



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $t_5 \geq x_5 + y_5 + z_5 \geq z_5 + x_5 \geq 28$

Т.е. $\begin{cases} t_2 \geq 18 \\ t_3 \geq 30 \\ t_5 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow \text{обл. } 2^{18} 3^{30} 5^{28} \Rightarrow \text{обл. } 2^{18} 3^{30} 5^{28}$

А ровно таким abc быть может при:

$$a = 2^4 3^9 5^{11}$$

$$b = 2^2 3^5 5^0$$

$$c = 2^{12} 3^{16} 5^{17}$$

Тогда $ab = 2^6 3^{14} 5^{11} : 2^6 3^{11}$

$$bc = 2^{12} 3^{21} 5^{17} : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$$

$$ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28} : 2^{13} 3^{25} 5^{28}$$

$$\text{и } abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$$

Отв: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Даны два им числа a, b , с их простые множители
простое число p входит в a, b , с в степени x_p, y_p
соответственно. Простое p входит в ab в степени $t_p = x_p + y_p$
Тогда $ab: 2^6 3^{13} 5^{11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 + y_2 \geq 6 \\ x_3 + y_3 \geq 13 \\ x_5 + y_5 \geq 11 \end{cases}$$

$$b \leq 2^{14} 3^{21} 5^{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 + z_2 \geq 14 \\ y_3 + z_3 \geq 21 \\ y_5 + z_5 \geq 13 \end{cases}$$

$$a \leq 2^{16} 3^{25} 5^{28} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_2 + x_2 \geq 16 \\ z_3 + x_3 \geq 25 \\ z_5 + y_5 \geq 28 \end{cases}$$

Итого:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 6 \\ y_2 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + x_2 \geq 16 \\ x_3 + y_3 \geq 13 \\ y_3 + z_3 \geq 21 \\ z_3 + x_3 \geq 25 \\ x_5 + y_5 \geq 11 \\ y_5 + z_5 \geq 13 \\ z_5 + x_5 \geq 28 \end{cases} \quad \text{Круговые} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 36 \\ 2(x_3 + y_3 + z_3) \geq 59 \\ 2(x_5 + y_5 + z_5) \geq 52 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t_2 \geq 36 \\ 2t_3 \geq 59 \\ 2t_5 \geq 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 \geq 18 \\ t_3 \geq 29,5 \\ t_5 \geq 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 \geq 18 \\ t_3 \geq 30 \\ t_5 \geq 26 \end{cases}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) ~~Пусть~~ Пусть $\sin x = t$, тогда $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = t$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \quad (=)$$

$$\Rightarrow 10 \arccos(t) = 9\pi - 2x \quad (=)$$

$$\Rightarrow 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x \quad (=)$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \begin{cases} 10(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi k) = 9\pi - 2x \\ |\frac{\pi}{2} - x - 2\pi k| \leq \pi \end{cases}$$

Отсюда также, если x - решение, то

$$10\pi \geq 9\pi - 2x \geq 0 \quad (\pi - 4\pi \geq \frac{\pi}{2} - x - 2\pi k \geq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\pi \geq 9\pi - 2x \\ 9\pi \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{2} \geq x \\ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$$

А еще по mod 2π :

$$\begin{cases} 10(\frac{\pi}{2} - x) \equiv 9\pi - 2x \\ 10(x - \frac{\pi}{2}) \equiv 9\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\pi - 10x \equiv 9\pi - 2x \\ 10x - 5\pi \equiv 9\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x \equiv -2x \\ 10x \equiv -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x \equiv 0 \\ 12x \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : 8x = 2\pi k \\ \exists k \in \mathbb{Z} : 12x = 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi k}{4} & (1) \\ \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi k}{6} & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1):

Тогда $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}] \Rightarrow \frac{\pi k}{4} \in [\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow k \in [2, 18]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При этом исходные уравнения имеют вид.

$$\begin{cases} \exists e \in \mathbb{Z}: \left| 10 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{4} - 2\pi e \right| = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{2} (=) \\ \left| 10 - \frac{\pi k}{2} - 4\pi e \right| \leq \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists e \in \mathbb{Z}: \begin{cases} |10 - 5k - 40e| = 18 - k \text{ ~~не выполняется~~ } \\ |2 - k - 8e| \leq 4 \end{cases}$$

~~Поскольку~~ $10 : 5, -5k : 5, -40e : 5, \text{ а } 18 - k$

~~значит~~ остался лишь 2: а значит, $18 - k : 5$,

а ещё $k \in [2; 18)$, т.е. $k \in \{3; 8; 13; 18\}$

Если $k=3$, то второе пер-во удовлетворяет $e=0$. Тогда $|10 - 5k - 40e| = |10 - 15| = 5 \neq 15$ Не подходит.

Если $k=8$, то второе пер-во даёт $e=-1$,

и тогда $|2 - k - 8e| = 2$, а $|10 - 5k - 40e| = 10 = 18 - 8 = 10$

Подходит, т.е. $x = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$

Если $k=13$, то второе пер-во даёт $e=-1$,

и тогда $|2 - k - 8e| = |2 - 13 + 8| = |2 - 5| = 3$,

а $|10 - 5k - 40e| = 15 \neq 18 - 13$ Не подходит.

Если $k=18$, то $18 - k = 0$, значит, $|2 - k - 8e| = 0$, т.е. $18 + 8e = 0$,

т.е. $e=-2$ и он подходит: $x = \frac{9\pi}{2}$.

(лучше 12)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{тогда } x = \frac{\pi k}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x \in \left[\frac{5}{2}, \frac{9\pi}{2} \right] \Leftrightarrow \frac{\pi k}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \in [3; 27]$$

При этом члх. гр-е имеет вид:

$$\exists e \in \mathbb{Z}: \begin{cases} \left| 15 \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{6} - 2\pi e \right| = 2\pi - \frac{\pi k}{3} (=) \\ \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{6} - 2\pi e \right| \leq \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{Z}: \begin{cases} |15 - 5k - 60e| = 27 - k, \\ |3 - k - 12e| \leq 6 \end{cases}$$

$15; 5, -5k; 5, 60e; 5$. значит, $27 - k; 5$, а

еще $k \in [3; 27]$, т.е. $k \in \{7; 12; 17; 22; 27\}$.

Рассмотрим первую строку по mod 60:

$$|15 - 5k - 60e| = 27 - k \Leftrightarrow \begin{cases} 15 - 5k = 27 - k \\ 5k - 15 = 27 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = -12 \\ 6k = 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4k + 12 = 0 \\ 6k - 42 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 3 = 0 \\ k - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = 7 \end{cases}, \text{ значит, } k = 22 \text{ не подходит.}$$

Отсюда $k \in \{7; 12; 17; 27\}$.

$k = 27$, т.е. $x = \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}$ подходит, как мы видели ранее.

$k = 12$, т.е. $x = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$ подходит, как мы видели ранее.

Отсюда

$k \in \{7; 17\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $k=7$, то $27-k=20$, значит, $|3-7-12\ell|=4$, т.е. $\ell=0$
и такие k и ℓ не подходят. Т.е. $x = \frac{75}{6}$

Если $k=17$, то $27-k=10$, значит, $|3-17-12\ell|=2$, т.е.
 $|14+12\ell|=2$, т.е. $\ell=-1$. и такие k и ℓ не
подходят, т.е. $x = \frac{175}{6}$

Ответ: $\left\{ \frac{95}{2}; 25; \frac{75}{6}; \frac{175}{6} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из первых, эти к подходят, т.е. если $k > 0$, то
нам подтёт прямая (B_1) , повернутая
относ A в ~~полож.~~^{отриц.} напр (т.е. $k < \frac{7\sqrt{2}}{8}$) относительно точки A ,
т.е. пересеки. обр. окр-ти. Если $k < 0$, то
нам подтёт прямая (B_2) , повернутая
в ~~полож.~~^{отриц.} напр, т.е. $(k < -\frac{7\sqrt{2}}{8})$, относительно точки A ,
и поскольку B_1 ближе к A , то теперь
прямая ещё ближе к A и к B_2 , т.е. пересеки,
то не все. другие окр-ти.

Если же $|k| \geq \frac{7\sqrt{2}}{8}$, то такая прямая
очевидно не подходит, т.е. если её точка
пер-я слева x правее A (более шире), то
она не перпендикулярна первой
окружности (а именно ^(левее) ~~внутри~~) (т.е.
это верно для точки A , тем более для B_1).

до B_2 будет > 5).

значит, $k \in (-\frac{7\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{5}{6} ; \frac{7\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{5}{6})$.

Ответ: $(-\frac{35\sqrt{2}}{48} ; \frac{35\sqrt{2}}{48})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) B_x - проекция точки B на ось Ox (пусть её координата x)

Тогда $|B_2 B_x|^2 = |B_1 B_x|^2$, т.е.

$$25 - |B_1 B_x|^2 = x \cdot \left(\frac{45}{7} - x\right) (=)$$

$$(>) \quad 25 - x^2 = \frac{45}{7}x - \frac{45}{7}x^2 (=)$$

$$(<) \quad 25 = \frac{45}{7}x \Rightarrow x = \frac{35}{9} \Rightarrow x = \frac{35}{9}$$

А значит, вторая координата точки B_2 : $\sqrt{25 - \left(\frac{35}{9}\right)^2} =$

$$= \frac{\sqrt{(9 \cdot 5)^2 - 35^2}}{9} = \frac{\sqrt{45^2 - 35^2}}{9} = \frac{20\sqrt{2}}{9}$$

Значит, угловой коэф. вкрутку кас: $\frac{\frac{20\sqrt{2}}{9}}{\frac{45}{7} - \frac{35}{9}} =$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{4}{9} - \frac{7}{9}} = \pm \frac{28\sqrt{2}}{3^2 - 7^2} = \pm \frac{28\sqrt{2}}{2 \cdot 16} = \pm \frac{14\sqrt{2}}{16} = \pm \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

т.е. твердая, что угловой коэф. $k \in \left(-\frac{7\sqrt{2}}{8}, \frac{7\sqrt{2}}{8}\right)$

~~Handwritten calculations and diagrams showing various algebraic steps and a geometric diagram of a circle with points A, B, and C.~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поменив x и y в системе координат мы получим эллипс заданную мы находим все k , такие, что прямая с угл. коэф k , будет пересекать эллипс. Окр-ти с центром в $(0,0)$ радиус 5 и с центром в $(9,0)$ радиус 2 , т.е. все такие k , что прямая с угл. коэф k будет их пересекать, но не касаться. (тогда $k_1 = \frac{1}{5}$, а $k_2 = -\frac{5}{6}k$).

~~$X_1(0; -5), X_2(0; 5), X_3($~~

~~$X_1(-5; 0), X_2(5; 0), X_3(7; 0), X_4(4; 0)$~~

~~$Z_1(0; 0), Z_2(9; 0)$~~ - центры окр-т

~~A~~ - точка пересечения внут. обш. сек. (внут. обш. сек. - это (B_1, L_1) - вкл. (B_2, L_2))

~~B_2, L_2~~ - сплоск. u, v , L_2 (окр-та) (фиг. 1)

Мы знаем, что поворот центра A переводит окр-1

в окр-2, значит, её радиус $\pm \frac{2}{5}$, т.е. $-\frac{2}{5}$ в макс. (на)

A значит, $\frac{|Z_1 A|}{|A Z_2|} = \frac{5}{2}$, т.е. $A(\frac{9-5}{2-5}, 0)$, т.е. $A(\frac{4}{-3}, 0)$.

Тогда $|Z_1 A| = 5$, $|Z_2 A| = \frac{4}{3}$, а значит, $|B_2 A| = \sqrt{\frac{45-4}{9} - 25} =$

$$= \frac{\sqrt{45^2 - 35^2}}{7} = \frac{\sqrt{(45-35)(45+35)}}{7} = \frac{\sqrt{10 \cdot 80}}{7} = \frac{20\sqrt{2}}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Рассмотрим в плоскости Oxy окружность, одна из точек которой $A(5, 0)$.
Найти уравнение окружности, если известно, что она касается прямой $l: x^2 + y^2 - 25 = 0$, т.е.
 $y - 9)^2 + x^2 - 4 = 0$, т.е.

Введём декартову систему координат Oxy так, чтобы точка $A(5, 0)$ лежала на оси Ox , а центр окружности $O(0, 0)$.

В $O(0, 0)$ радиус R и уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$.
Поскольку окружность касается прямой l , то первое уравнение задаёт прямую. Т.е.

нам известно, что прямая l и окружность

пересекаются в одной точке (касание).

а $a = 0$ нам подходит, т.е. l — это $x = 0$, т.е. l — ось Oy .

Значит, окружность $x^2 + y^2 = R^2$ касается оси Oy в точке $(0, -5)$, $(0, 5)$, $(0, 4)$, $(0, 11)$.

Получается, что если $a \neq 0$, то уравнение окружности

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}, \quad \text{т.е. нам нужно найти все}$$

такие, что окружность касается прямой l в точке $A(5, 0)$.
Прежде всего, коэффициент $k = -\frac{b}{a}$, т.е. найдём все

возможные угловые коэффициенты k ($k = 0$).

Одним из них является $k = 0$, т.е. окружность касается прямой l в точке $A(5, 0)$, а все остальные будут получены как $k = -\frac{b}{a}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Условие гравитации:

$$\begin{cases} \left(\frac{p_n(x)}{p_n(y)} \right)^4 - 6 \frac{p_n(1)}{p_n(x)} = \frac{p_n(1)}{p_n(x^3)} - 5 \\ \left(\frac{p_n(0,5y)}{p_n(1)} \right)^4 + \frac{p_n(1)}{p_n(0,5y)} = \frac{p_n(1)}{p_n(0,5y)^3} \end{cases} \quad \begin{matrix} p_n = 9, \\ p_n(1/5) = 6, \\ p_n(1) = 6. \end{matrix} \quad (=)$$

$$\begin{aligned} (=) \quad & \left(\frac{a}{c} \right)^4 - \frac{6c}{a} = \frac{-2c}{3a} - 5 \\ & \left(\frac{b}{c} \right)^4 + \frac{c}{b} = \frac{-13c}{3b} - 5 \end{aligned} \quad (=)$$

$$\begin{aligned} (=) \quad & \begin{cases} \left(\frac{a}{c} \right)^4 = \frac{16c}{3a} - 5 \\ \left(\frac{b}{c} \right)^4 = \frac{-16c}{3a} - 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{пу } \frac{a}{c} = z, \text{ } \frac{b}{c} = k \end{matrix} \\ & (=) \quad \begin{cases} z^4 = \frac{16}{3} z^{-1} - 5 \\ k^4 = \frac{-16}{3} k^{-1} - 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Важно
вспомогательн
(=)
"замена" $z^5 + 5z = \frac{16}{3}$
и $5z$ не возм
но пров-та-н

$$\begin{aligned} & z^5 + 5z = \frac{16}{3} \\ & k^5 + 5k = -\frac{16}{3} \end{aligned} \quad (=) \quad \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \text{склад.} \\ & (1) \Rightarrow z^5 + k^5 + 5(z+k) = 0 \quad (=) \quad (k+z)(k^4 - k^3z + k^2z^2 - kz^3 + z^4 + 5) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (=) \quad & \begin{cases} k+z=0 \\ k^3(k-z) + k^2z^2 - z^3(k-z) + 5 = 0 \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} k+z=0 \\ (k^3-z^3)(k-z) + k^2z^2 + 5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\Rightarrow) \begin{cases} k+z=0 \\ (k-z)(k-z)(k^2-kz+z^2)+k^2z^2+5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ (k-z)^2(k^2-kz+z^2) < 0 \end{cases}$$

$k+z=0$
тогда
 $k^2-kz+z^2 < 0$
но
 $k^2-kz+z^2 \geq 0$
поэтому
только
0,0
или 0,0

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ k^2-kz+z^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ \left(\frac{k}{z}\right)^2 - \frac{k}{z} + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ t^2-t+1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ \exists t \in \mathbb{R}: t^2-t+1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ 1-4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ -3 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k+z=0$$

Чтобы мы помнили, что для всех решений (1)
верно $k+z=0$ и хотя бы одно реш. есть (или
ур-е имеет ст. всегда имеет вещ. корни)
значит, $k+z$ бывает 0 и только 0, т.е.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 0, \text{ т.е. } a+b=0, \text{ т.е. } \ln(x) + \ln(y) = 0,$$

$$\text{т.е. } xy=1 \text{ и } \ln(0,5xy) = 0, \text{ т.е. } 0,5xy = 1, \text{ т.е.}$$

$$xy=2$$

$$0,5xy=1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда один из 10 к даёт значения

$$\begin{aligned} & [12k+1; 12k+96] \\ & [12k+1; 12k+97] \\ & [12k+2; 12k+98] \\ & [12k+3; 12k+99] \\ & [12k+4; 12k+100] \\ & [12k+5; 12k+107] \end{aligned}$$

и ещё две в блоке $[-7; 95]$.

Блоки от $k=0$ до 14.

Потом получаем величины для модуля

z первые $z+1$ отрезки блока дают значения с

$2k$, а ост. — значения с $2k+1$, и заканчивая

первые z на $2k+15$, а ост. — значения с $2k+16$,

кроме того, который на единицу больше,

Можно начать отрезков, которые

устроены так, что между ними нет

комм. Это $-7, 0, 1, \dots, 5, 12, 13, \dots, 17, 24, 19, \dots$

$84, 85, 86, 87, 88, 89, 90$, а все остальные

не будут иметь значения 96 — это 95, кот. вып.
дан, а 100 и остальные числа $12x+a$ будут

$12x+a-1$ комм. для $12(x-8)+a-1$, если $a \neq 0$,
и если $a=0$, то $12-1$ комм. для $12x$ строки для
 $x-9$ и значения с 97 x не в строке (больше).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично, мы можем рассмотреть и коши
существенные коши, не имеющие следствий
в 1-том числе, это

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$[12k; 12k - 102]$$

~~$$[12k - 102; 12k]$$~~

$$[12k + 1; 12k - 95]$$

$$[12k - 95; 12k + 1]$$

$$[12k + 2; 12k - 94]$$

$$[12k - 94; 12k + 2]$$

$$[12k + 3; 12k - 93]$$

$$[12k - 93; 12k + 3]$$

$$[12k + 5; 12k]$$

$$[12k - 92; 12k + 4]$$

$$[12k - 91; 12k + 5]$$

$$[12k - 90; 12k + 12]$$

Примечание: k принимает значение от 0 до 14. Если $k=0$, то отрезок $(12k - 102; 12k)$ может и принимать 0.

Т.е. наши значения получаются какими-то

отрезками, возможно, одно значение несколько раз.

Пересчитаем все приемлемые значения

на их сумму по модулю 6. Значения

при фиксированном k вычтем и получим значение v в величине $\frac{v-1}{6}$.

Добавим по всем значениям

ответа и получим. Ответом будет

количество пар значений k и v с 100 .

48.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Выполним преобразование по формуле:~~

~~$(x, y) \rightarrow (x + \frac{y}{6}, y)$ $6x - y$ $y - 6x$~~

~~Все точки угла лежат в паре - гр. или нет? Виз. $6x$~~

Для каждой точки, (координаты или (x, y))
запишем ^{величину} $y - 6x$.

Для $y = 6k$ в пар - гр. имеют

точки с коорд x от $-k$ до $17-k$

(т.е. это верно для $y = 0$, и $(-15; 90)$ и $(-1; 6)$)

т.е. они дают величины от $6k + 6k$ до $6k + 6k - 176$
для $y = 6k + a$ в пар - гр. имеют точки ^{порозу}

с коорд x от $-k$ до $16-k$ (т.е.

в строке с коорд y не меньше имеют эти точки,

а в строке пар - гр. паре: $(-1; 6)$,

значит, величина ^{разн} от $6k + a + 6k$ до $6k + a + 6k - 166$,

т.е. по всем строкам (взвешив коорд y)
^{покажем более строки}
от $6k + 1$ до $6k + 5$ величина
будет