



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{№1. } a^2 b^2 c^2 &= ab \cdot bc \cdot ca : 2^{(6+4+16)} \cdot 3^{(13+21+25)} \cdot 5^{(11+13+28)} = \\ &= 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$\text{Пример: } a = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}, b = 1, c = 2^{14} \cdot 3$$

$$\text{Т.к. } ac : 5^{28} \Rightarrow abc : 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Пример: } a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}, b = 2^2 \cdot 3^4, c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14} -$$

удовлетворяет условию.

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

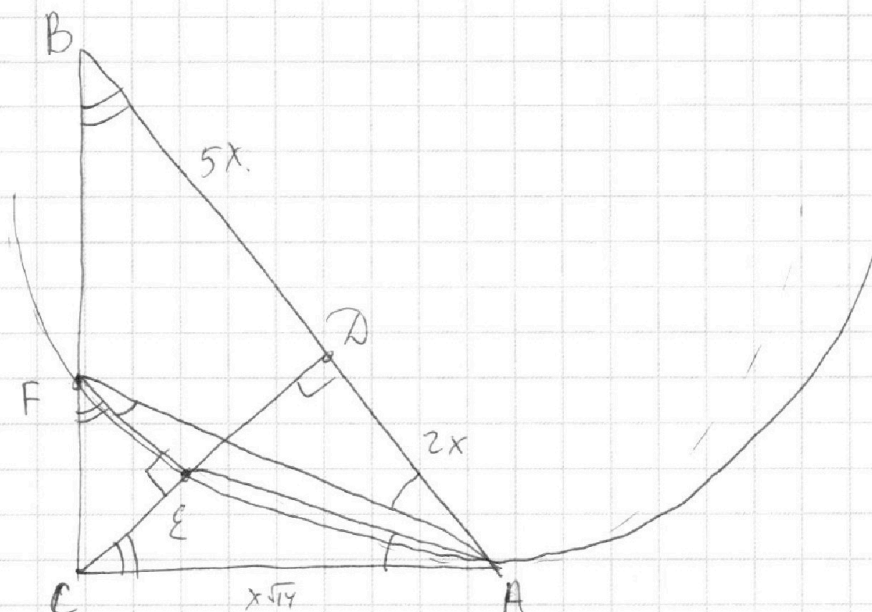
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2.



Решение. Т.к. $AB:BD = 1,4 \Rightarrow AD:BD = 2:5 \Rightarrow$
 $AD = 2x$, $BD = 5x$. Тогда $CD^2 = 10x^2$ (высота в прямоугол.
 Δ), по т. Пифагора $AC^2 = 4x^2 + 10x^2 = 14x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{14}$.

По т. Пифагора т.к. AC касательная, то

$\angle EAC = \angle EFA$, $\angle EFA = \angle FAB$ (как накрест.
 лем. при $EF \parallel AB$ и сек. AF), $\angle DCA = 90^\circ - \angle A$
 (ΔCDA), $\angle ABC = 90^\circ - \angle A \Rightarrow \angle DCA = \angle ABC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \Delta ABF \sim \Delta ACE$ (по 2-м углам). Значит,

$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{14}}{7}. \text{ Т.к. } EF \parallel AB, \text{ то } \angle CEF = 90^\circ.$$

По т. Пифагора $BC = \sqrt{49x^2 - 14x^2} = x\sqrt{35}$. $\angle FCE = \angle BAC =$
 $= 90^\circ - \angle B \Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta ACB$ (по 2-м углам). Значит

$$\frac{CF}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{\sqrt{14}} \Rightarrow CF = \frac{7}{\sqrt{14}} CE = BF \Rightarrow CF = BF = \frac{x\sqrt{35}}{2}$$

$\angle FCE = \angle BAC$, $\angle FEC = \angle CDA \Rightarrow \Delta FCE \sim \Delta CDA$ (по
 2-м углам) $\Rightarrow S_{\Delta ACD} : S_{\Delta CEF} = \left(\frac{x\sqrt{14}}{\frac{x\sqrt{35}}{2}}\right)^2 = \frac{14 \cdot 4}{35} = \frac{56}{35}$.

Ответ: $\frac{56}{35}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3. $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

Пусть $x = y + 2\pi k$, где $y \in [-\pi; \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

1°) $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$10 \arccos(\sin x) = 10(\frac{\pi}{2} - y) = 9\pi - 2y - 4\pi k$$

$$\cancel{5\pi - 5y} - 5\pi - 10y = 9\pi - 2y - 4\pi k$$

$$8y = -4\pi + 4\pi k \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, \text{ т.к. } y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

то $k \in [0, 2] \Rightarrow x = \{-\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}\}$

2°) $y \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ ~~$y \in (\pi; 2\pi)$~~

$$10 \arccos(\sin x) = 10(y - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2y - 4\pi k$$

$$10y - 5\pi = 9\pi - 2y - 4\pi k$$

$$12y = 14\pi - 4\pi k \Rightarrow y = \frac{7}{6}\pi - \frac{\pi k}{3}$$

т.к. $y \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, то $k = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$

3°) $y \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}) \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(y + \frac{3\pi}{2}) = 9\pi - 2y - 4\pi k$

$$10y + 30\pi = 9\pi - 2y - 4\pi k$$

$$12y = -21\pi - 4\pi k \Rightarrow y = -\frac{21\pi}{12} - \frac{\pi k}{3}$$

т.к. $y \in [-\pi; -\frac{\pi}{2})$, то $k = -3 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} - 6\pi = -\frac{27\pi}{4}$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{9\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, -\frac{27\pi}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\Rightarrow (k_1 y + b_1)^2 = y^2 + 18y + 77$ — точный квадрат.

$$(k_1^2 + 1)y^2 + 2(k_1 b_1 + 9)y + b_1^2 + 77 = 0$$

Тогда $(k_1^2 + 1) \cdot (b_1^2 + 77) = (k_1 b_1 + 9)^2$

$$\left\{ \begin{aligned} & k_1^2 b_1^2 (k_1^2 + 1)(b_1^2 - 25) = b_1^2 k_1^2, \quad (*) \\ & (k_1^2 + 1)(b_1^2 + 77) = k_1^2 b_1^2 + 18k_1 b_1 + 81 \quad (**) \end{aligned} \right.$$

$$(*): \cancel{k_1^2 b_1^2} + b_1^2 + 77 + k_1^2 + 77 = \cancel{k_1^2 b_1^2}$$

$$b_1^2 - 77k_1^2 - 77 = 0$$

$$(*): \cancel{k_1^2 b_1^2} + b_1^2 - 25k_1^2 - 25 = \cancel{k_1^2 b_1^2}$$

$$b_1^2 = 25k_1^2 + 25$$

$$(**): \cancel{k_1^2 b_1^2} + b_1^2 + 77k_1^2 + 77 = \cancel{k_1^2 b_1^2} + 18k_1 b_1 + 81$$

$$b_1^2 = 18k_1 b_1 - 77k_1^2 + 4$$

$$25k_1^2 + 25 = 18k_1 b_1 - 77k_1^2 + 4$$

$$b_1 = \frac{102k_1^2 + 21}{18k_1} \Rightarrow \left(\frac{102k_1^2 + 21}{18k_1} \right)^2 = 25k_1^2 + 25$$

$$(102k_1^2 + 21)^2 = (18k_1)^2 \cdot 25 \cdot (k_1^2 + 1)$$

$$\cancel{102^2 k_1^4} + \cancel{204 \cdot 21 k_1^2} +$$

Из этого уравнения можно найти 4 возможных k_1 ; при этом это очевидно из симметрии картинки относительно y . Будут пара k против. знаков. Из картинки очевидно, что $\pm k$ с наиб. модулем — касательные, а с наим. модулем — внешние. $\pm k$ с наиб. модулем образуют касательные, а с наим. модулем — внешние. $\pm k$ с наиб. модулем образуют касательные, а с наим. модулем — внешние. $\pm k$ с наиб. модулем образуют касательные, а с наим. модулем — внешние. $\pm k$ с наиб. модулем образуют касательные, а с наим. модулем — внешние.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



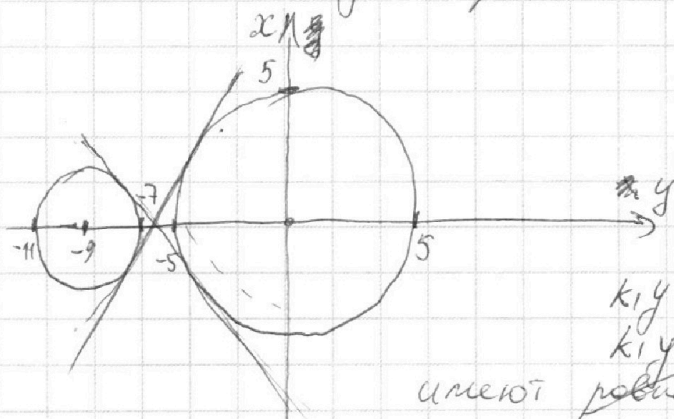
№4.
$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{cases}$$

$x^2+y^2=25$ и $x^2+(y+9)^2=4$ — задают на коорд. пл-ти окр-ти с центрами $(0,0)$ и $(0,-9)$ и радиусами 5 и 2 соотв.

$5x+6ay-b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{6a}{5}y+\frac{b}{5}$ — задаёт на коорд. пл-ти прямую, то, что система при a ~~имеет~~ ~~фикс.~~ а имеет 4 решения при каком-то b значит, что ~~одна из~~ хотя бы одна из параллельных прямых направленных

$x=-\frac{6a}{5}y$ пересек. окр-ти в 4-х разн. точках.



Рассм. вообще ^{внутренние} касательные к окр-тиам. Пусть их ур-а $x=k_1y+b_1$ и $x=k_2y+b_2$.

Тогда ур-а ~~ка~~
 $k_1y+b_1-x=x^2+y^2-25$
 $k_1y+b_1-x=x^2+y^2+18y+77$
имеют ровно 1 решение.

Тогда ~~$x^2+x+y^2-25-k_1y-b_1=0$~~ ~~тогда~~ $\Leftrightarrow$
 $\Rightarrow y^2-k_1y-25-b_1=0$

Тогда система $\begin{cases} x^2+y^2-25=0 \\ x=k_1y+b_1 \end{cases}$ — имеет 1 решение

т.е. $(k_1y+b_1)^2+y^2-25=(k_1^2+1)y^2+2b_1k_1y+b_1^2-25=$
тогда $\Leftrightarrow (k_1^2+1) \cdot (b_1^2-25)=b_1^2k_1^2$

Таким образом система $\begin{cases} x=k_1y+b_1 \\ x^2+y^2+18y+77=0 \end{cases}$ имеет 1 реш.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

кр-ты в 4-х точках $-\frac{6a}{5} \in (-t, t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{5}{6}t, \frac{5}{6}t\right).$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{6}t, \frac{5}{6}t\right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x \left(\frac{1}{121} \right) - 5 \\ \log_{11}^7 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5. \end{cases}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{121}} x^3} - 5,$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{1}{-\frac{3}{2} \log_{11} x} - 5.$$

Пусть $t = \log_{11} x$.

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5.$$

$$3t^5 - 18 + 2 + 15t = 0, \quad 3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$\log_{11}^7 (0,5y) + \log_{0,5y} \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = \frac{1}{-\frac{3}{13} \log_{11} 0,5y} - 5.$$

$$\log_{11} (0,5y) = a.$$

$$3a^5 + 3 + 13 + 15a = 0.$$

$$3a^5 + 15a + 16 = 0$$

$$\log_{11}(xy) = \log_{11} x + \log_{11} (0,5xy) = \log_{11} x + \log_{11} (0,5y) =$$

$$= a + t.$$

$$\log_{11}(0,5xy) = \log_{11}(xy) + \log_{11}(0,5) \Rightarrow \log_{11}(xy) = a + t - \log_{11}(0,5)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рв. Рассм. точку с координатами x_0, y_0 и
все точки x, y такие, что $6x - 6x_0 + y - y_0 = 48$
Тогда $y = -6x + 6x_0 + y_0 + 48$ — прямая с
угл. коэффициентом -6 . Заметим, что
у сторон QR и QR' угл. к-ты тоже -6 .
Поэтому все эти прямые касаются целочисленных
точек на $QR = 15$ штук, т.к. если x целое,
то y — тоже. Тогда все такие прямые
 $y = -6x + 6x_0 + y_0 + 48$ либо имеют 15 целочисл.
точек внутри параллелограмма, либо их
не имеют вообще, т.к. $QR \parallel$ этой прямой.

Рвср. Заметим, что точки лежащие на
прямых с угл. к-том -6 дают ортогональные
прямые $y = -6x + 6x_0 + y_0 + 48$. Рассм. точку
 $(x_0, 0)$ такую, что $y = -6x + 6x_0 + 48 = QR$
и QR' ; $y = -6x + b' \Rightarrow b' = 17 \cdot 6 = 102 = 6x_0 + 48 \Rightarrow x_0 = 9$.
Заметим, что тогда все точки лежащие на
прямых с угл. к-том -6 и проходящих
через точки $(x, 0)$, где $x \in [0, 9]$ дают прямые,
пересекающие параллелограмм, а если $x > 9$,
то прямая такой точки параллелограмм не пересечет
прямые точки $(0, 0) - P_0$. Тогда всего точек, через
которые проходит прямая, пересек. параллелограмм
(сами точки тоже в параллелограмме) — $10 \cdot 15 = 150$.
И на каждой такой прямой по 15 точек
внутри параллелограмма. Итого пар $150 \cdot 15 = 2250$.
Ответ: 2250.



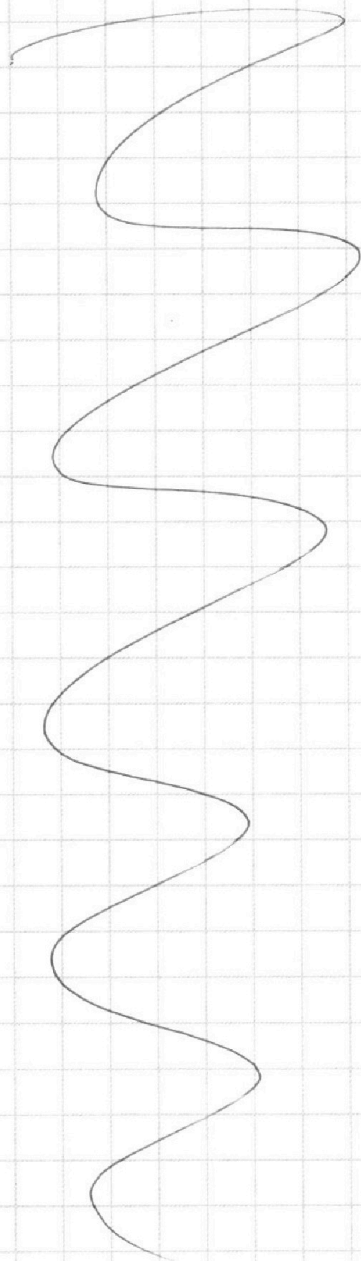
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

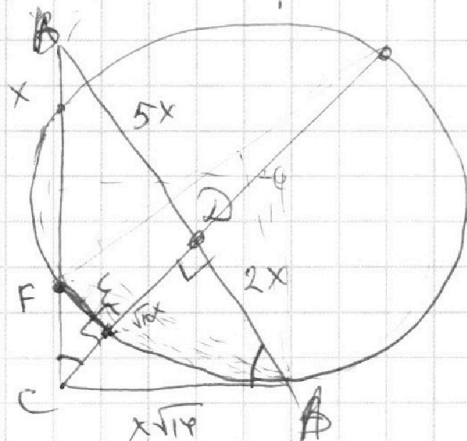
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}. \quad ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}, \quad bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}, \quad ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$



$$AB:BD = 1,4$$

$$AB \parallel EF$$

$$S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CEF} = ?$$

$$\left(\frac{CD}{EF} \right)^2$$

$$\triangle ACB \sim \triangle CDB$$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{BD} \Rightarrow CB^2 = AB \cdot BD$$

$$CD = x\sqrt{10}$$

$$4x^2 + 10x^2 = 14x^2$$

$$14x^2 = CF \cdot CX$$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \geq 9\pi - 2x$$

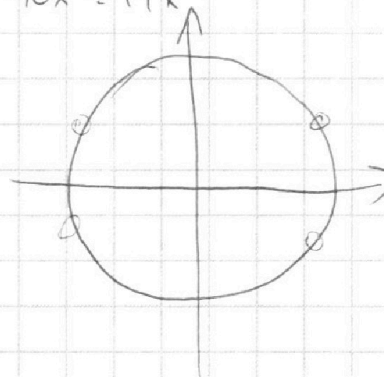
$$x \leq y + 2\pi k.$$

$$10 \arccos(\sin(y + 2\pi k)) \geq 9\pi - 2y - 4\pi k$$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \geq 9\pi - 2y - 4\pi k$$

$$5\pi - 10y \geq 9\pi - 2y - 4\pi k$$

3:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5x+6ay-b &= 0 \\ x &= \frac{b-6ay}{5} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{b-6ay}{5} \right)^2$$

$$x^2+y^2-25=0; \quad x^2+y^2=25.$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2+18y+77 &= 0 \\ x^2+(y+9)^2 &= 4. \end{aligned}$$

$$a+c \geq 16.$$

$$b+c \geq 14, \Rightarrow a+b+c+c \geq 30$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9$$

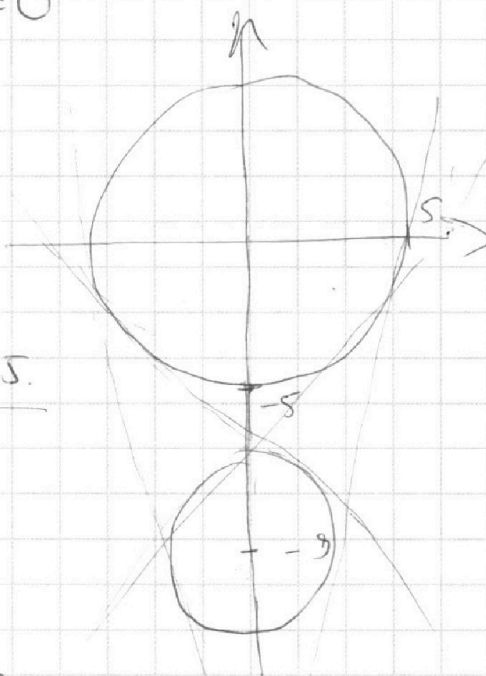
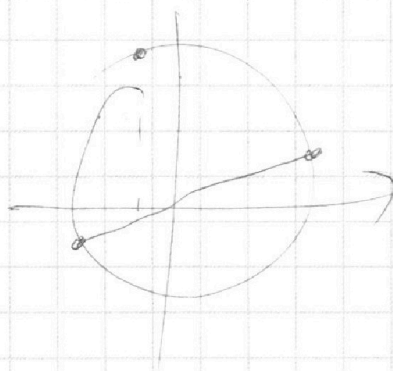
$$b = 2^2 \cdot 3^9$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17}$$

$$-21, -17, -13,$$

$$-9, -5,$$

$$x^2+y^2=25.$$





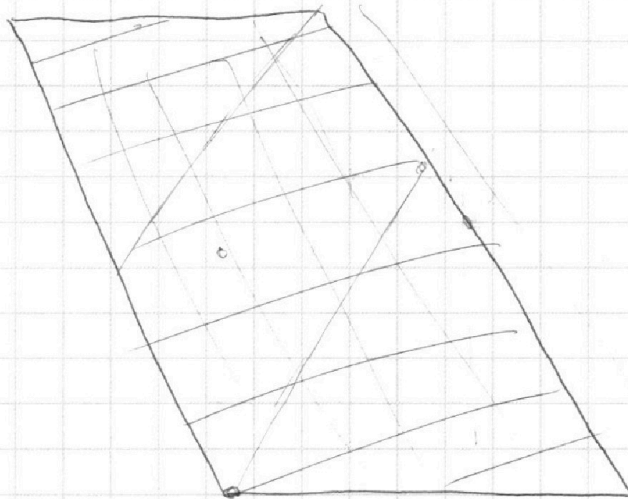
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -6x + 6x_0 + 48 + y_0$$

A hand-drawn geometric diagram on grid paper. It features a circle with center O . A vertical line segment PQ passes through O . A horizontal line segment RS is drawn below the circle. A line segment connects P and Q . Another line segment connects R and S . A point on the circle is connected to P and Q . A right angle is marked at the intersection of the horizontal line and the line segment RS . The number 15 is written at the bottom right.