



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

3 степени входят 2 в $a = \alpha$, в $b = \beta$, в $c = \gamma$

тогда имеем

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 8 & (\text{т.к. } : 2^8) \\ \beta + \gamma \geq 12 & (\text{т.к. } : 2^{12}) \\ \alpha + \gamma \geq 14 & (\text{т.к. } : 2^{14}) \end{cases}$$

аналог.
система

$$\alpha + \beta + \gamma \geq \frac{8 + 12 + 14}{2} = 17 \text{ - достигается при } \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 9 \end{cases}$$

~~Аналог.~~

переопределим α, β, γ как ст. вхожд. 3
тогда имеем

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 14 & \text{аналог.} \\ \beta + \gamma \geq 20 & \text{аналог.} \\ \alpha + \gamma \geq 21 & \text{аналог.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \geq \frac{14 + 20 + 21}{2} = 7 + 10 + 10,5 = 27,5$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \geq 28 \text{ достигается при } \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = 6 \\ \gamma = 14 \end{cases}$$

аналогично переопределим α, β, γ как ст. вхожд. 5
имеем:

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 12 \\ \beta + \gamma \geq 17 \\ \alpha + \gamma \geq 39 \end{cases}$$

$$\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \geq 39 \text{ достигается при } \begin{cases} \alpha = 17 \\ \gamma = 22 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

т.о. $abc: 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$,
рав-во достигается при:

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

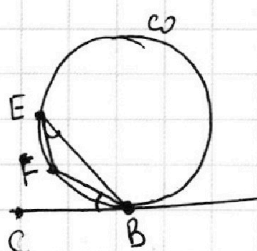
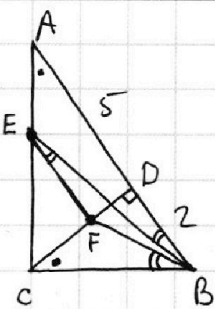
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



обозначим окр-ть ω условие $3a$

$$\omega_{\text{кас}}(CB) \Leftrightarrow \angle FBC \text{ опир на } \omega \text{ в } B \\ \Leftrightarrow \angle BEF = \angle FBC = \frac{\angle B}{2}$$

$$\nexists \triangle ABC \quad \angle FBC = \angle BEF \\ \text{по усл } (EF) \parallel (AB) \Rightarrow \angle FEB = \angle EBA \Rightarrow$$

$$\angle C = 90^\circ - \angle B = \angle A$$

$$\Rightarrow \triangle BEA \sim \triangle BFC \quad (\text{по 2м углам}) \quad (*)$$

$$\exists \frac{|CE|}{|CA|} = k$$

$$\exists |AD|=5, |BD|=2 \quad (\text{с точностью до отношений можно брать координаты, т.е. вместо } 5x, 2x, x \in \mathbb{R} \text{ рассмотреть } 5 \text{ и } 2)$$

$$|CD| = \sqrt{|BD| \cdot |AD|} = \sqrt{10} \quad (\text{св-во прямиуг. } \triangle)$$

$$|CB| = \sqrt{|BD|^2 + |CD|^2} = \sqrt{4+10} = \sqrt{14}$$

$$|AC| = \sqrt{|CD|^2 + |AD|^2} = \sqrt{25+10} = \sqrt{35}$$

$$\text{тогда } |CE| = k \cdot |AC| = k\sqrt{35}$$

$$\text{по теор Паралл: } (EF) \parallel (AD) \Rightarrow \frac{|CF|}{|CD|} = k \quad (= \frac{|CE|}{|CA|})$$

$$\text{т.о. } |CF| = k \cdot |CD| = k\sqrt{10}$$

$$|EA| = |AC| - |CE| = (1-k)\sqrt{35}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{|EA|}{|CF|} = \frac{|AB|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{(1-k)\sqrt{35}}{k\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{k}-1\right) \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{k}-1\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$(EF) \parallel (AD) \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD \quad (\text{по углам } \angle CEF = \angle CAD \text{ и } \angle CFE = \angle CDA)$$

$$\Rightarrow S_{CEF} = \left(\frac{|CE|}{|CA|}\right)^2 \cdot S_{CAD} = k^2 S_{CAD} = \frac{1}{4} S_{CAD}$$

$$\triangle CAD \sim \triangle ABC \quad (\text{св-во прямиуг. } \triangle) \Rightarrow S_{CAD} = \left(\frac{|AC|}{|AB|}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{35}{49} S_{ABC}$$

$$\text{т.о. } S_{CEF} = \frac{1}{4} \cdot S_{CAD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{35}{49} S_{ABC} = \frac{35}{196} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{196}{35} = \frac{28}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{28}{5}$$

Обозн:
S_{хуз} - площадь
треуг хуз
для некоего
хуз

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Р.у. $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x \Leftrightarrow 5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$
 $\Leftrightarrow 5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$

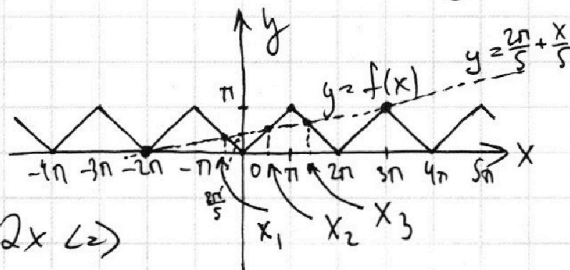
$\arccos(\cos x) = f(x)$

~~$\arccos(\cos x) = f(x)$~~ $x = 2\pi k + y$, где $y \in [0; \pi]$

тогда $f(x) = \arccos(\cos y) = y$
 $x = 2\pi k + \pi + y$, $y \in (0; \pi)$

тогда $f(x) = \arccos(\cos(\pi + y)) = \arccos(-\cos y) \stackrel{\text{сб-бо}}{=} \arccos$
 $= \pi - \arccos(\cos y) = \pi - y$

т.о. $f(x)$ выглядит след.
образом:



исходное $\Leftrightarrow 5\pi - 10f(x) = \pi - 2x \Leftrightarrow$
 ур-ие $\Leftrightarrow f(x) = \frac{4\pi + 2x}{10} = \frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}$

По графику: корни: $-2\pi, 3\pi, x_1, x_2, x_3$

$-x_1 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_1}{5} \Leftrightarrow \frac{6x_1}{5} = -\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\pi}{3}$

$x_2 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_2}{5} \Leftrightarrow \frac{4x_2}{5} = \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{2}$

~~$x_3 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_3}{5} \Leftrightarrow \frac{4x_3}{5} = \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x_3 = \frac{\pi}{2}$~~

$2\pi - x_3 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_3}{5} \Leftrightarrow \frac{8\pi}{5} = \frac{6x_3}{5} \Leftrightarrow x_3 = \frac{4\pi}{3}$

исходя из
того, что
какие-то
линии не
секают
прямую
 $y = \frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}$

Ответ: $\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

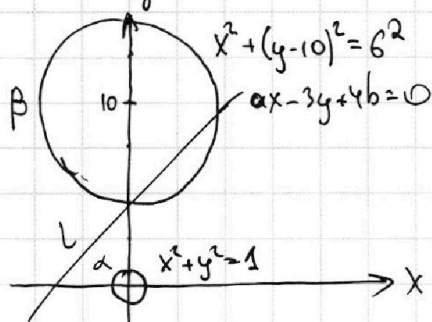
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases} \end{cases}$$



чтобы ~~прямая~~ система имела 4 реш, необходимо чтобы прямая $l: ax - 3y + 4b = 0$ имела по 2 пересек с каждой из окр-тей $\alpha: x^2 + y^2 = 1$ и $\beta: x^2 + (y - 10)^2 = 6^2$

т.к. окр-ти не пересекаются, это еще и достаточное условие

$$l \text{ имеет 2 общие точки с } \beta \Leftrightarrow \rho(\overset{\text{центр } \beta}{(0;10)}; l) < 6 \quad (*2)$$

$$l \text{ имеет 2 общ. т. с } \alpha \Leftrightarrow \rho(\overset{\text{центр } \alpha}{(0;0)}; l) < 1 \quad (*1)$$

т.о. осталось найти такие a и b , что выполнено $(*)1$ и $(*)2$

$$\rho((x;y); l) = \frac{|ax - 3y + 4b|}{\sqrt{a^2 + 9}}, \text{ где любых } x \text{ и } y, \text{ по формуле расст. до прямой}$$

$$\text{т.о. имеем } \begin{cases} \frac{|-3 \cdot 10 + 4b|}{\sqrt{a^2 + 9}} < 6 \\ \frac{|4b|}{\sqrt{a^2 + 9}} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4b - 30| < 6\sqrt{a^2 + 9} \\ |4b| < \sqrt{a^2 + 9} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |4b - 30| < 6\sqrt{a^2 + 9} \\ |4b| < \sqrt{a^2 + 9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4b - 30| < 6t \\ |4b| < t \end{cases} \quad t = \sqrt{a^2 + 9} \\ & t > 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 4b - 30 \in (-6t; 6t) \\ 4b \in (-t; t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b \in (30 - 6t; 30 + 6t) \\ 4b \in (-t; t) \end{cases} \end{aligned}$$

где b есть реш, когда $30 - 6t < t$
(тогда интервалы $(30 - 6t; 30 + 6t)$ и $(-t; t)$ пересекаются)

$$30 - 6t < t \Leftrightarrow 7t > 30 \quad t > \frac{30}{7} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 9} > \frac{30}{7} \Leftrightarrow a^2 > \frac{900 - 441}{49} = \frac{459}{49}$$

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4 2x - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{\ln 625}{\ln 8x^3} - 3 \Leftrightarrow \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4 \ln 5}{3 \ln 2x} - 3$$

$$a = \log_5 2x \quad a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \Leftrightarrow a^5 + 3a - 3 - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow 3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 \Leftrightarrow b = \log_5^4 y \quad b^4 + \frac{4}{b} = \frac{\ln 1/5}{\ln y^3} - 3$$

$$\Leftrightarrow b^4 + \frac{4}{b} = \frac{-\ln 5}{3 \ln y} - 3 \Leftrightarrow b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3b^5 + 9b + 13 = 0$$

*.0. имеем

$$(*) \begin{cases} 3b^5 + 9b + 13 = 0 \\ 3a^5 + 9a - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+b)(3(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow a+b=0$$

$$3x^5 + 9x - 13 = 0$$

$$f(x) = 3x^5 + 9x - 13$$

$$y = 3x^5 \uparrow \mathbb{R}$$

$$y = 9x \uparrow \mathbb{R}$$

$$y = -13 = \text{const}$$

$$\Rightarrow f \uparrow \mathbb{R} \text{ как сумма возрастает} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow E(f) = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \text{ имеет 1 корень (обозн его } x_0)$$

$$(*) \Leftrightarrow f(a) = 0$$

$$3 \cdot (-b)^5 + 9 \cdot (-b) - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = 0 \\ f(-b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x_0 \\ -b = x_0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5 2x + \log_5 y = 0 \Leftrightarrow \log_5 2xy = 0 \Leftrightarrow 2xy = 1 \Leftrightarrow xy = 1/2$$

$$\text{Ответ: } 1/2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

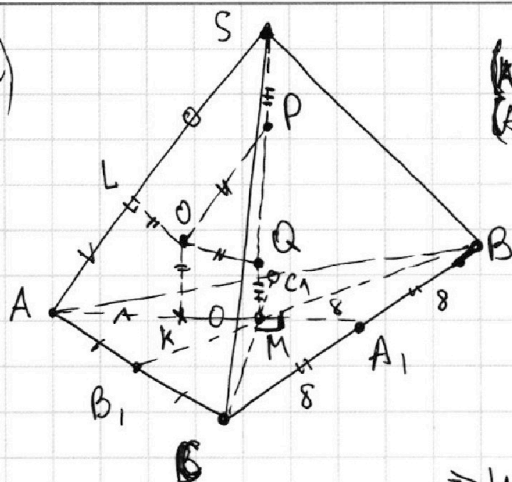
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a)



О-центр Ω

$$\begin{aligned} (AL) \text{ кас } \Omega &\Rightarrow |AL| = |AK| \\ (AK) \text{ кас } \Omega &\Rightarrow |AK| = |AL| \\ &\Rightarrow |MK|^2 = |MQ| \cdot |MP| \\ &= |SP| \cdot |SQ| = |SL|^2 \end{aligned}$$

(теор. об отрезках кас: A, L, S, P, Q, M, K)
лежат в (ASH), сечение сферой-м-тью - окр-ть)

$$\text{т.о. } |AS| = |AL| + |LS| =$$

$$= |KA| + |KM| = |AM| = \frac{2}{3} |AA_1|$$

(св-во медианы) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |MA_1| = \frac{1}{2} |AM| = \frac{1}{2} |AS| = 8 \Rightarrow$$

$$|CA_1| = |A_1B| = \frac{1}{2} |CB| = 8$$

$$\Rightarrow \angle CMA_1 = 90^\circ \text{ (медиана = половина стороны)}$$

$$S_{CMB} = \frac{2}{6} S_{ABC} \text{ (св-во медиан, разделяют исходный } \Delta \text{ на 6 равновеликих)} = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$$

$$\angle CMA_1 = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\textcircled{2} S_{CMB} = \frac{1}{2} |CM| \cdot |MB| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |CM| \cdot |MB| = 2 S_{CMB} = \frac{200}{3}$$

$$\begin{aligned} |BB_1| &= \frac{3}{2} \cdot |MB|; \quad |CC_1| = \frac{3}{2} |CM| \Rightarrow |BB_1| \cdot |CC_1| = \frac{9}{4} |CM| \cdot |MB| \\ &= \frac{9}{4} \cdot \frac{200}{3} = 150 \end{aligned}$$

$$|AA_1| = \frac{3}{2} |AM| = 24 \Rightarrow |AA_1| \cdot |BB_1| \cdot |CC_1| = 150 \cdot 24 = 2400 + 1200 = 3600$$

$$\text{Омбег: } 3600$$

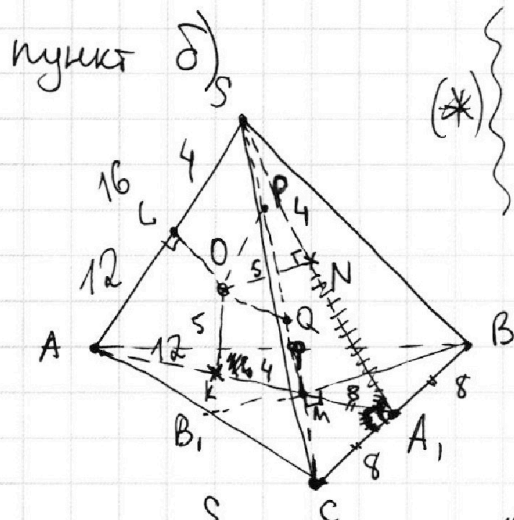
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

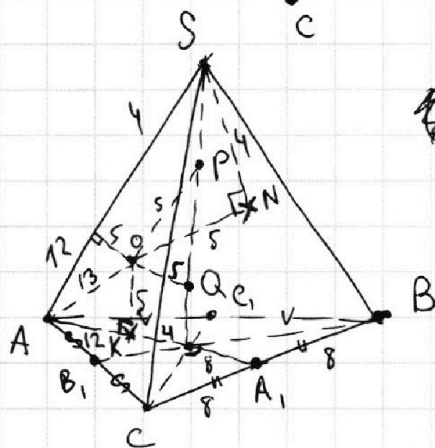
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 (*) \quad & \left. \begin{aligned} & (OK) \perp (ABC) \\ & (CB) \subset (ABC) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (OK) \perp (CB) \quad \left. \begin{aligned} & (ON) \perp (SCB) \\ & \Rightarrow (CB) \perp (OKN) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{теор} \\ & \Rightarrow \end{aligned} \\
 & |SN| = |SL| \text{ (отрезки кас)} = 4 \\
 & |AL| = |AS| - |SL| = 12 \\
 & |AK| = |AL| \text{ (отр. кас.)} = 12 \\
 & |KM| = 16 - |AK| = 4 \\
 & \quad \quad \quad = |AM|
 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

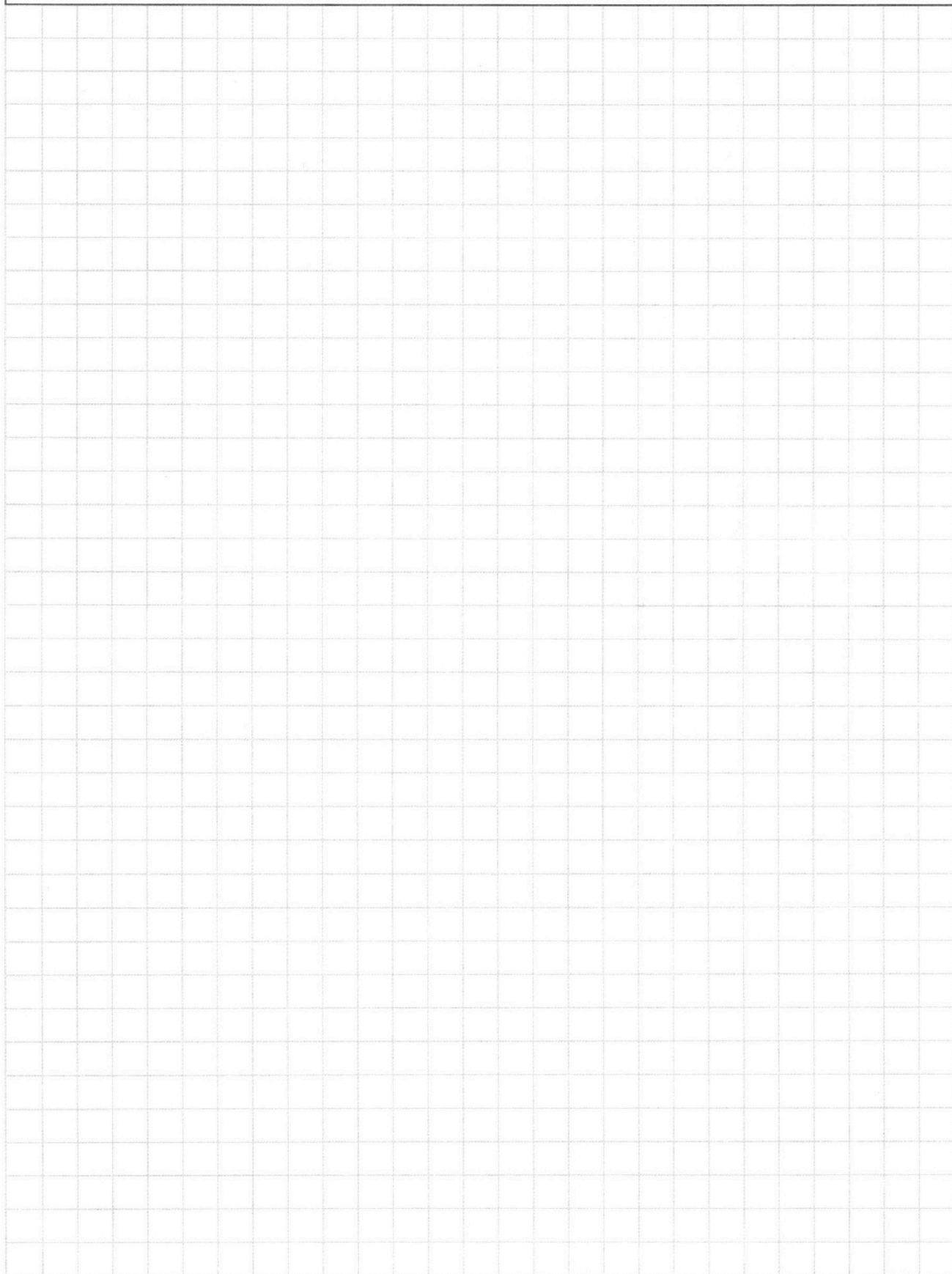
6

☐

7

☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^8 3^{14} 5^{12} \quad bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17} \quad ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39} \quad x = abc$$

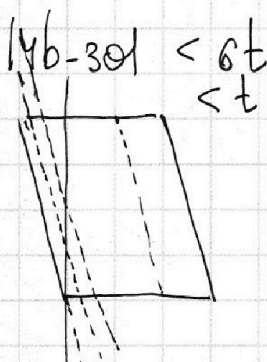
$$x^2 = (abc)^2 = ab \cdot ac \cdot bc: 2^{8+12+14} \cdot 3^{14+20+21} \cdot 5^{12+17+39} = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}^{(*)}$$

$$\Rightarrow x: 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \Rightarrow x \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \text{ - оценка}$$

(*) если $x^2: 3^{55}$ значит $x^2: 3^{56}$, т.к. при возведении в квадрат степень простого делителя увеличивается.
 $(x^2: 3^{55} \Leftrightarrow (\frac{x}{3^{27}})^2: 3 \Leftrightarrow (\frac{x}{3^{27}})^2: 9)$

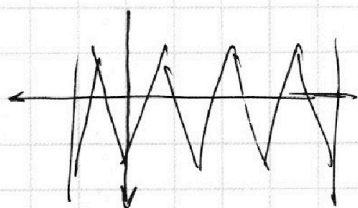
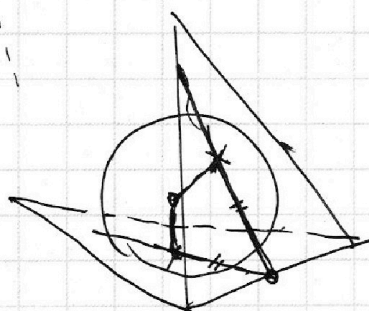
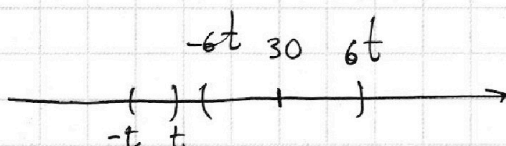
пример: $a = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$
 $b = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
 $c = 2^9 \cdot 3 \cdot 5$

$$\sqrt{a^2 + 9} = t$$



$$4b \in (30 - 6t; 30 + 6t)$$

$$4b \in (-t; t)$$



$$10 \arcsin(\cos x) = 5\pi - \arccos(\cos x)$$

$$\overline{x - \pi} = \arccos(\cos x) \Leftrightarrow \pi < x$$

1

$$2x + x = 39$$



1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$O(0;0) \quad P(-16;80) \quad Q(2;80) \quad R(18;0)$$

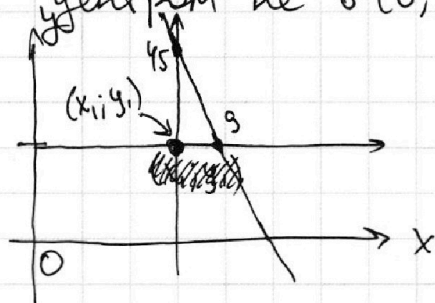
$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow 5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$\exists x_1 = y_1 = 0$$

$$\text{тогда } 5x_2 + y_2 = 45 \Leftrightarrow y_2 = 45 - 5x_2$$

$$\text{т.о. условие } 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

означает, что для точки (x_1, y_1) подходит прямая $y_2 = 45 - 5x_2$, только с центром не в $(0;0)$ а в (x_1, y_1)



$$P(-16;80) \quad Q(2;80)$$

$$y = -5(x - \frac{b}{5})$$

Заметим что стороны $[PQ]$, $[QR]$ пар.гр имеют угл коэф -5

~~перенесем все прямые вида $y = -5(x - a)$ так чтобы все целочисл точки пар.гр оказались на одной из этих~~

~~прямых тогда точка $O(0;0)$ будет на прямой, но не на~~

$$y = b - 5x \text{ пересек пар.гр.} \Leftrightarrow y = -5(x - \frac{b}{5}) \text{ пересек пар.гр.} \Leftrightarrow$$

$$= \frac{b}{5} \in [0; 18] \Leftrightarrow b \in [0; 90]$$

т.е. пром $A(x_1, y_1)$ где все прямые пар.гр имеют так: $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow y_2 = (y_1 + 45) - 5(x_2 - x_1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

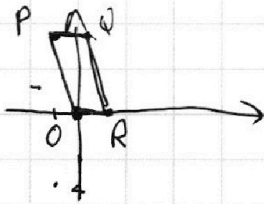
1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6) $O(0;0)$ $P(-16;80)$ $Q(2;80)$ $R(18;0)$



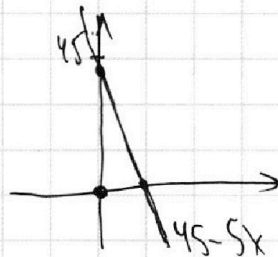
$$5dx + dy = 45$$

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$x_1 = y_1 = 0$$

$$5x_1 + y_2 = 45$$

$$y_2 = 45 - 5x_1$$



$$5\pi - 10t(x)$$

$$5\pi - 10(x \% \pi)$$

$$t \in [-\pi; \pi]$$

$$5\pi - 10t$$

$$5\pi - 10\pi = -5\pi$$

$$5\pi + 10\pi = 15\pi$$

$$\pi - 2x \in [-5\pi; 15\pi]$$

$$2x \in [-6\pi; 16\pi]$$

$$x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{8\pi}{2}\right]$$

$$x \in [-7\pi; 3\pi]$$

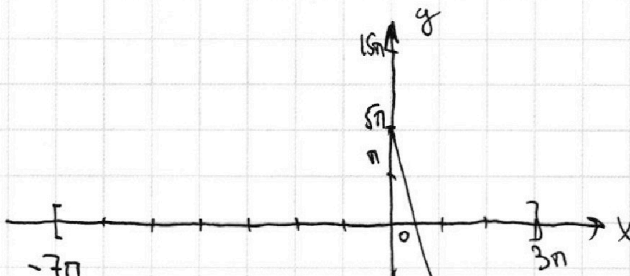
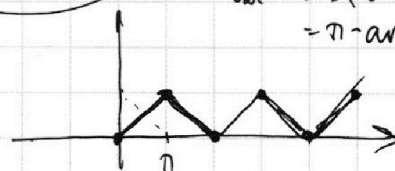
$$-7\pi$$

$$\arccos(\cos x)$$

$$\cos x$$

$$\arccos(\cos(\pi + x))$$

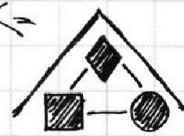
$$\arccos(-\cos x) = \pi - \arccos(\cos x)$$



конструкция верна

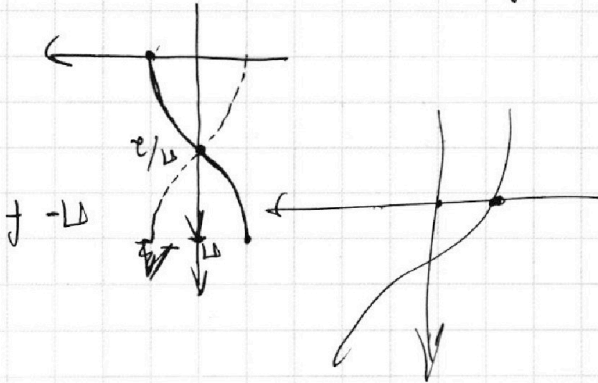
$$f(a) = 3a^5 + 9a - 13$$

$$dp \leq$$



$$0 = 1 + 8 + 5 + 3$$

$$0 = 1 + 8 + 3 + 5$$



$$\frac{\sum}{8} = \frac{1 + 1}{1 + 1}$$

$$\lim$$

$$1 - 1 - 2 - 3 - 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

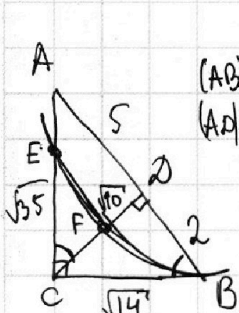
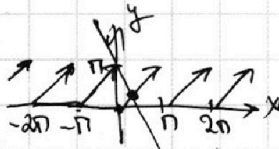
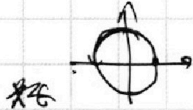
1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



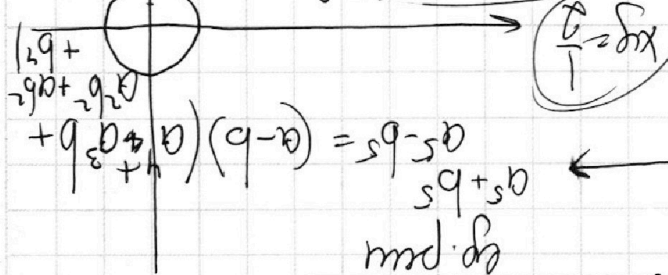
$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &\geq 34 \\ \alpha + \beta &\geq 19 \\ \beta + \gamma &\geq 17 \\ \alpha + \gamma &\geq 39 \end{aligned}$$



$$\sqrt{4+10} \quad \sqrt{25+10} \quad 49 \neq 35+14$$

$$l: y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

$$\begin{aligned} g(10; l) &< 6 \quad \text{ok} \\ g(0; l) &< 1 \end{aligned}$$



$$0 = 3b + 9b + 5b + 13 = 0$$

$$0 = 3b + 9b + 5b + 13 = 0$$

$$b^4 + \frac{b}{4} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} - 3$$

$$\log_5 x \log_5 y = \log_5 x \log_5 y$$

$$3 - \frac{\log_5 5}{\log_5 5} = \log_5 5 + 4 \log_5 5 = \log_5 5$$

$$5^{39} \cdot 3^{21} \cdot 2^{14}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$x \equiv \pi$$

$$\pi - 2x = 0$$

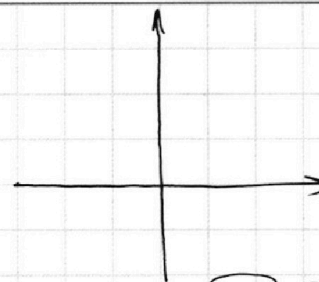
$$\pi - 2x = 0$$

$$\pi - 2(x \equiv \pi) = 0$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) \in [0; \pi]$$



ω кас (bc) в с. В



$$\sqrt{5 \cdot 7} \cdot \sqrt{2 \cdot 7} = 7 \cdot \sqrt{10}$$

$$\left(\frac{\sqrt{35}}{7}\right)^2 = \frac{35}{49} \cdot S_{ABC}$$

$$\frac{k\sqrt{10}}{(1-k)\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$(7\sqrt{10}) \cdot k = 7\sqrt{10} - k$$

$$2k \cdot 7\sqrt{10} = 7\sqrt{10}$$

$$k = \frac{1}{2}$$



$$S_{ABC} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{35}{49} = \frac{35}{196} \cdot S_{ABC}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 20y + 64 &= \\ &= x^2 + (y-10)^2 - 36 \end{aligned}$$

$$\log_5 x \log_5 y = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ or } y = 1$$

$$0 = (a+b)g + (a+b)g$$

$$a+b \cdot \log_5 x \cdot \log_5 y$$

$$0 = 3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$$a^5 + 3a - 3 - \frac{3}{4} = 0$$

$$a^4 - \frac{a}{3} = \frac{3a}{4} - 3$$

$$\log_5 (ax) - 3 = \frac{\log_5 x}{\log_5 5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

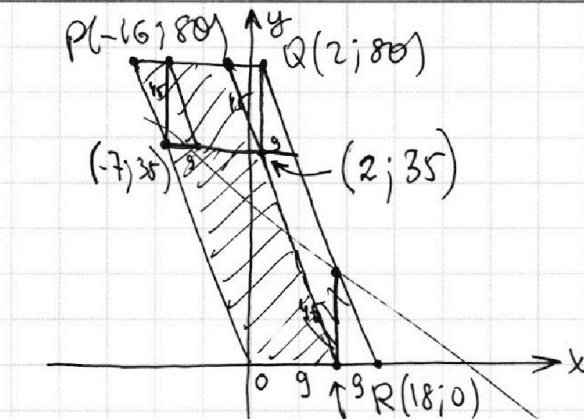
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ☒ | ☒ | ☒ | ☒ | ☒ | ☒ | ☒ |

МФТИ

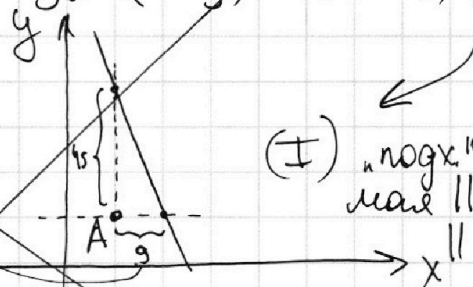
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



§ проств $T. A(x_1; y_1)$
для все "погр." прямая
тогда:

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow$$

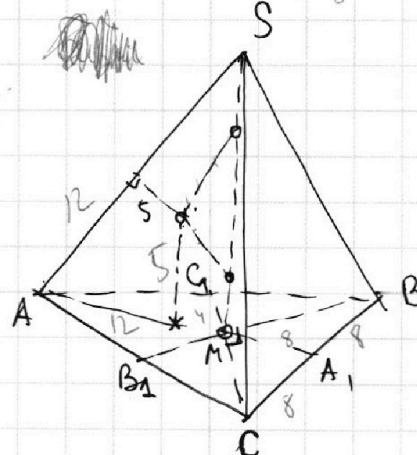
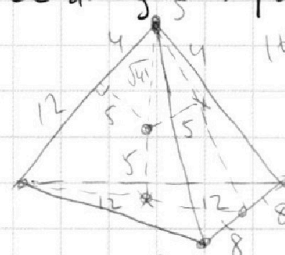
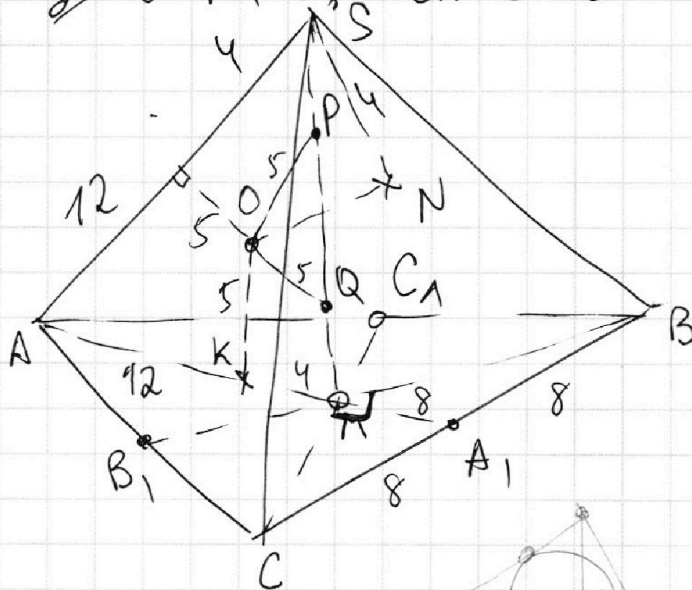
$$\Leftrightarrow y_2 = (45 + y_1) - 5(x_2 - x_1)$$



(I) "погр." пря-
мая $\parallel (QR)$
 $\parallel (PO)$

исходя из (I) картинка показывает,
что $PYXO$, где $Y(-7; 80)$, $X(9; 0)$ -
пар. гр. сост. из точек, которые
принадлежат $PQRO$ и для кото-
рых соотв. "подходящие" прямые
пересекают $PQRO$ параллелограмма

Для каждой целочисленной точки $PYXO$
все целочисленные точки ее "погр." прямой,
лежащие в $PQRO$, сост. с ней пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{12}$ $bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$ $ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$
 $abc: 2^{24} \cdot 3^{39} \cdot 5^{51}$

$$\alpha + \beta \geq 8$$

$$\alpha + \beta + \gamma$$

$$\beta + \gamma \geq 12$$

$$\alpha + \gamma \geq 14$$

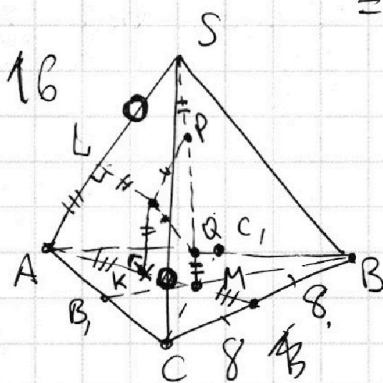
$$\alpha + \beta = 8$$

$$\alpha + \gamma = 14$$

$$\beta + \gamma = 12$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 4 + 7 + 6 = 17$$

$$\begin{aligned} 3 &= \beta \\ &= \alpha \\ &= \gamma \end{aligned}$$

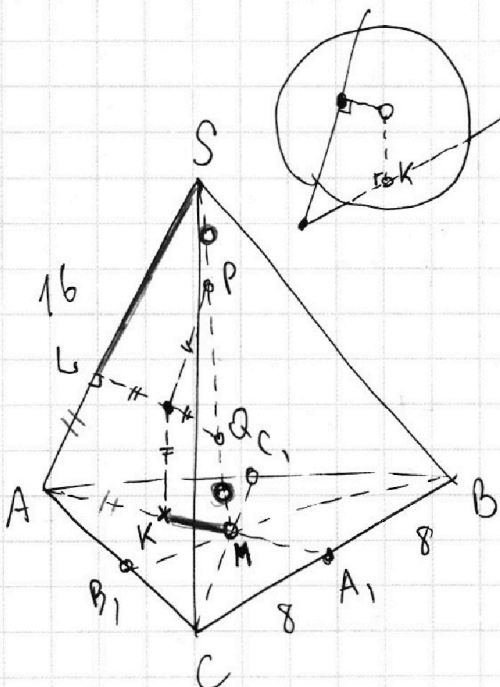


$$100 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot h = 8h$$

$$12,5$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$h = \frac{200}{16} = 12,5$$



$$\begin{aligned} S_{ABC} &= 100 \\ SA = BC &= 16 \end{aligned}$$