



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\exists ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot q$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p$$

$$(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60} \cdot krpq$$

$(abc)^2$ — во 2-ой степени, т.е. каждый множитель должен
встречаться четное число раз $\Rightarrow (krpq)$ среди своих простых
множителей встречает хотя бы одну тройку и одну пятёрку.

Заметим, что

$$\bullet ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{20} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{60} \Rightarrow$$

$(krpq)$ содержит хотя бы 5^7

$$\text{т.о. } krpq \geq 3 \cdot 5^7 \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60} \Rightarrow$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\exists a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

Легко убедиться, что

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow \text{наим. значение достигается.}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐

2 ☒

3 ☐

4 ☐

5 ☐

6 ☐

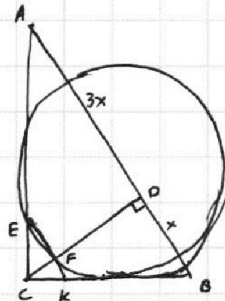
7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Задача 2.



$$\bullet \triangle ACD \sim \triangle CDB \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow$$

$$CD^2 = AD \cdot DB, \text{ где } DB = x \Rightarrow$$

$$CD^2 = 3x \cdot x \Rightarrow CD = \sqrt{3}x$$

$$\bullet \angle (EF) \cap BC = K$$

$$\triangle CEK \sim \triangle CAB, \text{ CF - высота } \triangle CEK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{FK} = \frac{AD}{DB} = 3 \quad \angle FK = y \Rightarrow EF = 3y \Rightarrow CF = \sqrt{3}y.$$

$$\bullet \text{ по т. об } \angle \text{ касательной и секущей } KB^2 = KF \cdot KE \Rightarrow$$

$$KB^2 = y \cdot 4y \Rightarrow BK = 2y$$

$$\bullet CK = \sqrt{CF^2 + FK^2} = \sqrt{3y^2 + y^2} = 2y \text{ (по т. Пифагора)} \Rightarrow$$

$$CB = 4y$$

$$\bullet \text{ с другой стороны } CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x^* \Rightarrow$$

$$4y = 2x \Rightarrow x = 2y$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}y \cdot 3y = \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}x \cdot 4x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2} = \frac{16}{3} = 5 \frac{1}{3}$$

Ответ: $5 \frac{1}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 - 1 - x^2 = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{2} \geq 0$$

$$25(1 - x^2) = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$$

$$26x^2 + \pi x + \left(\frac{\pi^2}{4} - 25\right) = 0$$

$$D = \pi^2 - 26\pi^2 + \frac{13 \cdot 25}{2} = \frac{13 \cdot 25 - 25\pi^2}{2} = 25(6,5 - \pi)$$

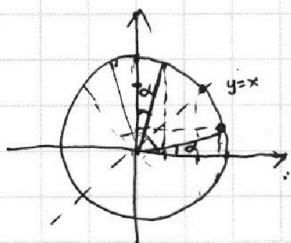
$$x = \frac{-\pi \pm 5\sqrt{6,5 - \pi}}{52}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

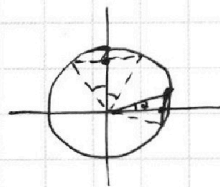
$$\sin x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{6x}{5} = \frac{4\pi}{10} \\ x - \frac{x}{5} = \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{4x}{5} = \frac{6\pi}{10} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Проверка:



$$\square x = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} \\ 5 \cdot \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow k=0 - \text{решается}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\square x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{4} \\ 5 \cdot \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \quad ?!$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a - ? : \exists b :$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x^2 - 6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

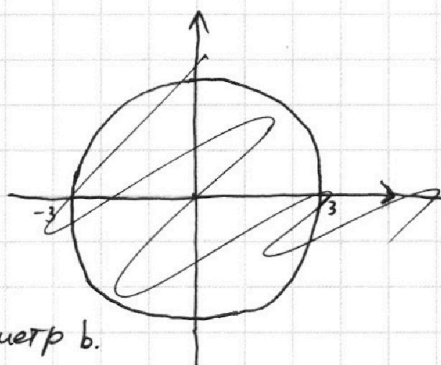
$$\text{ц. } (0; 0); R = 3$$

$$\text{ц. } (6; 0); R = 2$$

- ур-ия окружн.

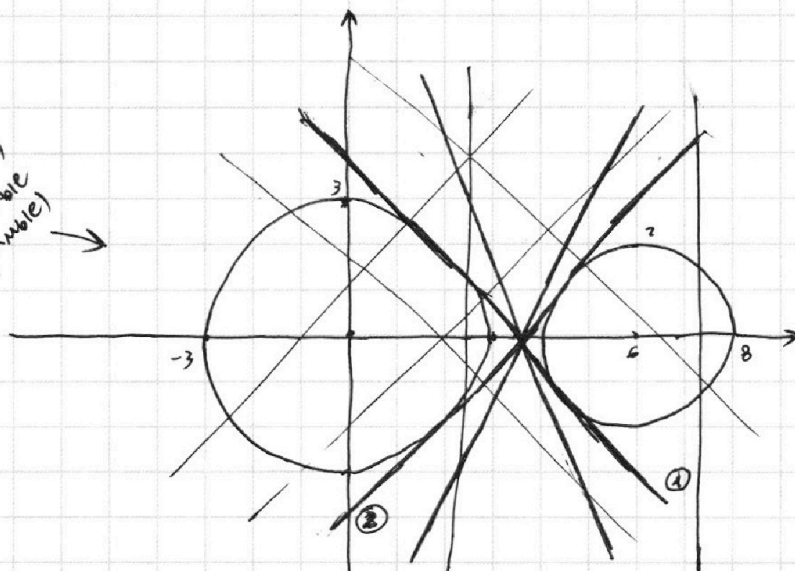
$$(1) y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b -$$

Прямая, за угол наклона отвечает параметр a , за смещение — параметр b .



Будем смотреть на возможные расп. прямых на плоскости и искать при каких a найдется такое b , чтобы прямая пересекала окружность ровно 4 раза

(это не зачеркнуто, это проведенные прямые)



Заметим, что все прямые проходящие через точку пересечения внутренних общ. касательных к окр. не могут пересечь окр. более чем в 2-х точках при $\forall b$. Остальные прямые могут.

См. далее.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\rho(O_1; L) = 3 \quad \rho(O_2; L) = 2$$

$$\text{т.е. } L: y = kx + c$$

$$\begin{cases} \frac{|c|}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \\ \frac{|6k+c|}{\sqrt{1+k^2}} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{c}{6k+c} \right| = \frac{3}{2}$$

$$\frac{6k+c}{c} = \pm \frac{2}{3}$$

$$\frac{6k}{c} + 1 = \pm \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{6k}{c} = -\frac{1}{3} \\ \frac{6k}{c} = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6k = -\frac{c}{3} \\ 6k = -\frac{5c}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -18k \\ c = -\frac{18}{5}k \end{cases}$$

$$\bullet \frac{+8k}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \Rightarrow \frac{6k}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \Rightarrow \frac{36k^2}{1+k^2} = 1 \Rightarrow$$

т.е.

$$\frac{1+k^2}{36k^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{36k^2} + \frac{1}{36} = 1$$

$$\frac{1}{36k^2} = \frac{35}{36} \Rightarrow$$

$$\bullet \frac{\frac{18}{5}k}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \Rightarrow \frac{6k}{\sqrt{1+k^2}} = 5 \Rightarrow$$

$$k^2 = \frac{1}{35} \Rightarrow k = \pm \sqrt{\frac{1}{35}}$$

$$= \frac{36k^2}{\sqrt{1+k^2}} = 25 \Rightarrow \frac{1+k^2}{36k^2} = \frac{1}{25} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{36k^2} + \frac{1}{36} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{36k^2} = \frac{36-25}{36 \cdot 25} \Rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{11}{25} \Rightarrow k = \pm 5 \sqrt{\frac{1}{11}}$$

у внутр. кас. $|k|$ больше, т.к. тангенс угла наклона

больше $\Rightarrow$ нас интересуют $k = \pm 5 \sqrt{\frac{1}{11}}$, т.е. нам не

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} > -5\sqrt{\frac{1}{11}} \\ -\frac{a}{2} < 5\sqrt{\frac{1}{11}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}} \\ -\frac{a}{2} < -\frac{5}{\sqrt{11}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < \frac{10}{\sqrt{11}} \\ a > \frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

нам не подойдут такие

нас интересуют $\Rightarrow$ ответ: $(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☐

5 ☒

6 ☐

7 ☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\log_3 x = A$$

$$\log_3 5y = B$$

$$\begin{cases} A^4 + \frac{12}{2A} = \frac{5}{2A} - 8 \\ B^4 + \frac{4}{2B} = \frac{4}{2B} - 8 \end{cases} \quad | \times 2$$

$$A^4 + B^4 + 7A + 7B = 0$$

$$\begin{cases} A^5 + 7 + 7A = 0 \\ B^5 - 7 + 7B = 0 \end{cases} \quad | +$$

$$A^5 + B^5 + 7(A+B) = 0$$

$$(A+B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 + 7) = 0$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 = -7 \end{cases} \quad | : B^4 \quad \Rightarrow t = \frac{A}{B}$$

$$t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = -\frac{7}{B^4}$$

$$\times \left(t^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t + 1 \right) \left(t^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t + 1 \right) =$$

$$= t^4 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t^3 + t^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t^3 + \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1)}{4}t^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t +$$

$$+ t^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t + 1 = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = -\frac{7}{B^4}$$

$$\times \left(t^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)t + 1 \right)$$

$$D = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{6+2\sqrt{5}-16}{4} = \frac{-10+2\sqrt{5}}{4} < 0 \Rightarrow t^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)t + 1 > 0$$

$$\times \left(t^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)t + 1 \right)$$

$$D = \frac{1+5-2\sqrt{5}-16}{4} = \frac{-10-2\sqrt{5}}{4} < 0 \Rightarrow \left(t^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)t + 1 \right) > 0$$

$$-\frac{7}{B^4} < 0, \text{ а } t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 > 0 \Rightarrow \text{решений нет} \Rightarrow$$

$$\boxed{A+B=0} \Rightarrow \log_3 x + \log_3 5y = 0 \Rightarrow \log_3 x \cdot 5y = 0 \Rightarrow x \cdot 5y = 1 \Rightarrow xy = \left(\frac{1}{5} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

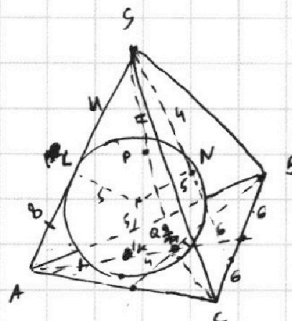
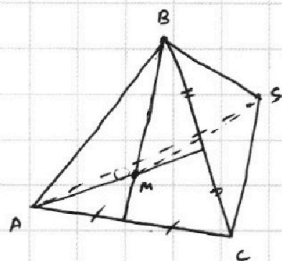
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

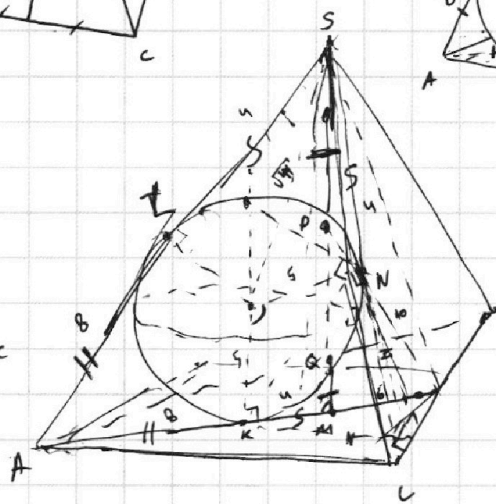
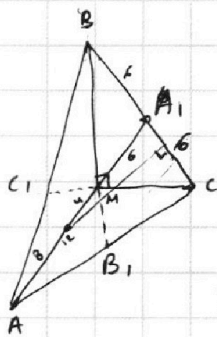
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7.



$$S_{ABC} = 90$$



$$KM^2 = QM \cdot MP = SP \cdot PQ =$$

$$= SL^2 \Rightarrow$$

$$KM = SL \Rightarrow$$

$$AM = AS = 12 \Rightarrow$$

$$AA_1 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18 \Rightarrow$$

$$MA = 6 \Rightarrow \triangle CMB - \text{прямоуг.}$$

$$CC_1 \perp BB_1 = CC_1 \perp (BMC)$$

$$CC_1 \perp BM = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow CC_1 \perp BM = 90 \Rightarrow (CC_1 \perp MC, CC_1 \perp BM) = 90$$

$$BB_1 \perp CM = S_{ABC} \Rightarrow BB_1 \perp CM = 90 \Rightarrow$$

$$C_1C \cdot B_1B = CM \cdot BM = 90^2 \Rightarrow$$

$$C_1C \cdot B_1B = 90^2 \Rightarrow$$

$$C_1C \cdot B_1B \cdot \frac{2}{3} C_1C \cdot \frac{2}{3} B_1B = 90^2 \Rightarrow$$

а) Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 135 = 2430$

б)

$$\begin{array}{r} \times 135 \\ 18 \\ \hline 1080 \\ 1350 \\ \hline 2430 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

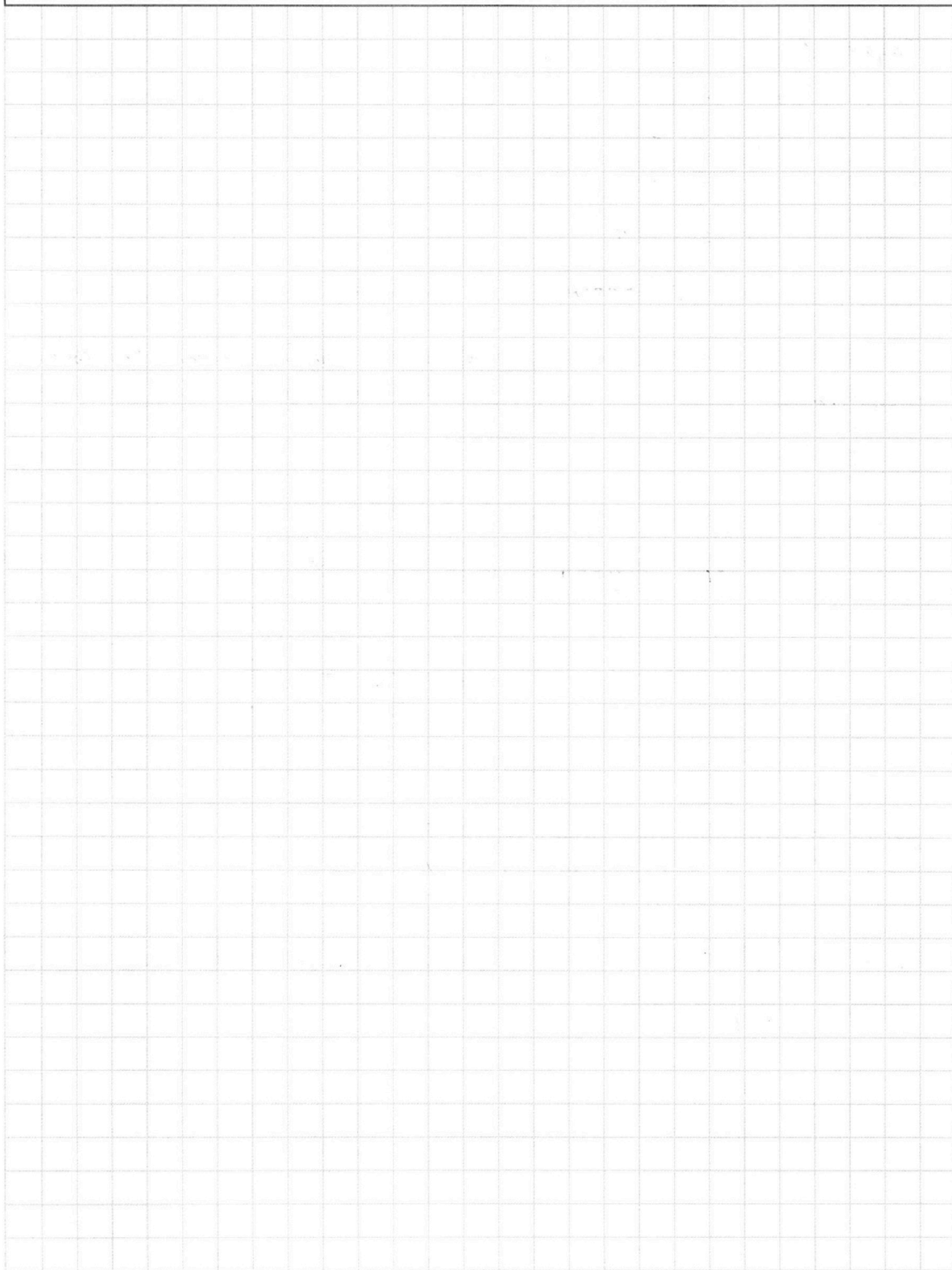
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





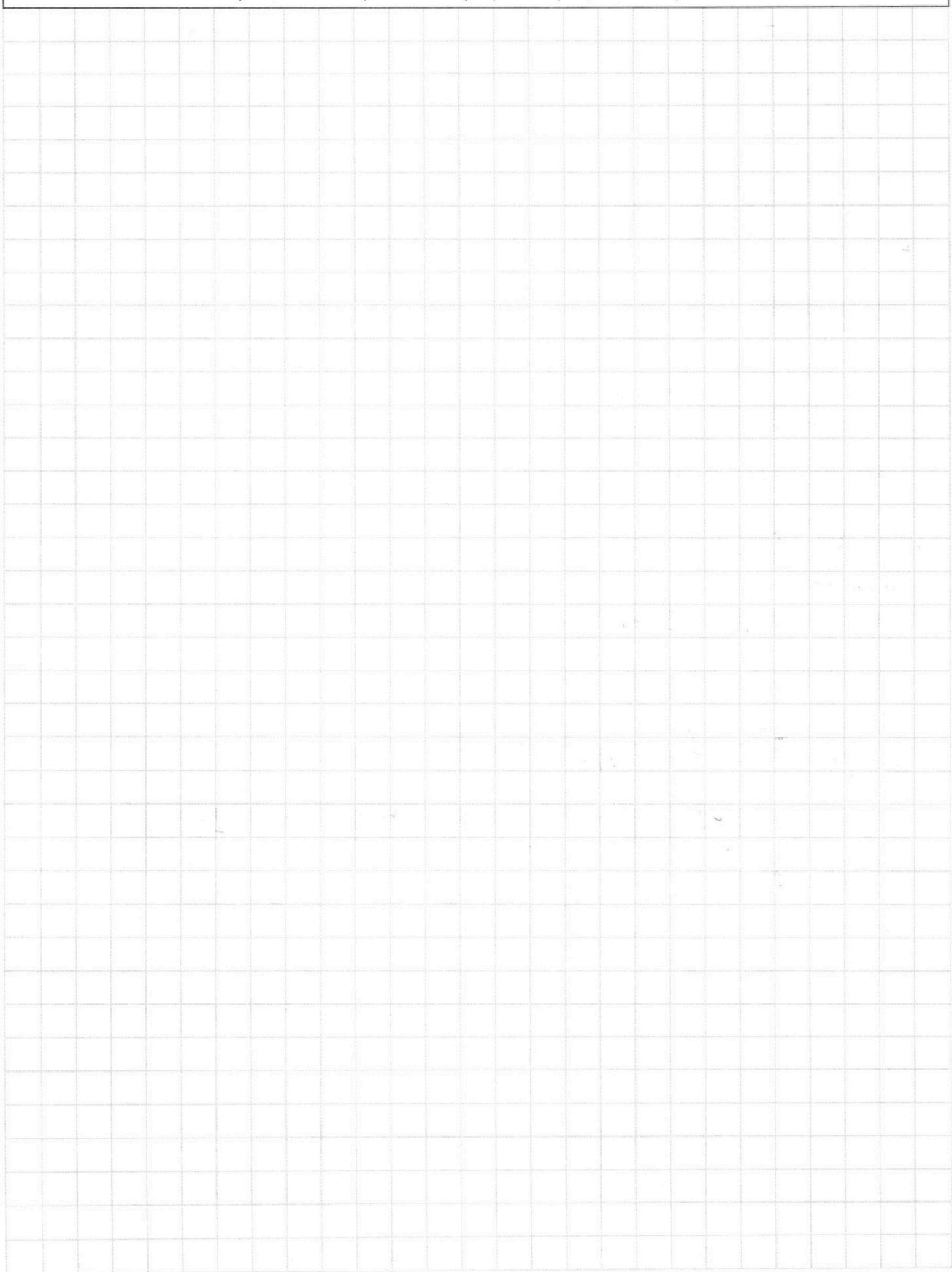
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



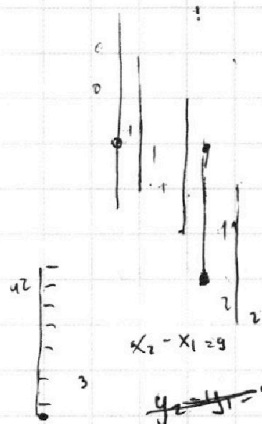
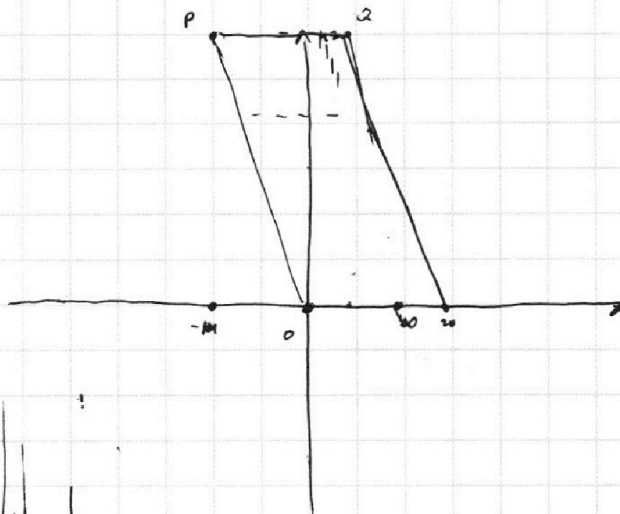
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_2 - x_1 \leq 20$$

$$-20 \leq x_2 - x_1 \leq 20$$

$$-42 \leq (y_2 - y_1) \leq 42$$

$$33 + 3 \cdot 20 \leq (33 - 3(x_2 - x_1)) \leq 33 + 3 \cdot 20 = 93$$

11
-27

$$\text{т.е. } -27 \leq (y_2 - y_1) \leq 42$$

способ выбрать y так, чтобы

$$(y_2 \geq y_1) \text{ и } (y_2 - y_1) : 3 : 3 \cdot 15 \cdot 8$$

$$y_2 < y_1 \text{ и } (y_2 - y_1) : 3 : 21 \cdot 41 - 8 \cdot 15$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$(y_2 - y_1) : 3$$

$$y_2 \in [0; 42]$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 \rightarrow 0; 3; \dots; 42$$

$$y_1 = 1$$

$$15 \cdot 3 + 14 \cdot 3 + \dots + 0 \cdot 3$$

$$3(1 + \dots + 15) = 3 \cdot 15 \cdot 8$$

способ выбрать y так, чтобы

$$y_1 = 42$$

$$y_2 = 15 \quad 16 \dots 40 \quad 41$$

$$3 \cdot \frac{42 \cdot 41}{2} - \frac{15 \cdot 16}{2}$$

$$21 \cdot 41 - 8 \cdot 15$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + \log_3^4 5y + 6 \log_3 x + 2 \log_{5y} 3 = \frac{5}{2} \log_3 x + \frac{11}{2} \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x + \log_{25y^2} 3 - 8 = \log_{x^2 243} 3 - 8 + \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x + \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = \frac{5}{2} \log_3 x + \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_3 x + 3,5 \log_{5y} 3 = \log_3^4 5y$$

$$(\log_3^4 x - \log_3^4 5y) + 3,5 \left(\frac{\log_3 5y + \log_3 x}{\log_3 x \cdot \log_{5y} 3} \right) = 0$$

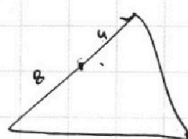
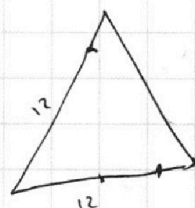
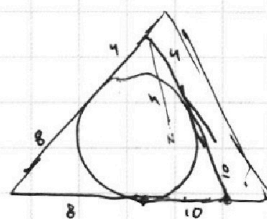
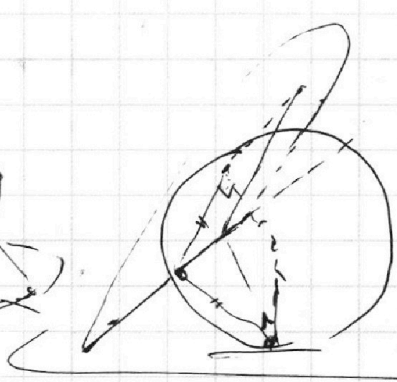
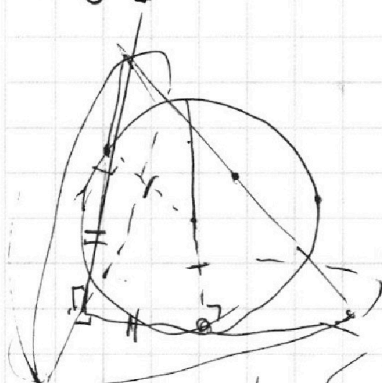
$$(\log_3^2 x - \log_3^2 5y)(\log_3^2 x + \log_3^2 5y) + 3,5 \left(\frac{\log_3 5y + \log_3 x}{\log_3 x \cdot \log_{5y} 3} \right) = 0$$

$$(\log_3 5y + \log_3 x) \left(\log_3^3 x + \log_3^2 5y \cdot \log_3 x - \log_3 5y \cdot \log_3^2 x - \log_3^3 5y + \frac{3,5}{\log_3 x \cdot \log_{5y} 3} \right) = 0$$

$$\log_3(x \cdot 5y) = 0$$

$$\log_3^4 x \cdot \log_{5y} 5y + \log_3^2 x \cdot \log_3^3 5y - \log_3^2 5y \cdot \log_3^3 x - \log_3^4 5y \cdot \log_3 x = 35$$

$$x \cdot 5y = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y^2} (3'') - 8 \end{cases}$$

$xy = ?$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_{x^2} 3 - 8 \\ \log_3^4 5y + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \log_{5y^2} 3 - 8 \end{cases}$$

$$243 = 9 \cdot 27 = 3^5$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{5}{2} \log_x 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3$$

$\log_x$

$$\left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^4 - \left(\frac{1}{\log_{5y} 3}\right)^4 + 3,5 \log_x 3 + 3,5 \log_{5y} 3 = 0$$

$$3,5 \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y} \right) + (\log_3^2 x + \log_3^2 5y)(\log_3 x + \log_3 5y) = 0$$

$$(\log_3 x - \log_3 5y) = 0$$

$$\frac{3,5 \log_3(5xy)}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} + \log_3(5xy) \left((\log_3^2 x + \log_3^2 5y)(\log_3 \frac{x}{5y}) \right) = 0$$

$$\log_3(5xy) \left(\frac{3,5}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} + (\log_3^2 x + \log_3^2 5y)(\log_3 \frac{x}{5y}) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \log_3 x = A \\ \log_3 5y = B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^4 + \frac{12}{2A} = \frac{5}{2A^2} - 8 \\ B^4 + \frac{2}{2B} = \frac{11}{2B^2} - 8 \end{cases}$$

$$A^4 + \frac{7}{2A} + 8 = 0$$

$$B^4 - \frac{7}{2B} + 8 = 0$$

$$\begin{cases} A^5 + 7A + 8A = 0 \\ B^5 - 7 + 8B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^5 + B^5 + 8(A+B) = 0 \\ A^4 - B^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (A+B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4) + 8(A+B) &= 0 \\ \frac{A^4}{B^2} - \frac{A^3}{B} + \frac{A^2}{B^2} - \frac{A}{B} + \frac{B^4}{B^2} &= -\frac{8}{B^2} \\ t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 &= -\frac{8}{t^2} \\ t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 &= -8 \\ t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 + 8 &= 0 \\ t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\begin{cases} a+c=-1 \\ d+a^2+b^2=1 \\ a^2d+cb^2=1 \\ b+d=3 \\ bd=1 \end{cases}$$

$$D = \frac{5+9-6\sqrt{5}}{4} < 0$$

$$\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}$$

$$\frac{(t^2+1)(t^2-t)}{t(t^2+1)(t-1)}$$

$$\begin{cases} t^2+c-1=0 \\ D=1+4=5 \\ c=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ a=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=1+4=5 \\ c=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-c-1 \\ -c^2-c+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+c=-1 \\ ac=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+2 \\ a^2+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+2 \\ a^2+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+2 \\ a^2+2 \end{cases}$$

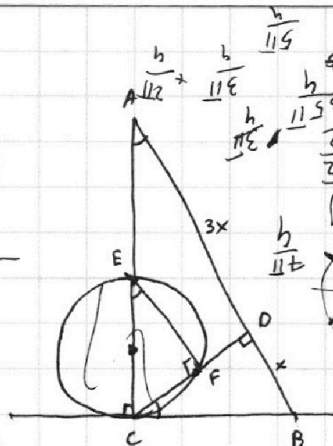
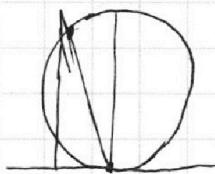
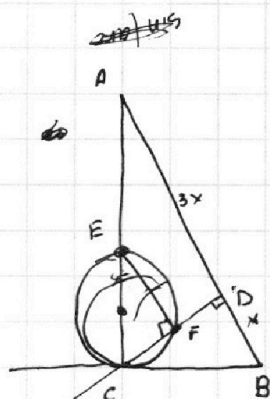
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot 4x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$\frac{CD}{x} = \frac{3x}{CD}$$

$$CD^2 = 3x^2$$

$$CD = \sqrt{3}x$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\arcsin(\cos x)$$

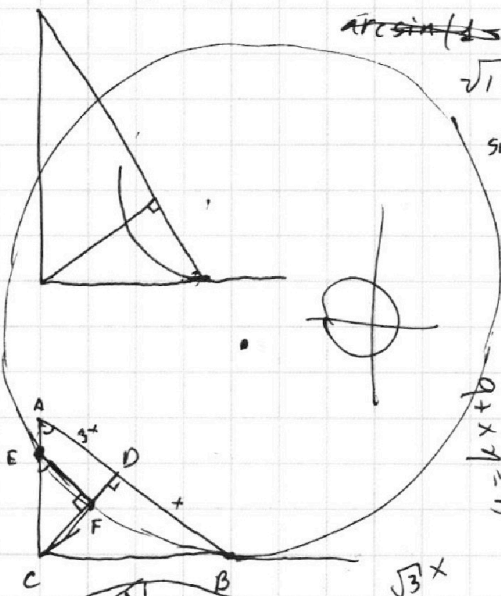
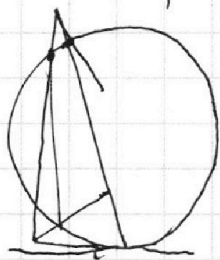
$$\sqrt{1-x^2} = \sin$$

$$\sin \sqrt{1-x^2} = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$\frac{9}{115} = \frac{2}{115} \cdot \frac{9}{115}$$

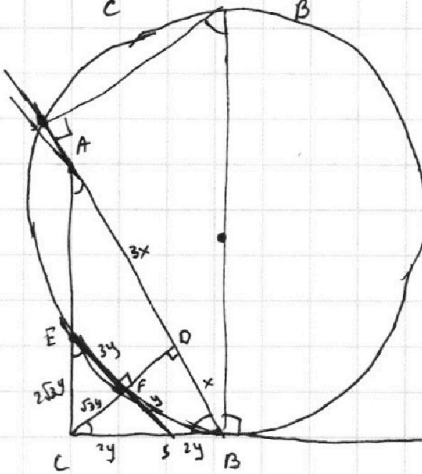
$$\frac{9}{115} = \frac{9}{115}$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$



$$5\sqrt{1-x^2} = x + \frac{\pi}{2}$$

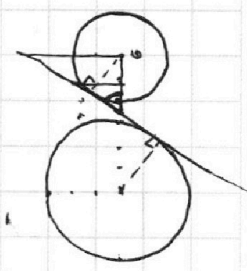
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{10}\right)$$



$$3x + x$$

$$\frac{EF}{3x} = \frac{PS}{x}$$

$$EF =$$



$$SB^2 = SF \cdot SE$$

$$SB^2 = 4 \cdot 4^2$$

$$SB = 24$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 1.

$$I \quad ab \equiv 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$bc \equiv 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot q$$

$$ac \equiv 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p$$

$$(abc)^2 = 2^{(9+14+9)} \cdot 3^{(10+13+18)} \cdot 5^{(10+13+30)} \cdot kprq =$$

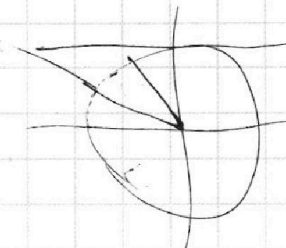
$$= 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot kprq$$

$(abc)^2$ — в четной степени, т.е. каждый множитель встречается четное число раз $\Rightarrow (kprq)$ содержит хотя бы одну тройку и одну пятёрку в разложении.

abc наим., когда k, p, q наим.

$$kprq \geq 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$$

$$I \quad (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$$



$$\begin{aligned} a+b &= 19 \\ b+c &= 14 \\ a+c &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 19 \\ b+c &= 14 \\ a+c &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 5 \\ a &= 7 \\ b &= 2 \\ c &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 4 \\ a &= 14 \\ b &= 2 \\ c &= 11 \\ d &= 3 \end{aligned}$$

$$I \quad a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

$$ab \equiv 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 4$$

$$\Rightarrow bc \equiv 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$$

$$ac \equiv 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Заметим, что сумма степеней пятёрок для чисел ab, bc и ac — 54.

$$I \quad (abc)^2 = t \cdot 5^{54}, \quad t \not\equiv 5$$

$$(abc) \equiv 5^{27} \cdot l, \quad l \not\equiv 5$$

$$\text{Но } ac : 5^{30} \Rightarrow$$

$$(abc) : 5^{30} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{60} \Rightarrow$$

$$kprq \text{ содержит хотя бы } 5^7 \Rightarrow$$

$$kprq \geq 3 \cdot 5^7$$

при: abc

$$\begin{aligned} 2(a+b+c) &= 60 \\ a+b+c &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ c &= 20 \\ a &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 19 \\ b+c &= 19 \\ a+c &= 30 \end{aligned}$$

$$25+16=41$$

7
4
4
4
4
6
7
76