



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a \cdot b : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ a \cdot c : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \\ b \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \end{cases} \quad \min(a \cdot b \cdot c) = ?$$

($\times a, b, c \in \mathbb{N}$)

Решение:

• Так $a \cdot c : 5^{30}$, $a \cdot b : 5^{10}$, $b \cdot c : 5^{13}$, $30 > 13 + 10 \Rightarrow a \cdot b \cdot c : 5^{30}$

$\min(a \cdot b \cdot c) : 5^{30}$

• $\exists a_2, b_2, c_2$ такие, что $a : 2^{a_2}$, $b : 2^{b_2}$, $c : 2^{c_2}$;

$a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ a_2 + c_2 \geq 19 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \end{cases}$

$\min(a \cdot b \cdot c) : 2^{\min(a_2 + b_2 + c_2)} \Rightarrow \min(a \cdot b \cdot c) : 2^{21}$

• $\exists a_3, b_3, c_3$ такие, что $a : 3^{a_3}$, $b : 3^{b_3}$, $c : 3^{c_3}$;

$a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 \\ a_3 + c_3 \geq 18 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 20,5$

$a_3 + b_3 + c_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$

$\min(a \cdot b \cdot c) : 3^{\min(a_3 + b_3 + c_3)} \Rightarrow \min(a \cdot b \cdot c) : 3^{21}$

Тогда $\min(a \cdot b \cdot c) = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Ответ: $\min(a \cdot b \cdot c) = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

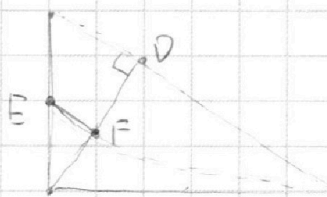
Дано: $\triangle ABC$ - произм. Треуг.

$\angle C = 90^\circ$; $CD \perp AB$;

Окр. $\cap BC = B$; BC - кас. окр.

Окр. $\cap CD = F$; Окр. $\cap AC = E$

$EF \parallel AB$, AM $AD:DB = 3:1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \pi - 5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$* \exists \varphi \in [0; \pi], k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \varphi + 2\pi k \Rightarrow \arccos(\cos x) = \varphi$$

$$x = -\varphi + 2\pi k \Rightarrow \arccos(\cos x) = \varphi$$

$$x + 5 \arccos(\cos x) = 2\pi;$$

$$\varphi + 2\pi k \Rightarrow x = \varphi + 2\pi k;$$

$$\begin{cases} \varphi + 2\pi k + 5\varphi = 2\pi \Rightarrow 6\varphi + 2\pi k = 2\pi \Rightarrow \\ \varphi \in [0; \pi] \end{cases} \begin{cases} \varphi \in [0; \pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{3}(1-k) \\ \varphi \in [0; \pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{3}(1-k) \\ \pi > \frac{\pi}{3}(1-k) \end{cases} \begin{cases} k \leq 1 \\ k \geq -2 \end{cases}$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{3}(1-1) + 2\pi; \frac{\pi}{3}(1-0) + 0; \frac{\pi}{3}(1+1) - 2\pi; \frac{\pi}{3}(1+2) - 4\pi \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ 2\pi; \frac{\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}; -3\pi \right\}$$

$$x = -\varphi + 2\pi k;$$

$$\begin{cases} -\varphi + 2\pi k + 5\varphi = 2\pi \Rightarrow \\ \varphi \in [0; \pi] \end{cases} \begin{cases} \varphi = \frac{1}{4}(2\pi k - 2\pi) \\ \varphi \in [0; \pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}(k+1) \\ \varphi \in [0; \pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}(k+1) \geq 0 \\ \frac{\pi}{2}(k+1) \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \geq -1 \\ k \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}(-1+1) + 2\pi; -\frac{\pi}{2}(0+1) + 0; -\frac{\pi}{2}(1+1) + 2\pi \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ 2\pi; -\frac{\pi}{2}; 3\pi \right\}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \end{cases}$$

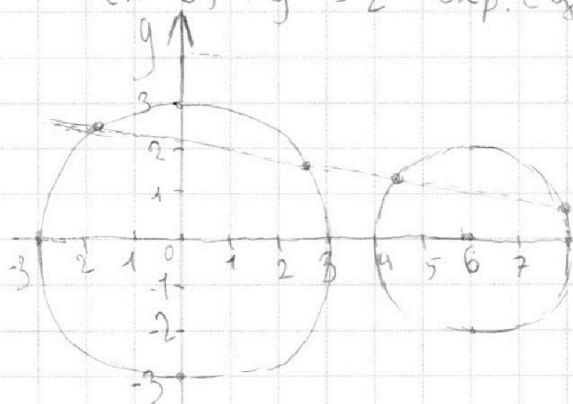
$a, b \in \mathbb{R}^1: \exists b: \in \mathbb{Z} \mid 4 \text{ реш.}$

$$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+4)=0$$

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & \text{— Прямая} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=3^2 & \text{— Окр с центром (0;0) и } R=3 \end{cases}$$

$$(x-6)^2+y^2=2^2 \text{ — Окр. с центром (6;0) и } R=2.$$



4 рез. реш. Будут только,

Если Прямая пересечёт обе

Окр. в двух точках. Значит,

расстояние от их центров до прямой

должно быть меньше их радиусов ($\text{расстояние} = \left| \frac{ax_0+2y_0-3b}{\sqrt{a^2+4}} \right|$)

$$\textcircled{1} \begin{cases} \left| \frac{-3b}{\sqrt{a^2+4}} \right| < 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \left| \frac{6a-3b}{\sqrt{a^2+4}} \right| < 2 \end{cases} \quad \textcircled{1}: \left| \frac{-3b}{\sqrt{a^2+4}} \right| < 3 \Rightarrow \left| \frac{b}{\sqrt{a^2+4}} \right| < 1 \Rightarrow b \in (-\sqrt{a^2+4}, +\sqrt{a^2+4})$$

$$\textcircled{2} \left| \frac{6a-3b}{\sqrt{a^2+4}} \right| < 2 \Rightarrow \begin{cases} 6a-3b < 2\sqrt{a^2+4} \\ 6a-3b > -2\sqrt{a^2+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \\ b < 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \end{cases}$$

$$b \in (-\sqrt{a^2+4}, +\sqrt{a^2+4})$$

$$b \in (2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}, 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}) \Rightarrow (-\sqrt{a^2+4}, +\sqrt{a^2+4}) \cap (2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}, 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}) \neq \emptyset$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+4} > 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \\ -\sqrt{a^2+4} < 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+4} > \frac{3-2}{5}a \\ \sqrt{a^2+4} > -\frac{3+2}{5}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a^2+4 > \frac{36}{25}a^2 \\ a > 0 \\ a^2+4 > \frac{36}{25}a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < \frac{100}{11} \\ a^2 < \frac{100}{11} \end{cases}$$

$$= a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\log_3 x)^4 + 6 \log_3 3 = \log_3 243 - 8$$

$$x \cdot y = ?$$

$$(\log_3 5y)^4 + 2 \log_3 3 = \log_3 25y^2(3^{11}) - 8$$

$$\begin{cases} (\log_3 x)^4 + 6 \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8 \\ (\log_3 5y)^4 + 2 \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \frac{1}{\log_3 5y} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_3 x)^4 + 6 \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{\log_3 x} - 8 \\ (\log_3 5y)^4 + 2 \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \frac{1}{\log_3 5y} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \log_3 x, a = \log_3 5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^4 + 6 \frac{1}{b} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8 \\ a^4 + 2 \frac{1}{a} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^4 + 6 \frac{1}{b} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8 \\ a^4 + 2 \frac{1}{a} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b^5 + 16b + 7 = 0 \\ 2a^5 + 16a - 7 = 0 \\ a, b \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b^5 + 16b + 7 = 0 \\ 2a^5 + 16a - 7 = 0 \\ a, b \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{многогранник 5-ой степени} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \text{ реш.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = \text{реш. } 2b^5 + 16b + 7 = 0; \text{ Тогда при } a = -b_0: \\ 2a^5 + 16a - 7 = -(2b_0^5 + 16b_0 + 7) = -0 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow b_0 - \text{реш. } 2a^5 + 16a - 7. (\exists a_0 = -b_0 \in \mathbb{R}, \text{ реш.}) \end{cases}$$

$$2a^5 + 16a - 7 = -(2b_0^5 + 16b_0 + 7) = -0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_0 - \text{реш. } 2a^5 + 16a - 7. (\exists a_0 = -b_0 \in \mathbb{R}, \text{ реш.})$$

$$a_0 = -b_0 \Rightarrow \log_3 5y = -\log_3 x \Rightarrow \log_3 5y = \log_3 \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$= \log_3 5y = \log_3 \frac{1}{x} \Rightarrow 5y = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$$

$$* (2b^5 + 16b + 7)' = 10b^4 + 16 > 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \text{ реш. } 2b^5 + 16b + 7 = 0.$$

$$* (2a^5 + 16a - 7)' = 10a^4 + 16 > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \text{ реш. } 2a^5 + 16a - 7 = 0.$$

Т.к. a_0, b_0 - ед. реш., то $xy = \frac{1}{5}$ - ед. возможное значение.

Ответ: $xy = \frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:
Вершина парал.: $O(0,0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$, $R(20,0)$

$OPQR \in A, B(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$, $3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33, x_1$

Найти: n - кол-во пар $(A; B)$; $(x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z})$

Решение:

$OPQR$ - парал. oo , $OP = 20$, высота $OPQR$ (вдольнейшей h) = 42.

$$x_2 - x_1 \in [-34; 24], y_2 - y_1 \in [-42; 42]$$

$$y_2 - y_1 = 3(11 - (x_2 - x_1)) \in [-42; 42] \Rightarrow 11 - (x_2 - x_1) \in [-14; 14]$$

$$\Rightarrow -14 \leq 11 - (x_2 - x_1) \leq 14 \Rightarrow -14 \leq x_2 - x_1 - 11 \leq 14 \Rightarrow x_2 - x_1 \in [-3; 25]$$

При $x_2 - x_1 \in [-3; 20]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{5}{2}\pi - \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + \arccos(\cos x) = 2\pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \in [0; \pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \varphi + 2\pi k \Rightarrow \arccos(\cos x) = \varphi \\ x = -\varphi + 2\pi k \Rightarrow \arccos(\cos x) = \varphi \end{array}$$

$$x = -\varphi + 2\pi k;$$

$$-\varphi + 2\pi k + \varphi = 2\pi \Rightarrow 2\pi k = 2\pi \Rightarrow k = 1;$$

$$x \in [2\pi - \pi; 2\pi - 0] \Rightarrow x \in [\pi; 2\pi];$$

$$x = \varphi + 2\pi k;$$

$$\varphi + 2\pi k + \varphi = 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \varphi + \pi k = \pi \\ \varphi \in [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \pi \\ k = 0 \\ \varphi = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + 0 \\ x = 0 + 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases};$$

Ответ: $x \in [\pi; 2\pi]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a+b=10 \\ a+c=30 \\ b+c=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=7 \\ c=6 \end{cases}$$

$$a=$$

$$\arccos \cos x = x$$

$$\frac{5}{2}\pi - \arccos \cos x = x \Rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{2}\pi - x \geq x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$$

$$a^4 + 2 \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \cdot 11 \frac{1}{a} - 8$$

$$2a^5 + 16a = 7 \Rightarrow 0$$

15

$$\log_3 x + \frac{4}{x} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{x} - 8$$

$$x^5 + 3,5 + 8 + 2 = 0$$

$$2 + x + 16 + 7 = 0$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y$$

$$x = \frac{1}{5y} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

12

$$y_1 - y_2 = 3(1 - (x_1 - x_2)) \Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + 3b$$

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$\frac{\sqrt{a^2+4}}{3b} < 3$$

$$a+b$$

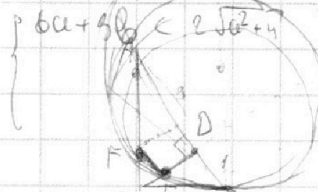
$$\frac{3b}{\sqrt{a^2+4}} < 3$$

$$\frac{3b}{\sqrt{a^2+4}} < 2 \Rightarrow$$

$$(x-b)^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{3b}{\sqrt{a^2+4}} < 3$$

$$\frac{3b}{\sqrt{a^2+4}} > -3$$



11

$$a+b \geq 10$$

$$c = 16,5$$

$$a+c \geq 30$$

$$b = -3,5$$

$$b+c \geq 13$$

$$a = 13,5$$

$$-a-b \leq -10$$

$$a+c \geq 30$$

$$a+c \geq 10 \Rightarrow a-b$$

$$2(a+b+c) \geq 53$$

$$(a+b+c) \geq 26,5 \Rightarrow 27$$

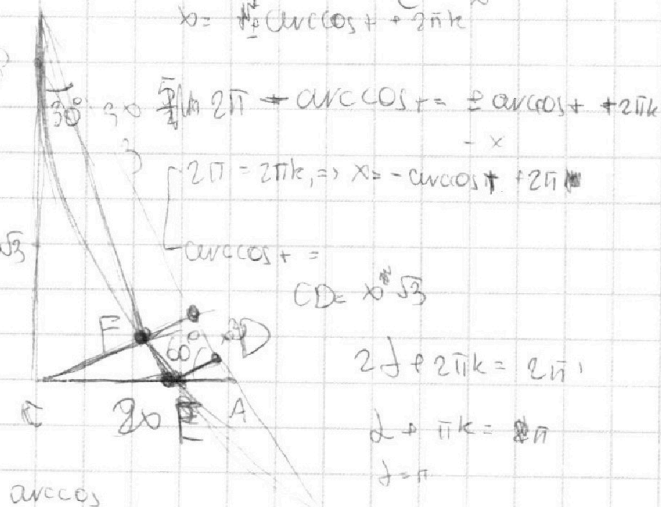
$$a+b \geq 10$$

$$a+c \geq 30$$

$$b+c \geq 13$$

$$x = 1 + 2\pi k$$

$$x = 1 + 2\pi k$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

