



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}; \quad b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}; \quad c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 9 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 19 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 18 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases}$$

• Из этого следует, что $2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 42$.

Посмотрим на решение ^{линейной} системы:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 9 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 19 \end{cases} \quad \text{Сумма равна } \frac{42}{2} = 21 \Rightarrow \gamma_1 = 12, \alpha_1 = 7, \beta_1 = 2.$$

пример, при котором равно 21

• Составим аналогичную сист. для "второй" степеней:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 & 2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 41 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 18 \end{cases} \quad \text{Так как } \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \text{ натуральные, то мин. знач. } \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 21.$$

Найдем пример, удовл.

такой сумме (заменим в системе вторую стр. на 14):

$$\gamma_2 = 21 - 10 = 11, \alpha_2 = 21 - 14 = 7, \beta_2 = 21 - 18 = 3$$

• и точно так же для

α_3, β_3 и γ_3 :

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 10 & 2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) \geq 53 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 27 \quad \text{Но 27 меньше 30, поэтому минимальное значение суммы } 30, \text{ т.к. степени целые неотр.}$$

Пример: $\beta_3 = 0, \gamma_3 = 15, \alpha_3 = 15$.

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$.

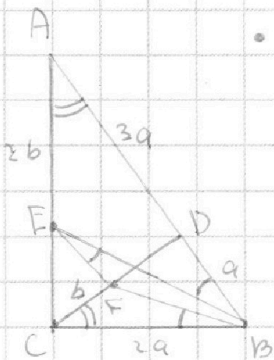
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- $\angle DCB = \alpha$, если $\angle BAC = \alpha$; $\angle FEB = \varphi$
 $\Rightarrow \angle EBA = \varphi$, т.к. $EF \parallel AB$, $\angle FBC = \varphi$, т.к.
 BC касается описанной окружности $\triangle BEF$. $\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CBF$ по 2 углам.

- коэффициент подобия равен 2
 (так как $CD = \sqrt{3}a$, $\angle CBA = 60^\circ$).

$\Rightarrow$ если $CF = b$, то $AE = 2b$.

• $AC = 2\sqrt{3}a \Rightarrow CE = 2\sqrt{3}a - 2b$.

$$CE : AC = CF : CD \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}a - 2b}{2\sqrt{3}a} = \frac{b}{\sqrt{3}a}, \text{ тогда как } 2\sqrt{3}a : 2\sqrt{3}a = 4b, b = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow EF - \text{средняя линия } \triangle ADC$$

$$\Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ADC} = S_{ABC} = \frac{1}{3} S_{ADC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{16}{3}$$

Ответ: $\frac{16}{3}$.

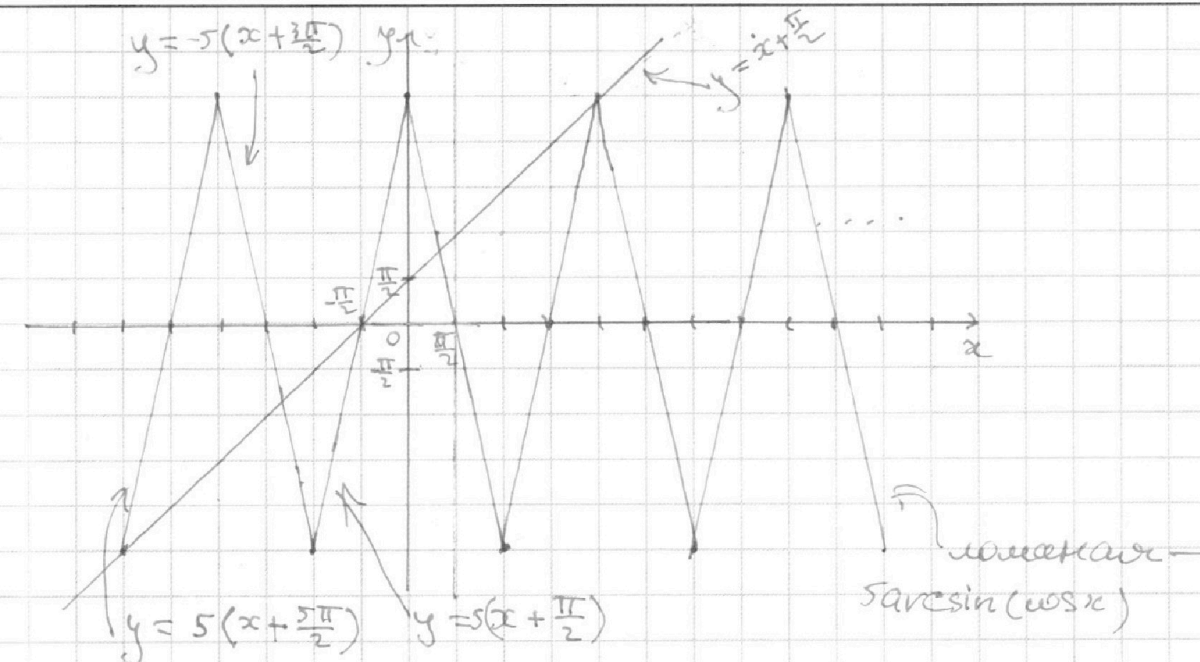
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- (1) • $\begin{cases} y = x + \frac{\pi}{2} \\ y = 5(x + \frac{3\pi}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{5\pi}{2}, x = -3\pi \leftarrow \text{подходит}$
- (2) • $\begin{cases} y = -5(x + \frac{3\pi}{2}) \\ y = x + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{8}{6} \cdot \frac{\pi}{2}, x = -\frac{14}{6} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{подходит}$
- (3) • $\begin{cases} y = 5(x + \frac{\pi}{2}) \\ y = x + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = 0, x = -\frac{\pi}{2} \leftarrow \text{подходит}$
- (4) • $\begin{cases} y = -5(x - \frac{\pi}{2}) \\ y = x + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{5}{3} \cdot \frac{\pi}{2}, x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{подходит}$
- (5) • $\begin{cases} y = 5(x - \frac{3\pi}{2}) \\ y = x + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = 5\frac{\pi}{2}, x = 2\pi \leftarrow \text{подходит}$

Других точек нет, т.к. (1) и (5) — вершинные ломаные

Ответ: $-3\pi, -\frac{7}{6}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

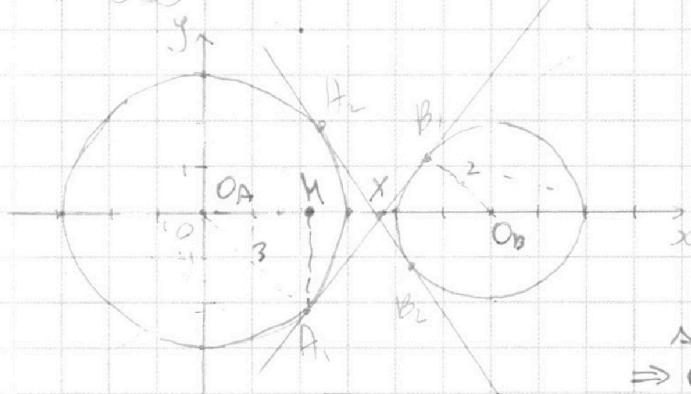
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & \leftarrow \text{прямая с коэфф. наклона } -\frac{a}{2} \text{ и } \\ & \text{прямв. св. коэфф.} \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & \leftarrow \text{две окр.:} \\ & \text{с центрами } (0;0) \text{ и радиусом } 3 \text{ и центром } (6;0) \text{ и} \\ & \text{радиусом } 2: (x-6)^2-36+y^2+32 \Rightarrow (x-6)^2+y^2=4. \end{cases}$$



Нужно, чтобы коэффициент наклона прямой (1) был таким, чтобы касательные A_1B_1 и имели коэфф. наклона одной кас. A_1B_1 .

$$\triangle O_A A_1 X \sim \triangle O_B B_1 X \text{ с коэфф. } \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow O_A X = \frac{3}{2} O_B X, O_B X = \frac{6}{2.5} = 2.4$$

$$\Rightarrow O_A X = 3.6, \Rightarrow A_1 X = \sqrt{18^2 - 3.6^2} = \frac{\sqrt{18^2 - 15^2}}{5} = \frac{3\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \frac{AM}{MX} = \frac{O_A A_1}{A_1 X} = \frac{3 \cdot 5}{3\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}.$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}, -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3 x = t \quad x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$$

$$t^4 + \frac{8}{t} = \frac{5}{2t^2} - 8, \quad t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0;$$

гоме. на $2t$:

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$\text{Аналогично } \log_3 5y = d:$$

$$d^4 + \frac{2}{d} = \frac{11}{2d} - 8$$

$$\Rightarrow 2d^5 + 16d - 7 = 0$$

$$\text{Сложим: } 2(t+d) \left(t^4 + t^3d + t^2d^2 + td^3 + d^4 + 1 \right)$$

$$\Rightarrow t+d=0, \quad \log_3 x + \log_3 (5y) = \log_3 (5xy)$$

$$\Rightarrow 5xy = 1, \quad xy = 0,2$$

Ответ: 0,2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



• $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{243} 243 - 8$; $0 < x$; $x \neq 1$,
замена $t = \log_3 x$: $t \neq 0$, по формуле перехода на t
 $t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2}t - 8$, $2t^5 + 12 = 5t^2 - 16t$,
 $2t^5 - 5t^2 + 16t + 12 = 0$

• $\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3'') - 8$, $y > 0$, $y \neq 1$
замена $d = \log_3 5y$: $d^4 + \frac{2}{d} = \frac{11}{2}d - 8$,
 $2d^5 - 11d^2 + 16d + 4 = 0$

• $\begin{cases} 2t^5 - 5t^2 + 16t + 12 = 0 & (1) \\ 2d^5 - 11d^2 + 16d + 4 = 0 & (2) \end{cases}$ Нужно найти $t+d$, чтобы
узнать xy
 Можем:

$2(t+d)(t^4 - t^3d + t^2d^2 - td^3 + d^4) - 5t^2 - 11d^2 + 16(t+d) = -16$
 $\Rightarrow 2(t+d)(t^4 - t^3d + t^2d^2 - td^3 + d^4 + 8) = 5t^2 + 11d^2 - 16$

$2(t+d) \left(\frac{t^4 + 4}{2} + \frac{d^4 + 4}{2} - t^3d + t^2d^2 - td^3 \right) = 5t^2 + 11d^2 - 16$
 $t^4 = \frac{5}{2}t - 8 - \frac{6}{t}$, $d^4 = \frac{11}{2}d - 8 - \frac{2}{d}$.

$2(t+d) \left(\frac{5t^2 - 16t - 12}{2t} + \frac{11d^2 - 16d - 4}{2d} - t^3d + t^2d^2 - td^3 \right) = 5t^2 + 11d^2 - 16$

Умножим на $2td$:
 $2(t+d) \left(5t^2 + 11d^2 - 16 \right)$

$AB_1 - 1 \frac{5}{2} AB_1 12 - 5 = 7$



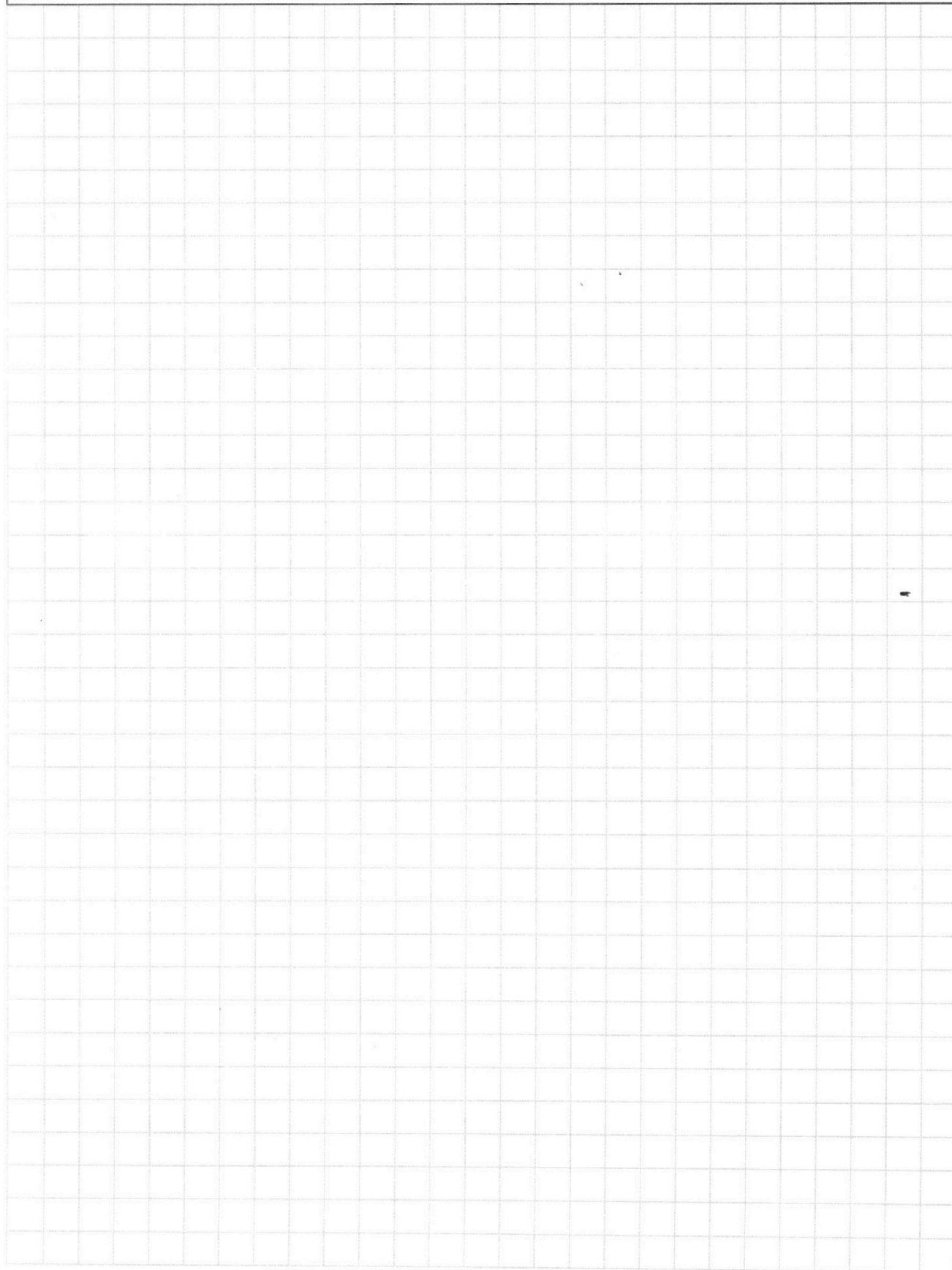
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x + 2y - 36 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 36$$

$$(x-6)^2 - 36 + y^2 + 32 = 0$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$(6; 0) \text{ и } 2$$

$$\frac{6 \cdot 4}{10}$$

$$18$$

$$3 \cdot 33$$

$$\frac{36}{10} = \frac{18}{5}$$

$$18 \text{ и } 15$$

$$x > 0, x \neq 1$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 9}{18} = \frac{127}{63}$$

$$3^5$$

$$\log_3 x = t$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2}t - 8$$

$$2t^5 + 12 = 5t^2 - 16t$$

$$2t^5 - 5t^2 + 16t + 12 = 0$$

$$2 \cdot 32 - 5 \cdot 4 + 32 + 12$$

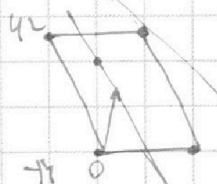
$$683$$

$$641 - 4941$$

$$\frac{1}{16} - \frac{11}{4} + 8 + 4 \quad d =$$

$$42 : 14 = 3$$

$$-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{16} \cdot 11 = \frac{11}{16}$$



$$y_2 - y_1 = 33 - 3(x_2 - x_1)$$

$$y = 33 - 3x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}, \quad b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}, \quad c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 9 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 10 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 10 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 19 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 18 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$\beta_1 = 9 - \alpha_1$$

$$\gamma_1 = 14 - \beta_1 + \alpha_1$$

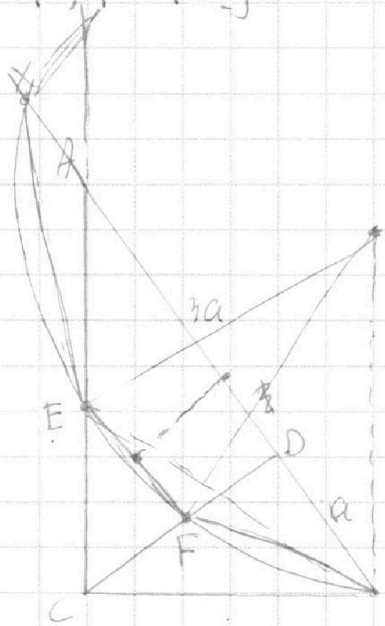
$$2\alpha_1 + 5 \geq 19$$

$$\alpha_1 = 7$$

$$\beta_1 = 2$$

$$\gamma_1 = 12$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \text{ нужно мин. } 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 32$$



$$\frac{(4a+x)\sqrt{10}}{\sin 33^\circ} = 2R$$

$$(x+1) = \frac{-5(x+3)}{\sqrt{10}}$$

$$6x = -14$$

$$-\frac{14}{6} + 1 =$$

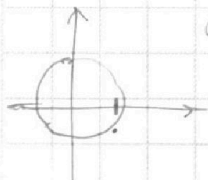
$$-\frac{8}{6}$$

$$\frac{a}{\sin 33^\circ} = \frac{b}{\sin 33^\circ}$$

$$\sqrt{3}a$$

$$CD = \sqrt{3}a$$

$$\Rightarrow BC = 2a$$



$$\frac{4}{3}A, \frac{A}{3}$$

$$\frac{\frac{4}{3}A}{\frac{A}{4}} = \frac{16}{3}$$

$$\sin \varphi = \cos x$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = x =$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x)$$

