



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Обозначим α_p - степень, в которой число (простое)
 p входит в a ; аналогично β_p - в число b , γ_p - в
число c .

Тогда 1) $ab : 2^7 \Rightarrow 2^{\alpha_2} \cdot 2^{\beta_2} : 2^7 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 \geq 7$.

Аналогично $bc : 2^{13} \Rightarrow \beta_2 + \gamma_2 \geq 13$ и

$ac : 2^{14} \Rightarrow \alpha_2 + \gamma_2 \geq 14 \Rightarrow (\alpha_2 + \beta_2) + (\beta_2 + \gamma_2) + (\alpha_2 + \gamma_2) \geq 7 + 13 + 14 = 34 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 17$. ■

2) $ab : 3^{11} \Rightarrow 3^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} : 3^{11} \Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 \geq 11$. Анало-
гично $bc : 3^{15} \Rightarrow \beta_3 + \gamma_3 \geq 15$ и $ac : 3^{17} \Rightarrow \alpha_3 + \gamma_3 \geq 17$
 $\Rightarrow (\alpha_3 + \beta_3) + (\beta_3 + \gamma_3) + (\alpha_3 + \gamma_3) \geq 11 + 15 + 17 = 43 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 21,5$. Т.к. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ - целые, то

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 22$ ■

3) $ab : 5^{14} \Rightarrow 5^{\alpha_5} \cdot 5^{\beta_5} : 5^{14} \Rightarrow \alpha_5 + \beta_5 \geq 14$. Аи-но

$ac : 5^{43} \Rightarrow \alpha_5 + \gamma_5 \geq 43 \Rightarrow$

$\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 43$ ■

Заметим, что $a \geq 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5}$, $b \geq 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5}$

и $c \geq 2^{\gamma_2} \cdot 3^{\gamma_3} \cdot 5^{\gamma_5}$ (исходя из пр. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$)

числа $2^{\alpha_2}, 3^{\alpha_3}, 5^{\alpha_5}$ входят в числа a, b, c ■

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c \geq 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Всего $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{24}$, $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$, $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{19}$.

Действительно $abc = 2^{4+3+10} \cdot 3^{6+5+11} \cdot 5^{24+0+19} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$ab = 2^{4+3} \cdot 3^{6+5} \cdot 5^{24} = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{24}$; $bc = 2^{3+10} \cdot 3^{5+11} \cdot 5^{19} = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{19}$; $ac = 2^{4+10} \cdot 3^{6+11} \cdot 5^{24+19} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$; $2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ и $ac = 2^{4+10} \cdot 3^{6+11} \cdot 5^{24+19} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$; $2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

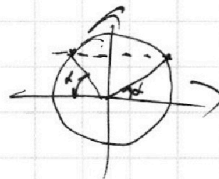
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}5 \arccos(\sin x) &= \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \\ \sin x &= \cos y \Rightarrow \arccos(\cos y) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow y = \pm \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin x &= \cos \left(\pm \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right) \right) \\ \sin x &= \cos \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right) \\ \sin x &= \cos \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \right) \\ \sin x &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \right) \right) \\ \sin x &= \sin \left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x + 2\pi k = \frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \\ x + 2\pi k = \pi - \left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \right) \end{cases} & k \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 2\pi k \\ \frac{4}{5}x = \frac{4\pi}{5} - 2\pi k \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \\ x = \pi - \frac{5\pi k}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



Ответ: $x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}$ или $x = \pi - \frac{5\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2 стр.) №4.

Тогда $l_1: y = kx + t_0$
 $l_2: y = -kx + t'_0$

t_0 таковы, что $x = -t$ при $y = 0$, т.е.
 $0 = kx + t_0$ $t'_0: 0 = -k(-t) + t'_0$
 $0 = -kt + t_0$ $t'_0 = -kt$
 $t_0 = kt$

т.е. $l_1: y = kx + kt$
 $l_2: y = -kx - kt$

Найдем t, k .

~~уравнение~~
 система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = kx + kt \end{cases}$

1 решение, т.е. 1
 кас. точка

$\begin{cases} (x+t)^2 + y^2 = 4 \\ y = kx + kt \end{cases}$

1 решение аналогично

из $x^2 + (kx + kt)^2 = 9$

$x^2(k^2 + 1) + x(2k^2t) + k^2t^2 - 9 = 0$

1 решение $\Rightarrow$ дискр. $= 0$. т.е. $(2k^2t)^2 - 4(k^2t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$
 $(k^2t)^2 - (k^2t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$
 $-k^2t^2 + 9k^2 + 9 = 0$

из $\begin{cases} (x+t)^2 + y^2 = 4 \\ y = kx + kt \end{cases}$

получим $(x+t)^2 + (kx + kt)^2 = 4$

$x^2 + 14x + 49 + k^2x^2 + 2x \cdot k^2t + k^2t^2 - 4 = 0$

$x^2(k^2 + 1) + x(14 + 2k^2t) + k^2t^2 + 45 = 0$

$D = 0$, т.е. 1 решение $\Rightarrow (14 + 2k^2t)^2 - 4(k^2t^2 + 45)(1 + k^2) = 0$
 $(7 + k^2t)^2 = (k^2t^2 + 45)(1 + k^2)$

$49 + 14k^2t + k^4t^2 = k^2t^2 + k^4t^2 + 45 + k^2 \cdot 45$
 $4 + 14k^2t = k^2t^2 + 45k^2$

т.е. $\begin{cases} 4 + 14k^2t = k^2t^2 + 45k^2 \\ 9k^2 + 9 = k^2t^2 \end{cases}$

~~$k^2(9 - t^2) = -9$~~

$4 + 14\left(\frac{-9}{9 - t^2}\right)t = \frac{-9}{9 - t^2}t^2 + 45\left(\frac{-9}{9 - t^2}\right) \mid (9 - t^2)$
 $4(9 - t^2) - 14 \cdot 9t = -9t^2 - 9 \cdot 45$

$36 - 4t^2 - 126t = -9t^2 - 405$
 $5t^2 - 126t + 441 = 0$

$D = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 441 = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 = (21 \cdot 6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 =$
 $= 21^2(6^2 - 4 \cdot 5) = 21^2(36 - 20) = 21^2 \cdot 16 = (21 \cdot 4)^2 = 84^2$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

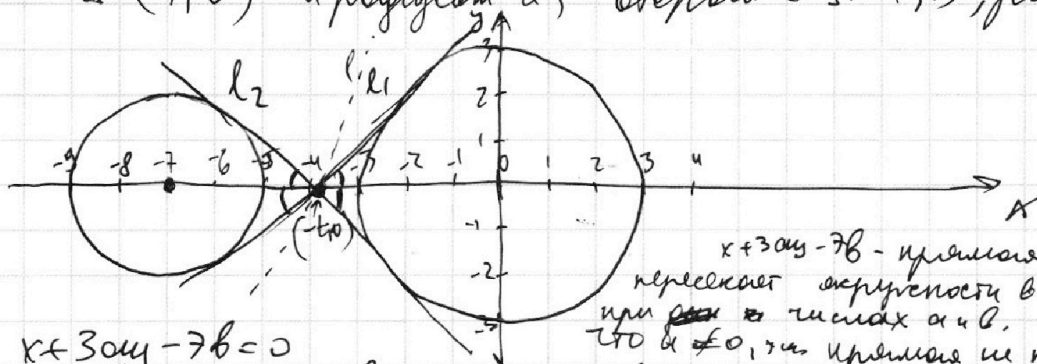


№4
(1 стр.)

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

Нарисуем графики обеих окружностей: первая с ц. $(-7; 0)$ и радиусом 2, вторая с ц. $(0; 0)$, рад. 3.



$$\begin{aligned} x + 3ay - 7b &= 0 \\ y &= -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} \end{aligned}$$

$x + 3ay - 7b = 0$ - прямая, которая пересекает окружности в 4 точках при $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Следовательно, что $a \neq 0$, т.к. прямая не перп-а осей, иначе было бы мало точек пересечения.

~~$x + 3ay - 7b = 0$~~ - для всех a и b это - уравнение прямой. ~~$\frac{7b}{3a}$~~ коэфф. при x , т.е. угл наклона $\frac{7b}{3a}$ задает, в какой точке пересечёт прямая с отриц. наклоном оси.

Проверим общие кас-ые (внешние) к окружностям. Из симметрии они пересекутся в точке на оси абсцисс, т.е. $(-t; 0)$, $t \geq 0$.

Возьмем прямую с ненулевым тангенсом наклона $3a$ l_1 , вторую - $3a$ l_2 .

~~$l_1: x + t = ky$ (касается в $(-t; 0)$)~~ ~~$l_2: x + t = ky$ (касается в $(-t; 0)$)~~ ~~$y = \frac{1}{k}x + \frac{t}{k}$~~
и ось y . Следовательно, их ортогональные проецир. на ось y совпадают. Если какая-то прямая l перпен. к пер. x пер. y ~~и l_1, l_2~~ .
Если l , то тангенсы их равны, т.е. l_1, l_2 ~~и l~~ .
Легко видеть, что она не может касаться
обе окруж. сразу, т.к. не может быть угл
касания l ~~и l_1, l_2~~ . Если не дано, то
прямая $3b = t3a$, $b = \frac{t}{3}$ и для этой прямой $l: x - 2b = -3ay$
будут 4 касания
каждо почите t, k .
 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ x + t = ky \end{cases}$ прямая т.е. кас. к l_1 и l_2 в 1 точке
касается.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3 ар.) МН.
 $t = \frac{126 \pm 84}{5 \cdot 2}$

или $\mu_{\text{фигуры}} = \text{монитор}$

$t, \text{ т.ч.}$ мы рассматриваем точку пересечения окружности с осью абсцисс (внешний диаметр равен от центра)

$$t = \frac{126 - 84}{5 \cdot 2} = \frac{63 - 42}{5} = \frac{21}{5}$$

$$k^2 = -\frac{9}{9 - t^2} = \frac{9}{t^2 - 9} = \frac{9}{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 9} = \frac{1}{\left(\frac{7}{5}\right)^2 - 1} = \frac{5^2}{7^2 - 5^2}$$

$$= \frac{5^2}{2 \cdot 12} = \frac{5^2}{4 \cdot 6}$$

касательная кр. ℓ_1 , поэтому $k > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

уравнение касательной кр. ℓ_1 имеет вид $y = kx + b$ (касательная кр. ℓ_1)

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12} < \frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12} \right) \Rightarrow \frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}, \frac{5\sqrt{6}}{12} \right) \\ & \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12} \\ \frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a > \frac{12}{3 \cdot 5\sqrt{6}} \\ a > -\frac{12}{3 \cdot 5\sqrt{6}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a > \frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} \\ a > -\frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a > \frac{4}{5} \\ a > -\frac{4}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a > \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Значит, $a > \frac{4}{5}$.

Ответ: $\left(\frac{4}{5}, +\infty \right)$ (касательная)

Заметим, что если у прямой $y = kx + b$ касательная будет $\geq k$, то она не сможет пересечь окружность (см. рис) или 2,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

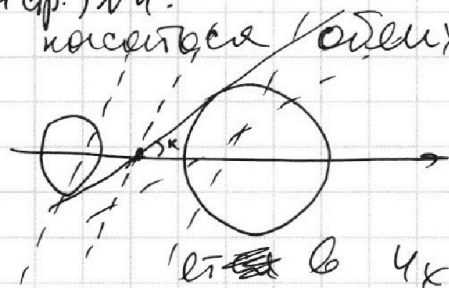
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4 стр.) 1/4.
по касательным к обеим.



аналогично, если
угла наклона $\leq -k$,
то прямая не пересека-
ется в 4х точках.

Значит, $\text{коэф. } d \in (-k; k)$.

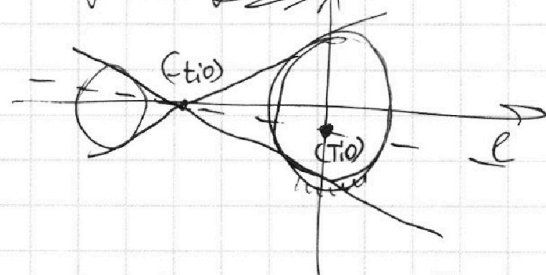
т.е. упр. $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$

$$\begin{aligned} \text{прямая } -\frac{1}{3a} \in (-k; k) &\Rightarrow \begin{cases} -k < -\frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3a} < k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{3k} \\ a > -\frac{1}{3k} \end{cases} \Rightarrow a > \frac{1}{3k} \\ \text{т.к. } k > 0 &\Rightarrow a > \frac{1}{3k} = \frac{1}{3 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{12}} = \frac{12}{3 \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{2\sqrt{6}}{15} \end{aligned}$$

т.к. $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$, то $a \neq 0 \Rightarrow$ для любого.

а существует. $\frac{7b}{3a} = \frac{7b}{3a}$, поэтому мы можем

привести тангенс прямой к виду $(-t; 0)$
с $\frac{7b}{3a}$ $\frac{7b}{3a}$ между внутр.-кас:



$$l: y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

Ответ: $(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$15. \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4 \quad 6x > 0, 1t = 6x.$$

$$t \neq 1.$$

$$\log_7^4 t - 2 \log_{6t} 7 = \frac{3}{2} \log_t 7 - 4$$

$$\log_7^4 t = 3,5 \log_t 7 - 4$$

$$\log_7^4 t = \frac{3,5}{\log_7 t} - 4$$

$$, \text{ и } \log_x y \cdot \log_y x = 1.$$

$$\log_7^5 t = 3,5 - 4 \log_7 t$$

$$(1)$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4.$$

$$\log_7^4 y = -3,5 \log_y 7 - 4$$

$$\log_7^5 y = -3,5 - 4 \log_7 y.$$

$$(2)$$

Сложим (1) и (2):

$$\log_7^5 y + \log_7^5 t = -4 (\log_7 t + \log_7 y).$$

$$\log_7^5 (yt) = -4 \log_7 (yt).$$

~~15.~~

$$\log_7 (yt) (\log_7^4 (yt) + 1) = 0.$$

≥ 0 , и ч. ч. не равно

$$\log_7 (yt) = 0.$$

$$yt = 1.$$

$$t = 6x \Rightarrow 6x \cdot y = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_7(6x))^4 - 2 \log_7(6x) 7 = \frac{3}{2} \log_7 7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - 3.5 \log_7 6x 7 = -4.$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

$$b \cdot a^{\log_b a} = a$$

$$\log_7^4 y = -3.5 \log_7 7 - 4$$

$$\log_7^4(t) = \frac{3.5}{\log_7 t} - 4.$$

$$\log_7^5 t = 3.5 - 4 \log_7 t.$$

$$\log_7^5 y = -3.5 - 4 \log_7 y.$$

$$\log_7^5 t + \log_7^5 y = -4 \log_7 (ty).$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$b \cdot a^{\log_b a} = a$$

$$b \cdot b^{\log_b a} = a.$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_a a = \frac{a}{b} \cdot \log_a b$$

$$\log_a a = \log_a a - \log_a b$$

$$\log_a a + \log_a b = 1$$

$$\log_a c \cdot \log_c (c+b) = 1$$

$$\log_a c \cdot \log_c b = 1$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b.$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = \log_a a = 1.$$

$$\log_7^5 y = -3.5 - 4 \log_7 y$$

$$\begin{cases} \log_7^4 y = -3.5 \log_7 7 - 4 \\ \log_7^4(t) = 3.5 \log_7 t 7 - 4 \end{cases}$$

$$\log_y 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 y} = \frac{1}{\log_7 y}.$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b.$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = \log_a a = 1.$$

$$\log_{ab} x = c$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4
(2 сп.)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x = ky - t \end{cases} \Rightarrow$$

$$(ky - t)^2 + y^2 = 9$$

$$y^2(k^2 + 1) - 2kty + t^2 - 9 = 0$$

$$\text{решение} \Rightarrow \text{дискр.} = 0 \Rightarrow (2kt)^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$$

$$(kt)^2 - (t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0.$$

$$-t^2 + 9k^2 + 9 = 0.$$

$$t^2 = 9k^2 + 9.$$

аналогично 1 решение y $\begin{cases} (k+7)^2 + y^2 = 4 \\ y = ky - t \end{cases}$

$$(ky - t + 7)^2 + y^2 = 4.$$

$$y^2(k^2 + 1) - 2kty + t^2 + 14t + 45 = 0.$$

$$D = 0, \text{ т.е. } (2kt + 14k)^2 - 4(t^2 + 14t + 45)(k^2 + 1) = 0$$

$$(kt + 7k)^2 - (t^2 + 14t + 45)(k^2 + 1) = 0.$$

$$k^2t^2 + 14k^2t + 49k^2 - k^2t^2 - t^2 + 14k^2t + 14t - 45k^2 - 45 = 0$$

$$4k^2 - t^2 + 14t - 45 = 0$$

$$\text{Значит, } \begin{cases} t^2 = 9k^2 + 9 \\ 4k^2 = t^2 + 14t + 45 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 4 \\ \cdot 9 \end{matrix} \begin{cases} 4t^2 = 36k^2 + 36 \\ 36k^2 = 9t^2 + 9 \cdot 14t + 9 \cdot 45 \end{cases}$$

$$4t^2 = 9t^2 + 9 \cdot 14t + 9 \cdot 45 + 36$$

$$5t^2 + 9 \cdot 14t + 845 + 36 = 0$$

$$D = (9 \cdot 14)^2 - 4(9 \cdot 45 + 36)(5) = 9 \cdot 4(9 \cdot 7^2 - (45 + 4)(5)) =$$

$$= 9 \cdot 4 \cdot 7^2 (9 - 5) = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2$$

$$t = \frac{9 \cdot 14 \pm \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2}}{2 \cdot 5}$$

корень, т.е. $2 \cdot 5$ общие касательные. внешние.

$$t = \frac{9 \cdot 14 - 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 7 - 3 \cdot 7 \cdot 2}{5} = \frac{63 - 42}{5} = \frac{21}{5} = 4,2.$$

$$9k^2 + 9 = t^2 = (4,2)^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2.$$

$$k^2 + 1 = \left(\frac{7}{5}\right)^2.$$

$$k^2 = \frac{7^2 - 5^2}{5^2} = \frac{2 \cdot 12}{5^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6$$

$$k > 0 \Rightarrow$$

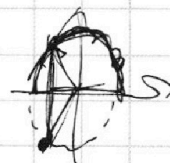
$$k = \frac{2}{5} \sqrt{6}$$

коэф. от t до k и наоборот

$$\text{Значит, } -3a \in \left(-\frac{2}{5}\sqrt{6}; \frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$$

$$a \in \left(-\frac{2}{15}\sqrt{6}; \frac{2}{15}\sqrt{6}\right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{2}{15}\sqrt{6}; \frac{2}{15}\sqrt{6}\right).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

1) $x = 0$ - решение.

$$\begin{cases} 3ay = 7b \\ (y^2 + 45)(y^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad y = \pm 3 \quad \pm 9a = 7b$$

Есть ещё 2 решения $\Rightarrow y = 0$ тоже реш.

$$\begin{cases} x = 7b. \end{cases}$$

$$(x^2 + 14x + 45)(x^2 - 9) = 0.$$

$$D = 14^2 - 4 \cdot 45 = 4^2(7^2 - 45) = 4 \cdot 4 \quad (x+5)(x+9)$$

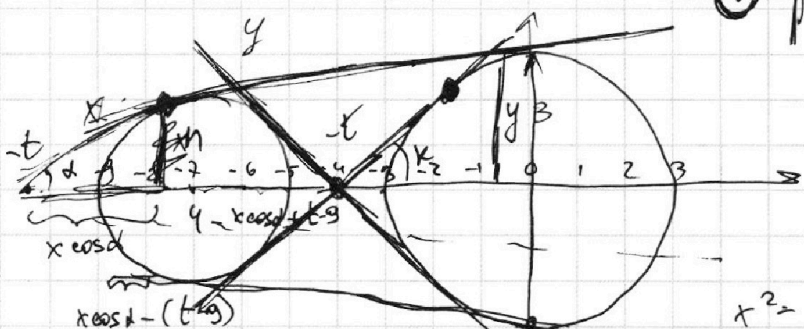
$$(x+5)(x+9)(x-3)(x+3) = 0$$

4 решения сдв. круга $\rightarrow$
 $x = ky - t.$

$\Rightarrow$ 4-х корень из.

$$x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0.$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 4.$$



$a \neq 0$, т.к. прямая
невероятно не горизонтальна

$$\begin{cases} x - 7b = -3ay \\ y = \frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} \end{cases}$$

$$b/a = \frac{3}{t}$$

$$x^2 = (t-9)(t-5) \quad t^2 - 14t + 45 = x^2$$

$$y^2 = (t-3)(t+3)$$

$$x^2 \sin^2 \alpha = (x \cos \alpha - t + 9)(t - x \cos \alpha - 5)$$

$$1 - x^2 \cos^2 \alpha = x t \cos \alpha - x^2 \cos^2 \alpha - 5x \cos \alpha + t^2 + x t \cos \alpha + 5t + 8t - 8x \cos \alpha - 45$$

$$1 = 2xt \cos \alpha - 14x \cos \alpha + 14t - t^2 - 45$$

$$1 = 2xt \cos \alpha - 14x \cos \alpha - x^2.$$

$$x - 7b = 3ay.$$

$$\begin{cases} x - t = ky \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

премещение

$$D = k^2 t^2 - (t^2 - 9)(k^2 + 1) =$$

$$= -t^2 + 8k^2 t + 9 = 0$$

$$t^2 - 8k^2 t - 9 = 0.$$

$$(t+ky)^2 + y^2 = 9. \quad \text{прем.} \Rightarrow (ky + t)^2 + y^2 = 9.$$

$$\Rightarrow D = 0. \quad y^2(k^2 + 1) - 2kty + t^2 - 9 = 0.$$

$$y^2(k^2 + 1) - 2kty + t^2 - 9 = 0.$$

$$D = (2kt)^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0.$$

$$(kt)^2 - (t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0.$$

$$-t^2 + 8k^2 t + 9 = 0$$

$$D = (2kt)^2 + 4 \cdot 9(k^2 + 1) =$$

$$= 4k^2 t^2 + 4 \cdot 9k^2 + 4 \cdot 9 =$$

$$= 4((kt)^2 + (3k)^2 + 3^2).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{l} 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \\ d_2 + p_2 \geq 7 \\ d_2 + f_2 \geq 14 \\ p_2 + f_2 \geq 43 \end{array}$$

$$z \geq 43$$

$$y \geq 17.$$

$$d_2 + p_2 + f_2 \geq \frac{64}{2} = 32.$$

$$\begin{array}{l} d_2 + p_2 = 7 \\ 7 - p_2 + f_2 = 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d_2 - p_2 = 7 \\ p_2 + f_2 = 43 \end{array} \quad | +$$

$$\begin{array}{l} 2d_2 = 50 \\ f_2 = 25. \end{array}$$

$$p_2 = 18$$

$$a = 2^4 \cdot 3^6$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{19}$$

$$\begin{array}{l} 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \\ d_3 + p_3 \geq 7 \\ d_3 + f_3 \geq 14 \\ p_3 + f_3 \geq 13 \end{array}$$

$$d + p + f \leq 19.$$

$$\textcircled{20} (d+p) + (d+f) + (p+f) \leq 3p. \geq 27+7=34.$$

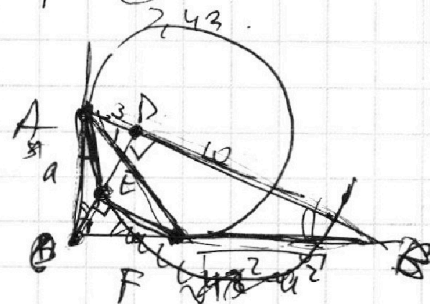
$$d_2 + f_2 + 2p_2 \geq 20.$$

$$d_2 + f_2 + p_2 + p_2 \geq 20.$$

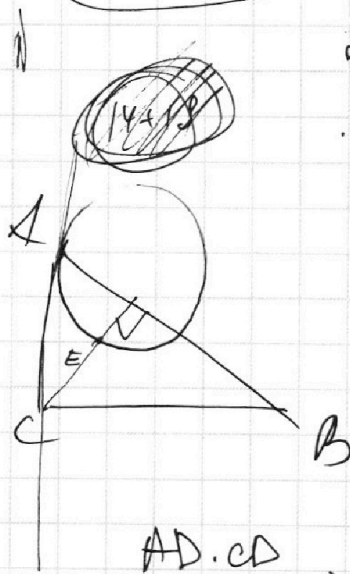
$$\frac{11+6+5}{2} = \frac{17+17+15+1}{2} = 12 + \frac{32}{2} = 22.$$

$$11+6+5 = 22$$

$$d + p + d + f + 2p \geq 32$$



$$\begin{array}{l} \frac{S_{ACD}}{S_{CEP}} = \frac{AD}{EF} \cdot \frac{CD}{CE} \\ \frac{1}{3} = \frac{13}{10} \\ Ae^2 = CE \cdot CD \\ \left(\frac{CD}{CE}\right)^2 \end{array}$$



$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{CE}{EF} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow EF = \frac{CE \cdot DB}{CD} \left(\frac{CD}{CE}\right)^2$$

$$\begin{array}{l} 5^2 - 3^2 = 12 \cdot 10^2 \\ 28 = 2 \cdot 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} CD \cdot 13 = a \sqrt{13^2 - a^2} \\ CD = \frac{a \sqrt{13^2 - a^2}}{13} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} CE = \frac{Ae^2}{CD} = \frac{a^2 \cdot 13}{a \sqrt{13^2 - a^2}} \\ = \frac{13a}{\sqrt{13^2 - a^2}} \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_a b \cdot \log_b a$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$$

~~$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$$~~

$$a^{\log_a b} = b$$

$$b = b \odot$$

$$\log_a^n b + \log_a^n c = \log_a^n (bc)$$

$$a^{\log_a^n b} + a^{\log_a^n c} = a^{\log_a^n (bc)}$$

$$b^n \cdot c^n = (bc)^n$$

$$(bc)^n = (bc)^n$$