



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8xz} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{yz} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Число a : $a = 2^{\alpha_a} \cdot 3^{\beta_a} \cdot 5^{\gamma_a}$

b : $b = 2^{\alpha_b} \cdot 3^{\beta_b} \cdot 5^{\gamma_b}$

c : $c = 2^{\alpha_c} \cdot 3^{\beta_c} \cdot 5^{\gamma_c}$, Тогда $abc = 2^{(\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c)} \cdot 3^{(\beta_a + \beta_b + \beta_c)} \cdot 5^{(\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)}$

1) Достаточно, чтобы числа разлагались только на эти 3 простых числа, так как если бы было число a' , которое содержало простой множит. ($\neq 2, 3, 5$), то мы всегда бы нашли a , которое меньше, не содержащий "лишний" простой множ., при этом уменьш. произв. abc , и которое не было бы на делимость.

2) Простые множители независимы, поэтому можно отдельно рассматривать $(2), (3), (5)$ и их степени.

$$\begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \\ \alpha_b + \alpha_c \geq 12 \\ \alpha_a + \alpha_c \geq 14 \end{cases} \begin{cases} "+" \\ "+" \end{cases} \Rightarrow 2(\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c) \geq 34 \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq 17$$

(минимально возможный вариант, иначе одной из пар не хватало бы "2")

Пример: $\alpha_a = 5$; $\alpha_b = 3$; $\alpha_c = 9 \Rightarrow \sum \alpha = 17$

$$\begin{cases} \beta_a + \beta_b \geq 14 \\ \beta_b + \beta_c \geq 20 \\ \beta_a + \beta_c \geq 21 \end{cases} \Rightarrow 2(\beta_a + \beta_b + \beta_c) \geq 55 \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq 27,5$$

Но у нас числа натуральные $\Rightarrow$ не может быть дробных степеней $(\beta_a, \beta_b, \beta_c) \Rightarrow \min(\beta_a + \beta_b + \beta_c) = 28$

Пример: $\beta_a = 8$; $\beta_b = 6$; $\beta_c = 14 \Rightarrow \sum \beta = 28$

$$\begin{cases} \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \\ \gamma_b + \gamma_c \geq 17 \\ \gamma_a + \gamma_c \geq 39 \end{cases} \rightarrow \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq 34$$

Пример для 34: $\gamma_a = 12$; $\gamma_b = 0$; $\gamma_c = 22 \Rightarrow \sum \gamma = 34$

Так как $\gamma_a + \gamma_c \geq 39$, то и вся сумма $\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq 39$

Пример: $\gamma_a = 12$; $\gamma_c = 27$; $\gamma_b = 0 \Rightarrow \sum \gamma = 39$

Ответ: $(abc)_{\min} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

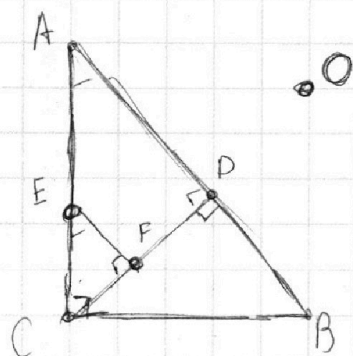
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) EF \parallel AB \Rightarrow \angle BAE = \angle FFC \\ \Rightarrow \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$$

$$2) \triangle CFE \sim \triangle CDA \text{ (по 2м угл.)}$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{EF}{AD}$$

$$S_{CFE} = CF \cdot EF \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{CDA} = CD \cdot AD \cdot \frac{1}{2}$$

$$3) S_{CFE} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \cdot S_{CDA} \text{ (треуг. подобия)}$$

$$4) S_{ADC} = \frac{5}{7} S_{ACB}, \text{ т.к. } \frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}, \text{ а } CD - \text{общ. высота.}$$

$$\Rightarrow S_{CFE} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 = \frac{5}{7} S_{ACB} \Rightarrow \left(\frac{CD}{CF}\right)^2 \cdot S_{CFE} = \frac{5}{7} S_{ACB}$$

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ACB}} = \left(\frac{CD}{CF}\right)^2 \cdot \frac{7}{5};$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

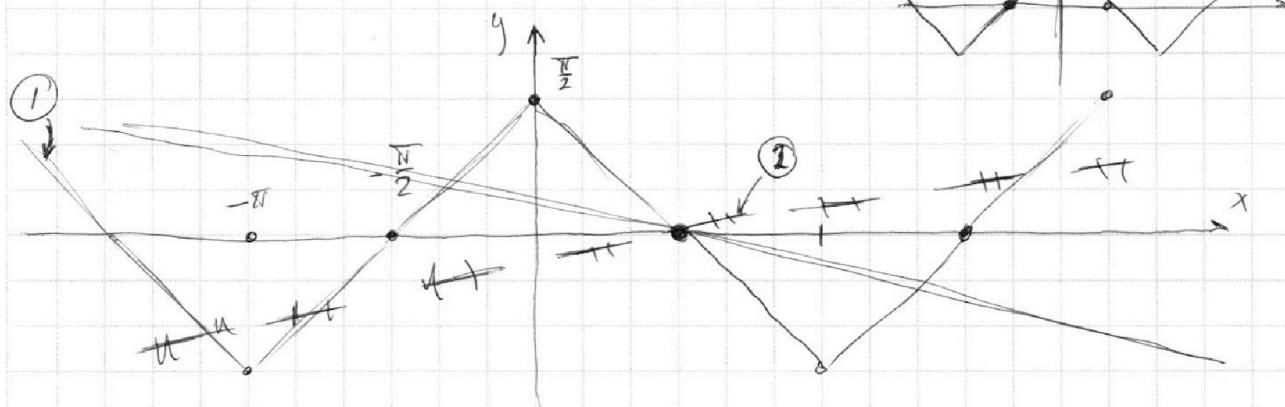
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

(мет $\pi/2$)

~~$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \pi - 2x;$$~~

$$① \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \quad ②$$



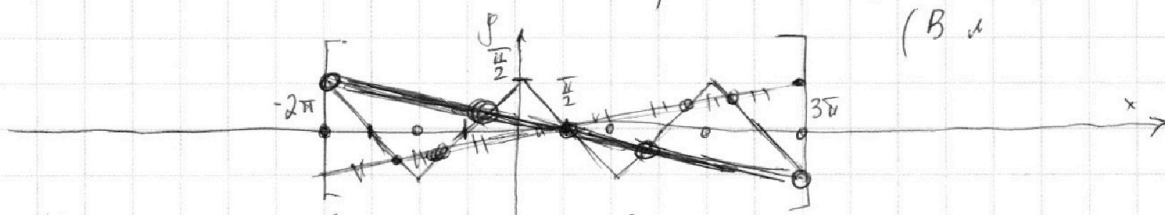
$$②: \text{Прямая с точкой вращения } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{10} - \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{10} = 0 \right)$$

и коэф. $(-\frac{2}{10}) = k$ у прямой.

Найдем ограничения для x : $1) \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x > -\frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2} > \frac{2}{10}x \Rightarrow (x < 3\pi)$

$$2) \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} < \frac{2}{10}x; \Rightarrow (-2\pi < x) \Rightarrow x \in [-2\pi; 3\pi]$$

(В.А.)



Из графика видно, что уравнение имеет 5 решений, найдем их.

$$1) \begin{cases} y = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \\ y_1 = -x - \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x = -x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{8}{10}x = -\frac{16\pi}{10} \Rightarrow x = -2\pi, y = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \begin{cases} y_2 = x + \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \end{cases} \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \Rightarrow \frac{12}{10}x = -\frac{4\pi}{10} \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{12}, y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$3) \begin{cases} y = x + \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \end{cases} \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = -x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{12}{10}x = -\frac{4\pi}{10} \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{12}, y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$4) \begin{cases} y = x + \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \end{cases} \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \Rightarrow \frac{12}{10}x = -\frac{4\pi}{10} \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{12}, y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) Из графика: $(x = \frac{\pi}{2}; y = 0)$

(мис $\sqrt{2}$)

$$4) \begin{cases} y = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x \\ y = x - \frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad \frac{\pi}{10} - \frac{2}{10}x = x - \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{12}{10}x = \frac{\pi + 15\pi}{10}; \quad 12x = 16\pi;$$
$$x = \frac{16}{12}\pi; \quad y = \frac{16}{12}\pi - \frac{3}{2}\pi = -\frac{2}{12}\pi = -\frac{1}{6}\pi$$

5) Из графика $(y = -\frac{\pi}{2}; x = 3\pi)$

Ответ: $(x = -2\pi; y = \frac{\pi}{2}); (x = \frac{-\pi}{3}; y = \frac{\pi}{6}); (x = \frac{\pi}{2}; y = 0);$
 $; (x = \frac{4}{3}\pi; y = \frac{-1}{6}\pi); (\cancel{x = 3\pi}; y = \frac{-\pi}{2})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Нарисуем систему:

$$2) ax - 3y + 4b = 0$$

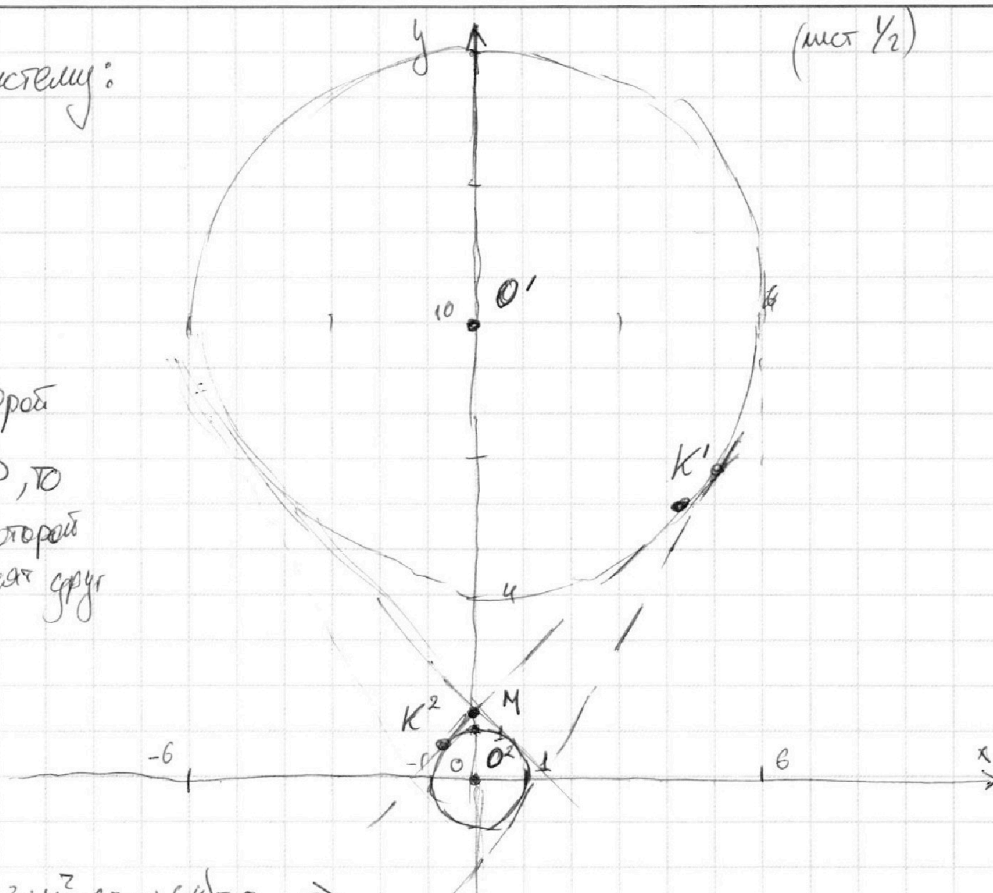
$$\frac{ax + 4b}{3} = y$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

- Прямая, у которой

$$k = \frac{a}{3}, \quad b' = \frac{4}{3}b, \text{ то}$$

есть прямая, у которой
k и b' не зависят друг
от друга.



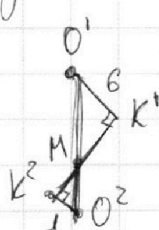
$$1) (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 20y + 100 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - \text{Окр. с цен. } (0,0) \quad R=1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 - \text{Окр. с цен. } (0,10) \quad R=6 \end{cases}$$

Вернемся к прямой; (Ещё все симм. отн. ОУ, поэтому для отриц. $\frac{a}{3}$)
Пока в рассужд. $k \rightarrow 0$ будет оцил.

Найдем общую касательную к окружностям. (Есть внешн. и внутр.)

1) Внутр.



$$\Delta O'K'M \sim \Delta O''K''M \quad \left(\begin{aligned} \angle O'K'M &= \angle K''O'' = 90^\circ \\ \angle K''MO'' &= \angle K'MO' \text{ (верт.)} \end{aligned} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{O'M}{O''M} = \frac{O'K'}{O''K''} = \frac{6}{1} = 6; \quad O'M = 6 O''M$$

$$\text{При этом } O'O'' = 10; \Rightarrow 7 O''M = 10; \quad O''M = \frac{10}{7}$$

$$O'M = \frac{60}{7}$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



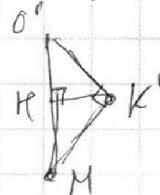
• Возьмем τ, M и проведем касательные к большой окр. (мех $\frac{7}{2}$)

$y_k = k^k x + b^k$; каждый коор

$$MK' = \sqrt{MO'^2 - O'K'^2} = \sqrt{\frac{3600}{49} - 36} = \sqrt{\frac{36 \cdot 100 - 36 \cdot 49}{49}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 51}{49}}$$

• Опустим из τ, K' перп. на $O'M \Rightarrow$

$\Rightarrow K'H \cdot O'M = MK' \cdot O'K' \quad (S_{\text{прямоуг.}})$



$$K'H = \frac{MK' \cdot O'K'}{O'M} = \frac{\frac{6}{7} \sqrt{51} \cdot 6}{\frac{60}{7}} = \frac{36}{60} \sqrt{51}; \rightarrow \text{Коорд } K' \left(\frac{6}{10} \sqrt{51}; y_{k'} \right) \quad (\text{по } x)$$

• Так как треугол подобны, но K' и K'' по разные стороны от $OY \Rightarrow K'' \left(-\frac{\sqrt{51}}{10}; y_{k''} \right)$ (знак по x в 6 раз меньше $k=6$ и с противоп. знаками)

$$y_{k''} = \sqrt{1 - \frac{51}{100}} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10}; \quad K'' \left(-\frac{\sqrt{51}}{10}; \frac{7}{10} \right)$$

• Построим уравнение прямой; $y = k^k x + b^k$

$$\begin{aligned} \tau, K'' \left\{ \begin{aligned} \frac{7}{10} &= k^k \cdot \left(-\frac{\sqrt{51}}{10} \right) + b^k \\ \frac{10}{7} &= b^k \end{aligned} \right. &\Rightarrow \frac{7}{10} - \frac{10}{7} = k^k \cdot \left(-\frac{\sqrt{51}}{10} \right); \quad \frac{49-100}{70} = -\frac{\sqrt{51}}{10} k^k \\ &\quad \frac{-51 \cdot 10}{-51 \cdot 70} = \frac{\sqrt{51}}{7} = k^k \end{aligned}$$

2) Внешн. касательная, у нее k^k всегда будет входить в рамки внутр. (видно из рисунка, что $|k^k_{\text{внеш}}| > |k^k_{\text{внутр}}|$)

• Внутр. касательная оптимальна (она является границей), т.к. если k^k будет меньше, то тогда 4 решений не будет (т.к. прямая уже не будет касаться какой-нибудь из окр. $\Rightarrow$ реш. < 4)

• Если k^k больше, то всегда будет 4 реш.; $k^k = \frac{a}{3}$; $a = 3k^k = 3 \cdot \frac{\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{51} \right) \cup \left(\frac{3}{7} \sqrt{51}; +\infty \right)$ (* т.к. симм. от OY)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ОДЗ: $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$

$\log_5 2x = t$; $t^4 - 3 \frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{5}{4}t} - 3$; $t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3t} + 3 = 0$;
 $t^4 - \frac{9+4}{3t} + 3 = 0$; $3t^5 - 13 + 9t = 0$; $t \neq 0$ (ОДЗ)

$3t^5 + 9t = 13$; $t(3t^4 + 9) = 13$; 1) Если $t < 0$, то $t(3t^4 + 9) < 0 \Rightarrow \times$
 2) Если $t > 0$, то реш. ег., т.к.
 $t(3t^4 + 9)$ - монотон. возраст.
 $\Rightarrow t$ - ег. реш. $\Rightarrow x$ - ег. реш.
 (т.к. они взаимно обратны.) При этом $t > 1$

2) $u = \log_5 y$: $u^4 + 4 \cdot \frac{1}{u} = -\frac{3}{u} - 3$; $u^4 + \frac{4}{u} + \frac{1}{3u} + 3 = 0$;
 $u^4 + \frac{12+1}{3u} + 3 = 0$; $3u^5 + 13 + 9u = 0$; $u \neq 0$ (ОДЗ: $y > 0, y \neq 1$)

$3u^5 + 9u = -13$; $3u(u^4 + 3) = -13$; 1) $u > 0 \Rightarrow u(u^4 + 3) > 0 \rightarrow \times$
 2) $u < 0$ - то реш. ег., т.к.
 $3u(u^4 + 3)$ - монот. убыв.
 $\Rightarrow u$ - ег. реш. $\Rightarrow y$ - ег. реш.
 При этом $u < -1$

3) xy - ег. вариант; $\log_5 2x = t$; $2x = 5^t$; $x = \frac{5^t}{2}$
 $\log_5 y = u$; $y = 5^u \Rightarrow xy = \frac{5^{t+u}}{2}$

4) $3(t^5 + u^5) + 9(u + t) = 0$; $3(t^5 + u^5) = -9(u + t)$; $\left(\frac{3}{-9} = \frac{(u+t)}{(u^5+t^5)}\right)$

- обе функции имеют один знак, т.к. $\left(\begin{matrix} t > 1 \\ u < -1 \end{matrix}\right) \Rightarrow \begin{matrix} u+t > 0 \\ \Rightarrow t^5+u^5 > 0 \end{matrix}$
 Но у нас $= 0$

$\Rightarrow (u+t) = 0$

$\Rightarrow xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$① \quad S_{\Delta X} + \Delta y = 45 \Rightarrow \Delta y = y_2 - y_1 : 5$$

$$② \Rightarrow 10 \text{ комбинаций} \quad \Delta x = x_2 - x_1 = 0 \quad \begin{matrix} \Delta y = 45 \\ \vdots \\ \Delta y = 0 \end{matrix}$$

3) Заметим, что в 17 и 81 строчках остаются все ~~22~~ (16+18) чисел. Тогда как в остальных только ~~22~~ (16+18-1)

$$\Rightarrow ① \Delta y = 0; \Delta x = 9 \Rightarrow \left(17 \cdot C_{34}^9 + (81-17) \cdot C_{33}^9 \right) / 2 \quad \left(\begin{matrix} \text{т.к.} \\ \text{порядок} \\ \text{важен} \end{matrix} \right)$$

$$② \Delta y = 5; \Delta x = 8 \Rightarrow \text{Прямоуг. } ((18-1) \times 5) \text{ и } 17.$$

17 * C

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

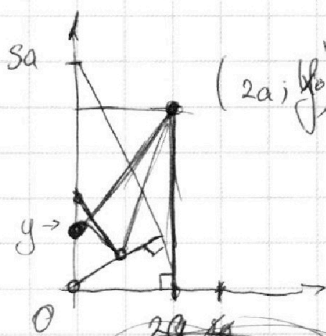
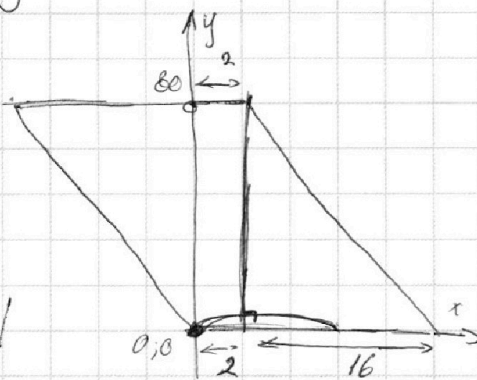


1) $Sx_2 - Sx_1 + y_2 - y_1 = 45$, $S\Delta X + \Delta Y = 45$

$\Rightarrow \Delta Y : 5$, т.к. $\begin{cases} S\Delta X : 5 \\ 45 : 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta Y = 0; \Rightarrow \Delta X = 9; \\ \Delta Y = 5; \Rightarrow \Delta X = 8; \\ \Delta Y = 45; \Rightarrow \Delta X = 0 \end{cases}$ 10 комбинаций;

1)



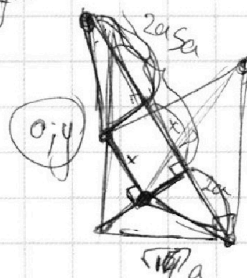
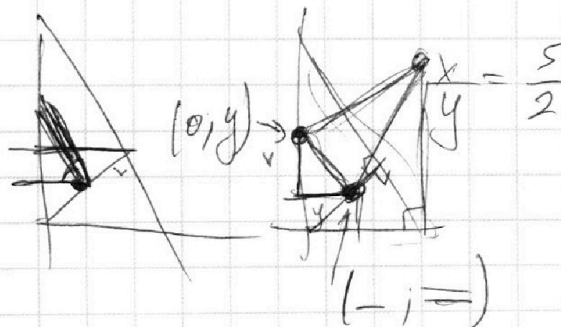
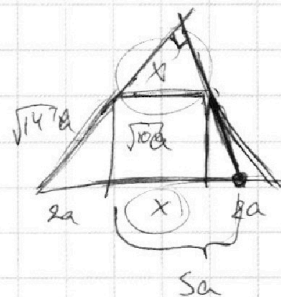
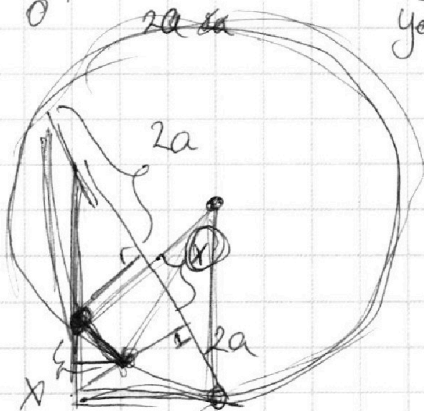
$4a^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{4a^2 + y^2}$

$(x-2a)^2 + (y-y_0)^2 = y_0^2$

$y_0^2 = (2a)^2 + (y-y_0)^2$

$y_0^2 = 4a^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2$, $D = 4y^2 - 16a^2$

$y = \frac{2y_0 \pm \sqrt{D}}{2}$



$2(0 - \frac{1}{2}) = S(y - \frac{1}{2})$

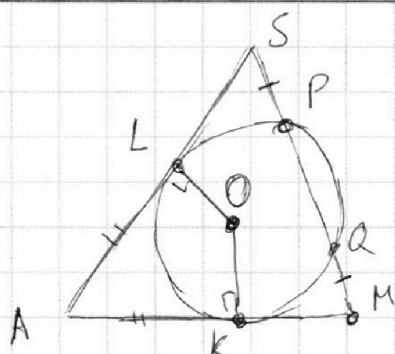
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



а) • Рассмотрим (SAM)

ОК ⊥ QK ⊥ KA

1) AS и AM — касат. к шару ⇒

$$AL = AK$$

$$2) SL^2 = SP \cdot SQ = PR \cdot QM = KM^2$$

⇒ MK = LS (касат. и сек. к окр.)

$$3) AS = AM = 16$$

4) Треугольник $\triangle M$ делит AA_1 в отн 2:1 счит. от верш. (M — пересеч. медиан.)

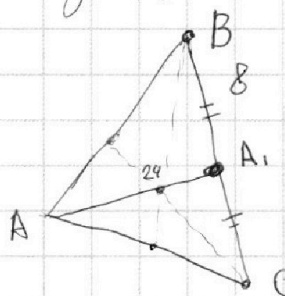
$$\Rightarrow MA' = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \Rightarrow AA' = 24$$

$$5) S_{AB_1C} = 100 = \frac{1}{2} \sin \angle AA'B \cdot AA' \cdot BC$$

$$200 = 24 \cdot 16 \cdot \sin \angle AA'B$$

$$\sin \angle AA'B = \frac{25}{48} \quad AB^2 = AA_1^2 + BA_1^2 - 2 BA_1 \cdot AA_1 \cdot \cos \angle AA_1B$$

$$AB^2 = 576 + 64 - 384 \cdot \frac{\sqrt{73 \cdot 23}}{48} = 576 + 64 - 8 \sqrt{73 \cdot 23} = 640 - 8 \sqrt{73 \cdot 23}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

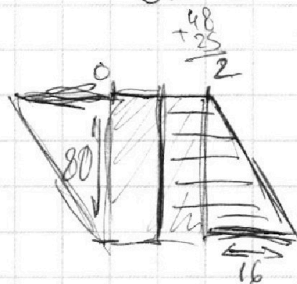
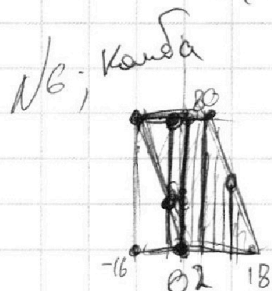


15) $\log_5^4(2x)$ $\log_5 2x = t$; $t^4 - 3\frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{3}{4}t} - 3$; $t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3t} + 3 = 0$

$t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0$; $3t^5 - 13 + 9t = 0$; $t \neq 0$; $t + \frac{1}{2}$

$3t^5 + 9t - 13 = 0$; $t = 1$; $3 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 - 13$

$t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0$; $t(t^4 + 3) = \frac{13}{3}$; $t + \frac{1}{3} + 1 = 13$

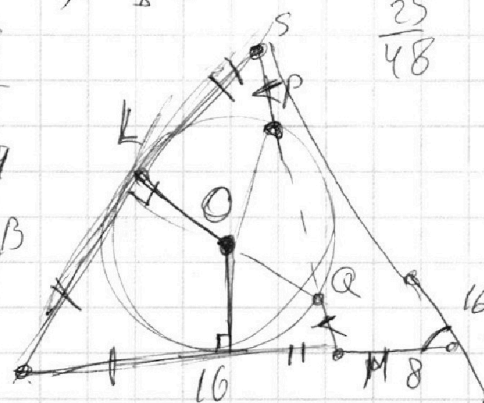
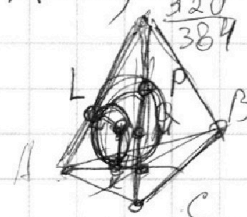


$5x_2 + 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$;

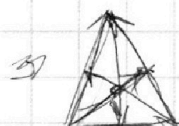
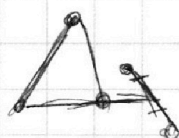
$5\Delta x + \Delta y = 45$;

$\Delta x + \frac{\Delta y}{5} = 9$;

$\sqrt{\frac{48^2 - 25^2}{48^2}}$



$(AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1)$



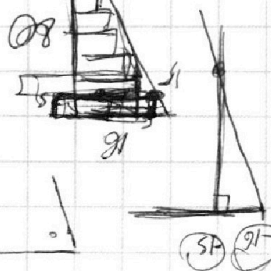
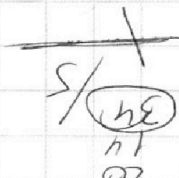
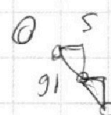
$\sqrt{48^2 - 25^2}$

$\sqrt{48^2 - 25^2}$



$\sqrt{48^2 - 25^2}$

$S = p \cdot h$



$S = p \cdot h$

$S = p \cdot h$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

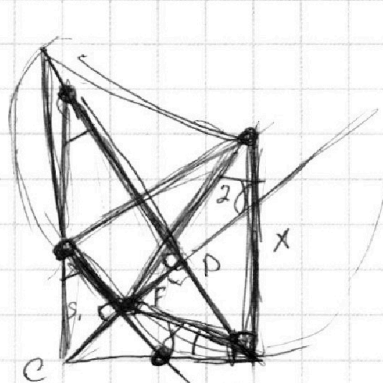
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{S_1 F}{S_1 D} \right)^2$$

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{5}{7}$$

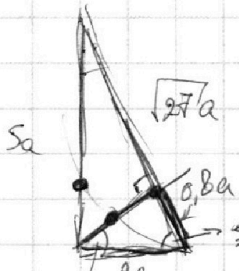
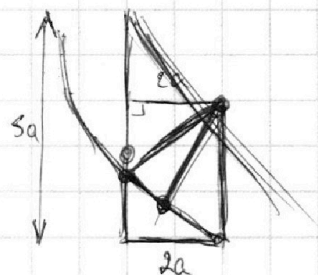
$$S_3 = \frac{7}{5} S_2 = \frac{7}{5} \cdot \frac{S_1 D^2}{S_1 F^2} \cdot S_1$$

$$\sqrt{0.500 \cdot 0.500 \cdot 0.500} - \sqrt{0.400 \cdot 0.400} = 0.500$$

$$\frac{CF}{FD} = \frac{CE}{EA}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

836?

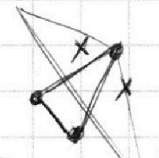
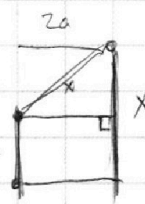


$$\sin \alpha = \frac{5}{2}$$

$$4 - \frac{64}{100} = \frac{336}{100} = \frac{\sqrt{336}}{10}$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$$



$$\sqrt{29}a$$

ΔX

$$X = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}}$$

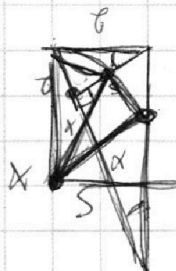
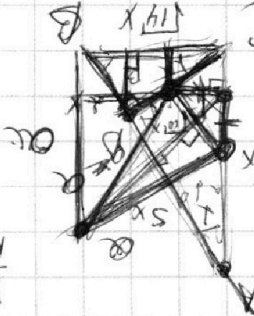
$$DH = CB = CD = DB$$



$$\frac{DB}{AB} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow CD^2 = 10 \times 2$$

$$CD = \sqrt{20}$$

$$\frac{DB}{AB} = \frac{CD}{AD}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

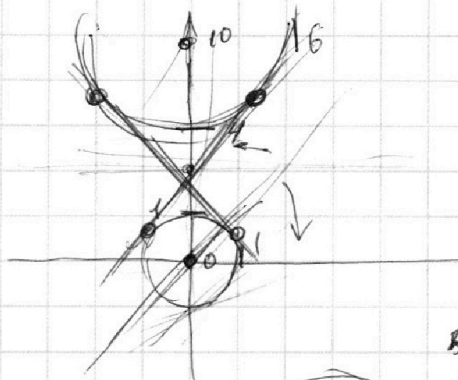
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



✓4



$$x^2 + y^2 - 20y + 100 = 36$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 6^2$$

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$ax = 3y; \quad \frac{ax}{3} = y;$$

$$\frac{ax + 4b}{3} = y;$$

$$\frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b = y$$

$$625 = 5^4; \quad 8x^3 = (2x)^3$$

NS;

$$\log_5 2x = \frac{1}{2}; \quad (2x > 0)$$

$$\frac{1}{2}^4 - 3 \frac{1}{2} = \frac{1}{16} - \frac{3}{2} = -\frac{23}{16}$$

$$\frac{1}{3}u^4 + 4 \frac{1}{u} = -\frac{1}{3}u \quad (-3)$$

$$\log_5 y = u; \quad \frac{1}{5} = 0,2$$

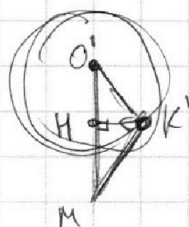
$$u^4 + \frac{4}{u} + \frac{3}{u} \neq 3 = 0;$$

$$u^5 + 12 + 3u = 0$$

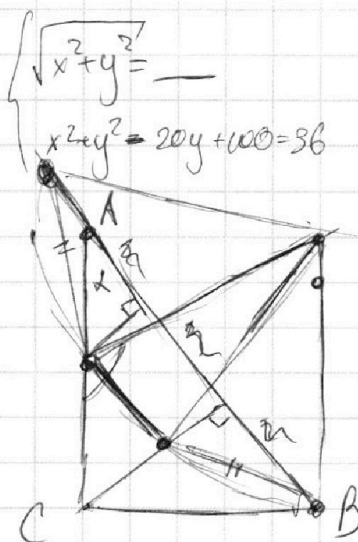
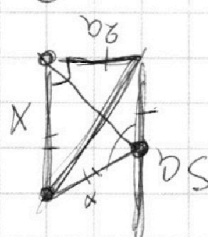
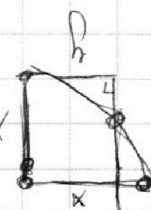
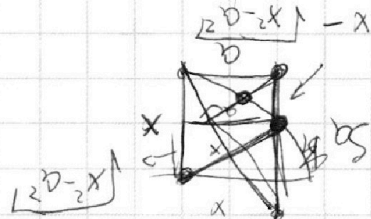
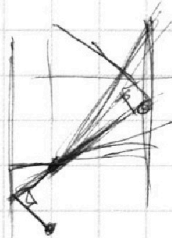
$$u \neq 0$$

$$\frac{4}{u} + \frac{3}{u} \geq 2 \sqrt{\frac{12}{u^2}} = \frac{2\sqrt{12}}{u}$$

$$u - \text{нужно?}$$



$$K'H = O'M = O'K' = MK'$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1
 $abc = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot c$
 $bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$
 $ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \rightarrow$

$$\begin{cases} x_B + x_C = 12 \\ x_A + x_C = 14 \\ x_A + x_B = 8 \\ x_A + x_B + x_C \rightarrow \min \end{cases}$$

17

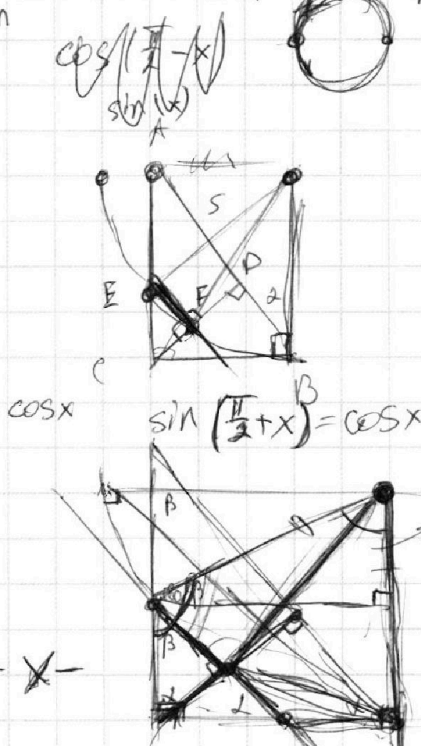
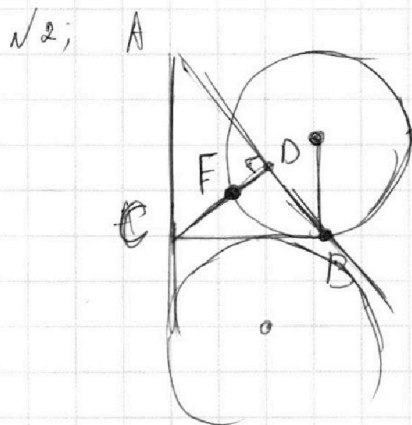
$$\begin{aligned} 5+3 \\ 3+9 \\ 9+5 \end{aligned}$$

$$4+20+21 = 34+21 = 55$$

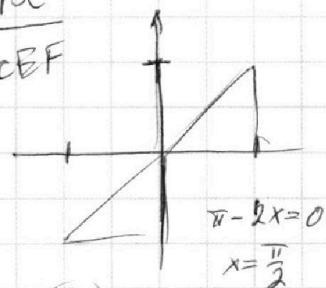
$$14 = \frac{1}{2} + 13\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 1 \\ a+c=1 \\ 50 \\ 18 \\ 68 \\ 34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot 6 &= 14 \\ 6 \cdot 14 &= 20 \\ 8 \cdot 14 &= 22 \end{aligned}$$



ABC
SCEF



$$\frac{128}{8} = \frac{8}{128-144} = \frac{2}{128} - \frac{8}{144}$$

$$10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x;$$

$$\begin{cases} 100(1-x^2) = \pi^2 + 4x^2 - 4\pi x; & 100 - 100x^2 = \pi^2 + 4x^2 \\ \pi > 2x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x > 1/2 - \\ x < 1/2 - \\ x \cdot \frac{0.1}{2} > \frac{0.1}{11.4} - \end{aligned}$$

$$x \cdot \frac{0.1}{2} > \frac{0.1}{15.5 - 11}$$

$$11.5 > x$$

$$x < 11.9$$

$$x \cdot \frac{0.1}{2} < \frac{0.1}{12.9}$$

$$\frac{0.1}{2} < \frac{0.1}{12.5 + 11}$$

$$\frac{9}{F} = \frac{9}{C-8} = \frac{2}{3} - \frac{2}{n}$$

$$\frac{1}{11} < x \cdot \frac{0.1}{2} - \frac{0.1}{11}$$

