



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ x^2 + (y-6)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$x^2 + (y-6)^2 = 2^2$$

по построим график

похоже, что не суж. точки  
то... или упрощаем

$$упрощаем: -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \geq y$$

найдем уравнение касательной

найдем уравнение  
касательной

$$y = ax + b,$$

AB-кас.  $OC \parallel BA \Rightarrow AC \perp BO$  и  $BO, CO$  - высоты.

$$OO_1 = 6$$

$$OC = R_1 + R_2 = 3 + 2 = 5 \quad \left| \begin{array}{l} 1) BA \perp OC \Rightarrow \sqrt{36-25} = 6 \\ 2) BA \perp OC \Rightarrow \sqrt{36-25} = 6 \end{array} \right.$$

$$a_1 \cdot \tan \alpha = -\tan(180-\alpha) = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

способ. у точек касательной в силу симметрии

$$a_2 = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{5} \leq \frac{-a}{2} \leq \frac{\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \frac{2\sqrt{11}}{5} \geq a \geq \frac{-2\sqrt{11}}{5}$$

и тогда

$$a \in \left(-\frac{2\sqrt{11}}{5}; -\frac{\sqrt{11}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{11}}{5}; \frac{2\sqrt{11}}{5}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln^5 3}{2 \ln x} - 8 \\ \frac{\ln^4 2}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln^5 3}{2 \ln 2} - 8 \end{cases}$$

$$\text{используем } L(x) = \log_3(x)$$

$$8x = 5y$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^4} + \frac{6}{x} = \frac{5}{2x} - 8 \\ \frac{1}{2^4} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2 \cdot 2} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(2) = 1 \\ L(3) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{5}{2b} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 4712 = 5 - 16a \\ 2b^5 + 4712 = 5 - 16b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 7 = -16a \\ 2b^5 - 7 = -16b \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(возм. нулей)} \\ \rightarrow \text{используем} \end{matrix}$$

если  $t$  корень  $2a^5 + 7 = -16a$ , то

$-t$  — корень  $2b^5 - 7 = -16b$

и

$$2a^5 + b^5 = -8(a+b)$$

и

$$a+b=0 \Rightarrow L(x) (z=0) \Rightarrow \log_3(x \cdot z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x \cdot y) = 0 \Rightarrow x \cdot y = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x \cdot y} = 1}$$



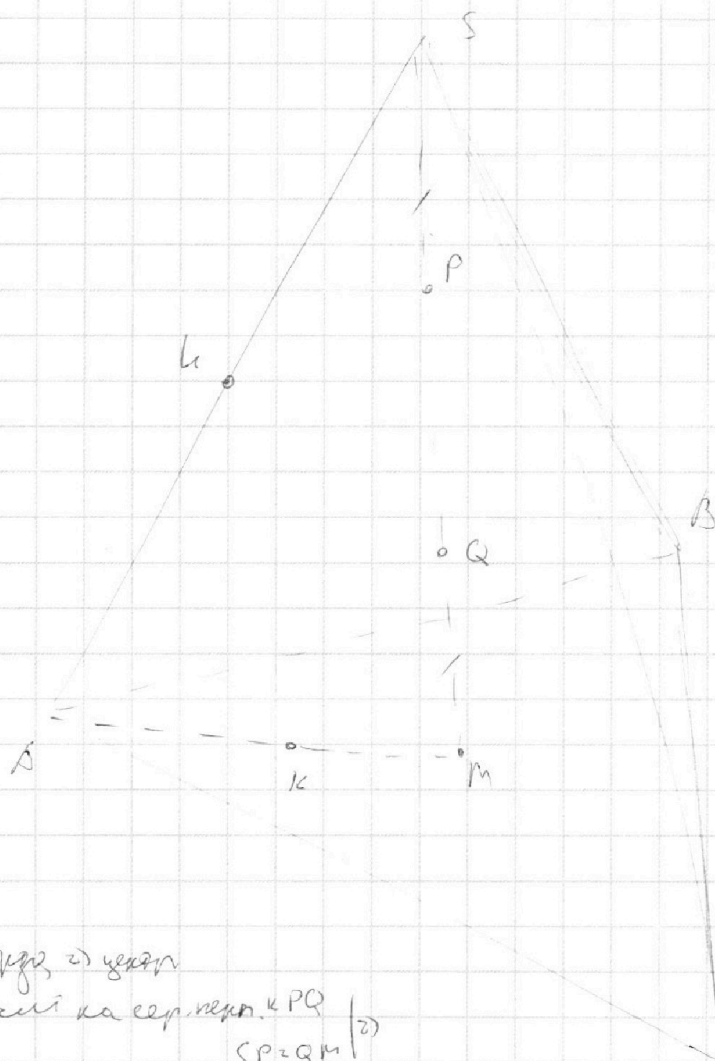
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$PQ$  - хорда  $\Rightarrow$  центр

$\Omega$  лежит на сер-перп. к  $PQ$   
 $SP = QM \quad | \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$  на сер-перп. к  $SM$ .





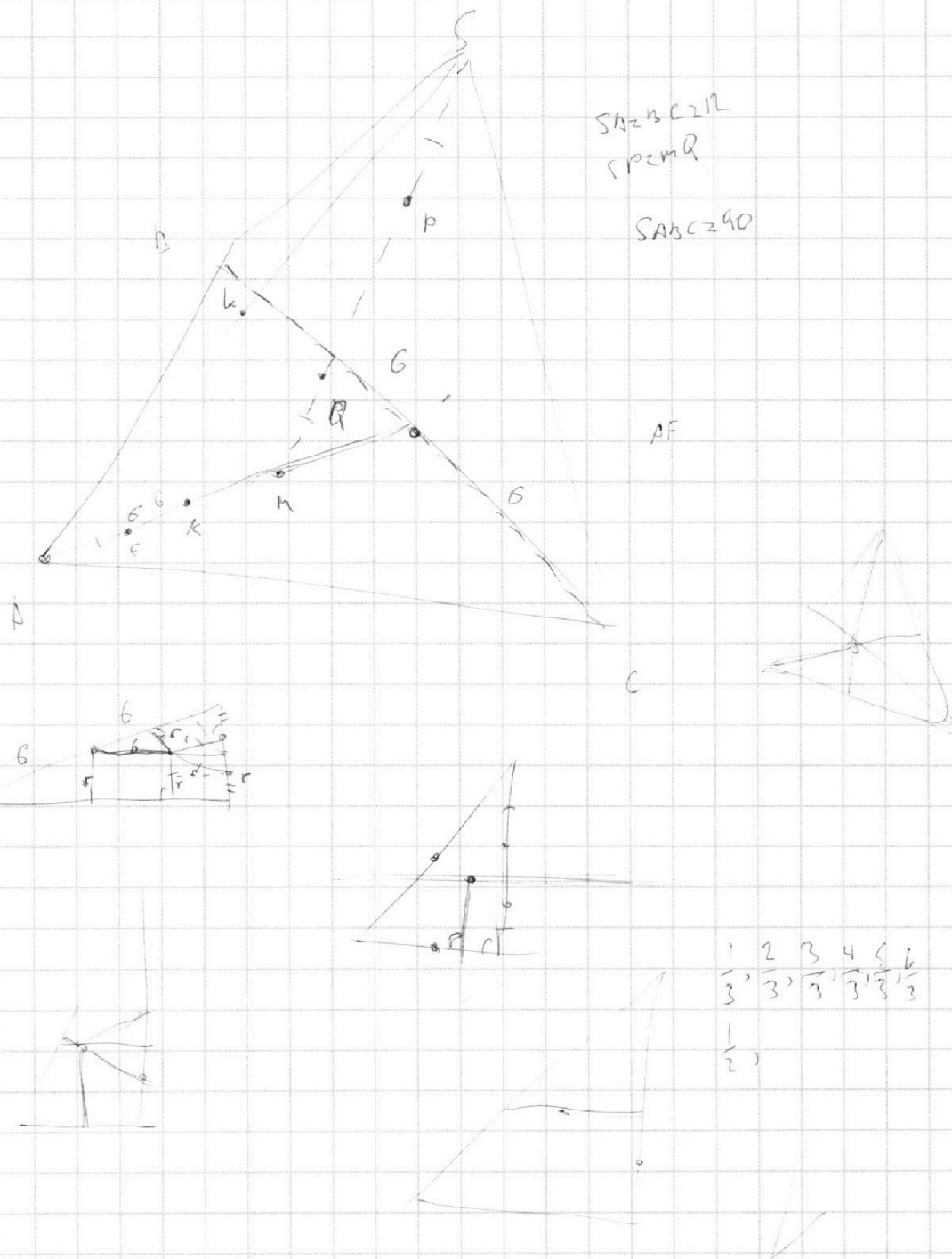
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

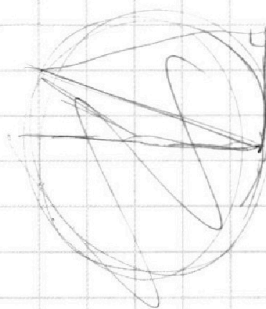
|                                     |                          |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$158 = 69 + 89$$



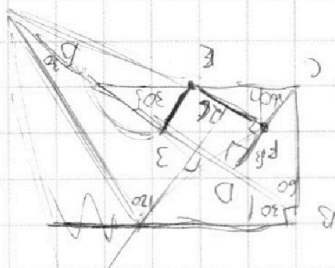
$$16 - 8L + 6L = 9 + 18L + 6L$$

$$\left(\frac{15}{4} - \frac{1}{L}\right)^2 = 3 + 6L + 18L^2$$

$$\left(2\frac{3}{2} + \frac{15}{L}\right)^2$$

$$4\left(5 - \frac{15}{L} + \frac{1}{L}\right)^2 = 3 + 6L + 18L^2$$

$$r^2 L^2 + \frac{3}{L} \left(13 - \frac{3}{L} \cdot 2L + \frac{1}{L}\right)^2$$

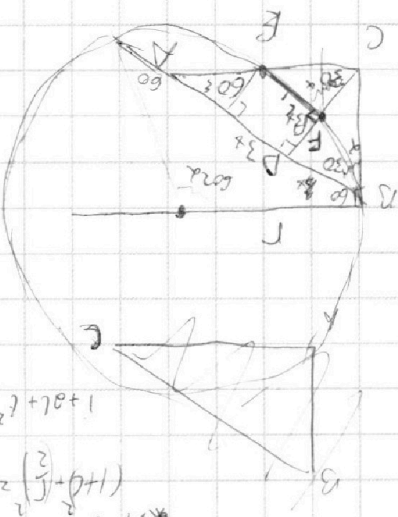


$$\frac{225}{250} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{L} + \frac{1}{L^2}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{L} + \frac{1}{L^2}\right)$$

$$AB \parallel EF$$
$$\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$$
$$3DB = AD$$











На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = 6x + 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi + 2\pi k}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3} \text{ и } -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin(\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = -4x + 2\pi k$$

$$x = \frac{-2\pi + 2\pi k}{4}$$

$$(\arcsin(x): [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*кратчайшая*

найдем, по чему делится  $a^2 b^2 c^2$ :  $2^9 3^{10} 5^{10} \cdot 2^{14} 3^7 5^{13} \cdot 2^{19} 3^{18} 5^{30} =$   
 $= 2^{42} 3^{41} 5^{53}$

т.к. мы уже НОД этих чисел знаем найдем  $2^{52} 3^{51} 5^{53}$  и  
 $(2^9 3^{10} 5^{10})^2 = 2^{22} 3^{21} 5^{23}$

будем предположить, что в виде  $(a, b, c)$ , найдем  $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

$a^2 b^2 c^2 \equiv (23, 23, 23) \mid$   
 $a, c \equiv (19, 18, 30) \mid$   
 $a, b, c \equiv (23, 23, 30) \Rightarrow \text{ННН}$

*минимальные показатели.*

$a = (a_1, a_2, a_3)$   
 $b = (b_1, b_2, b_3)$   
 $c = (c_1, c_2, c_3)$   
 $a_1 + b_1 \geq 9$   
 $a_2 + b_2 \geq 10$   
 $a_3 + b_3 \geq 10$   
 $a_1 + c_1 \geq 19$   
 $a_2 + c_2 \geq 18$   
 $a_3 + c_3 \geq 30$   
 $b_1 + c_1 \geq 14$   
 $b_2 + c_2 \geq 13$   
 $b_3 + c_3 \geq 13$

$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 & a_1 + b_1 = 9 \\ a_1 + c_1 \geq 19 & \Rightarrow a_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 \geq 14 & b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$   
 $\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 & a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 & a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 \geq 13 & b_2 + c_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 11 \end{cases}$   
 $\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 & a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 \geq 30 & a_3 + c_3 = 30 \\ b_3 + c_3 \geq 13 & b_3 + c_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 7 \\ b_3 = 3 \\ c_3 = 11 \end{cases}$

т.к. мы  
 минимизировали  
 сумму  $a_1 + b_1 + c_1$ , то  
 (НОД)  
 получится минимальный  
 ответ, когда  
 сумма будет не  
 меньше

т.к. мы  
 минимизировали, т.к.  
 $a_3 + b_3 + c_3 \geq \max(a_3 + b_3, a_3 + c_3, b_3 + c_3)$

$\Rightarrow \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 = 15 \\ c_3 = 15 \\ b_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 & a_2 = 7 \\ a_2 + c_2 \geq 18 & \Rightarrow b_2 = 3 \\ b_2 + c_2 \geq 14 & c_2 = 11 \end{cases}$

$a_3 + b_3 + c_3 \geq \frac{30+30}{2} = 30$   
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{7+3+11}{2} = 21$   
 $a_1 + b_1 + c_1 \geq \frac{7+2+12}{2} = 21$   
 $\Rightarrow a, b, c = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$