \times \frac{169}{507}$$

$$\frac{14 \cdot 14}{5} + b = mk$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 90c$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = a, a \geq 0$$

$$\frac{m}{5}k + b = mk$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$\boxed{a = b} \quad ①$$

$$\boxed{a + b - 1 = 0} \quad ②$$

$$\cancel{13+0} \quad (26 - 0x) \cdot OX_i =$$

$$\cancel{22} \quad BX \cdot XA$$

$$a + b = mk$$

$$\frac{mk}{mk^2 - 5ab}$$

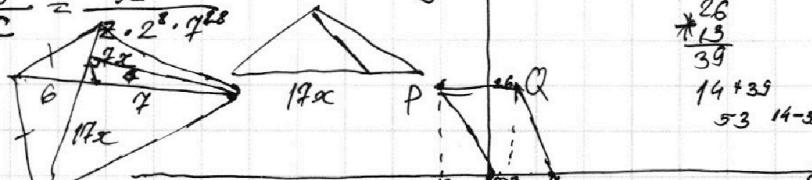
$$\Delta_1 \in \{-26; -25; \dots; -2\} \quad \Delta_2 \in \{-16; -12; 16\}$$

$$\Delta_3 \in \{53; \dots; -15\}$$

$$\Rightarrow ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k, bc = 2^{14} \cdot 7^{18} \cdot y, ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z$$

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{y \cdot 2^2 \cdot 7^2} \quad \frac{a}{b} = \frac{2^6 \cdot 7^2}{y} \quad ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z$$

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{y \cdot 2^2 \cdot 7^2}$$



$$\frac{26}{13} \cdot \frac{13}{39} = 14 + 39 \\ 53 \quad 14 - 39$$

$$OQ^2 = 49 + CX^2$$

$$(7x + CX)(17x - CX) = 26 - OQ^2$$

$$(17x)^2 = AM(AM + 14)$$

$$(17x)^2 + 49 = (AM + 7)^2$$

$$49 = AM^2 + 14AM - AM^2 - 14AM$$

$$49 + XC^2 = (7 + x)^2$$

$$7x \cdot 17x = 19 \cdot 7 \quad \therefore XC^2$$

$$x^2 = \frac{19}{17} \quad \frac{19}{17} \cdot \frac{49}{507} = \frac{19}{507}$$

$$AB = 24 \sqrt{\frac{19}{17}} \quad (7x + XC)(17x - XC) =$$

$$-223P \cancel{= 1} = (19 - x^2)(7 + x)$$

$$OD3! \quad \frac{182}{364}$$

$$\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{169}{2704}$$

$$+\frac{52}{52} \cdot \frac{52}{52} = \frac{2704}{2704}$$

$$\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{169}{2704}$$

$$-\frac{588}{507} \cdot \frac{588}{507} = \frac{34656}{2704}$$

$$+\frac{364}{507} \cdot \frac{364}{507} = \frac{132496}{2704}$$

$$+\frac{507}{507} \cdot \frac{507}{507} = \frac{257649}{2704}$$

$$-\frac{1459}{1459} \cdot \frac{1459}{1459} = \frac{2113281}{2704}$$

$$+\frac{1459}{1459} \cdot \frac{1459}{1459} = \frac{2113281}{2704}$$

$$-\frac{1459}{1459} \cdot \frac{1459}{1459} = \frac{2113281}{2704}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$PO: \begin{cases} 26 = -13k + b \\ 0 = 0 + b \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ k = -2 \end{cases} \Rightarrow PO - y = -2x$$

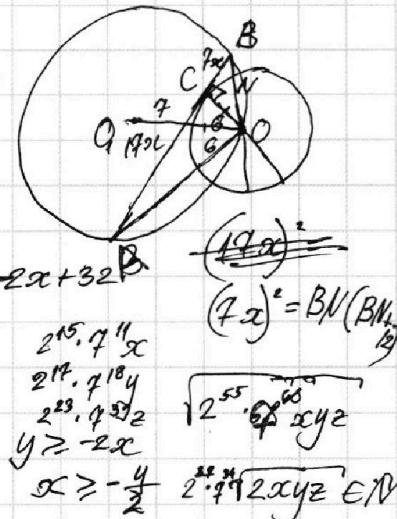
$$PQ: \begin{cases} 26 = -13k + b \\ 26 = 3k + b \end{cases} \quad \begin{cases} k = 0 \\ b = 26 \end{cases} \Rightarrow PQ - y = 26$$

$$QR: \begin{cases} 26 = 3k + b \\ 0 = 16k + b \end{cases} \quad \begin{cases} -13k = 26 \\ b = -16k \end{cases} \quad \begin{cases} k = -2 \\ b = 32 \end{cases} \Rightarrow QR - y = -2x + 32$$

$$OR: \begin{cases} 0 = 0k + b \\ 0 = 16k + b \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow OR - y = 0$$

$$\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq 26 \\ y \leq -2x + 32 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \in [0; 26] \\ y \in [-2x; -2x + 32] \end{cases}$$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(5x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$a \leq 0$$

$$b \geq 0$$

$$a > 0$$

$$b \leq 0$$

$$y = -ax + b$$

$$A, B - \text{м. вис.}$$

$$x_a^2 + y_a^2 = 1$$

$$x_b^2 + (y_b - 12)^2 = 16$$

$$\exists 27^2 \text{ нап. } (x_i, y_i)$$

$$27^2 \cdot 16^2$$

$$2 \text{ реш.}$$

$$2 \quad \frac{-y_1}{2} + ax + \frac{y_1}{2} - b$$

$$\frac{(y_2 - y_1)}{2} + (x - b) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$1,5(y_2 - y_1) + x - b = 14$$

$$\begin{aligned} y_a^2 &= a^2 x_a^2 - 16ab x_a + 64b^2 \\ y_b^2 &= a^2 x_b^2 - 16ab x_b + 64b^2 \end{aligned}$$

~~$$y_a = \sqrt{1 - x_a^2}$$~~

~~$$y_a^2 = 1 - x_a^2$$~~

$$\frac{13}{30} \text{ и } \frac{1}{3}$$

$$\frac{13}{10} \text{ и } \frac{1}{3}$$

$$\frac{13}{30} \text{ и } \frac{1}{3}$$

$$\frac{24}{33}$$

$$\begin{aligned} 144 + 16 \cdot 69 &= \\ = 144 + 1004 &= \\ = 1148 & \end{aligned}$$

$$\Delta_1 \in \{-26, -24, \dots, 26\}$$

$$1,5 \Delta_1 + \Delta_2 = 14$$

$$\Delta_2 \in \{-24, -22, \dots, 24\}$$

$$\frac{576}{1004}$$

$$\frac{69}{1004}$$

I-