



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc &: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac &: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$



$$abc : 2^{21} \cdot 3^{20.5} \cdot 5^{26.5}$$

т.к. a, b и c - натуральные числа, то $abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$ (если степени 3 и 5 будут меньше, то $a^2 b^2 c^2$ не будет делиться на 3^{41} и 5^{53})

$$ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{30}, \text{ т.к. } b - \text{натуральное число.}$$

$$abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Пример для $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$:

$$a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$\Rightarrow bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 5 \arcsin x \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5 \arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right); n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k)) = x + \frac{\pi}{2} \\ 5 \arcsin(\sin(-x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n)) = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$5x + \frac{5\pi}{2} + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

или

$$-5x + \frac{5\pi}{2} + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi - 10\pi k$$

$$6x = 2\pi + 10\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3}$$

$$x \in \left\{-3\pi; -\frac{\pi}{2}; 2\pi\right\}$$

$$x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$$

При остальных решениях $x \in (-\infty; -3\pi) \cup (2\pi; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ эти решения не являются решениями для исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

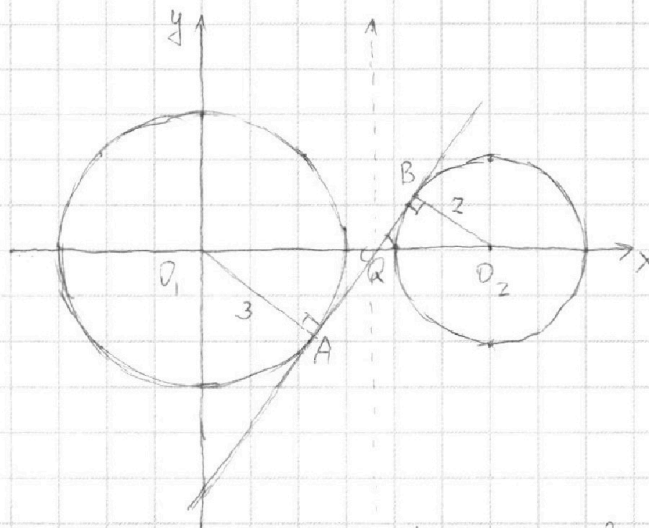
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-12x+32=4 \end{cases}$$

$$ax \neq 2 \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + 1,5b - \text{прямая} \\ x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 - \text{окружности} \end{cases}$$



Рассмотрим ситуацию, когда прямая $y = -\frac{a}{2}x + 1,5$ является касательной к обеим окружностям (изобр. на графике)
 $\triangle O_1AQ \sim \triangle O_2BQ$ по 2 парам равных углов, $k = \frac{BO_2}{AO_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{OQ}{O_2Q} = \frac{2}{3} \Rightarrow OQ = \frac{12}{5}, O_2Q = \frac{12}{5}$

Заметим, что при рассмотрении

возьмем точку Q за новую точку (0;0) в нашем графике, тогда прямая будет задаваться ур.: $y=kx$, где $k = -\frac{a}{2}$, а окружности: $(x+\frac{12}{5})^2+y^2=9$ и $(x+\frac{12}{5})^2+y^2=4$

$$y^2 = 4 - (x - \frac{12}{5})^2; y = kx \Rightarrow y^2 = k^2 x^2$$

$$4 - (x - \frac{12}{5})^2 = k^2 x^2 - \text{уравнение точки пересек. прямой с окр.}$$

$$100 - 25x^2 + 120x - 144 - 25k^2x^2 = 0$$

$$25k^2(k^2+1) - 120x + 44 = 0$$

$$\frac{D}{4} \equiv 60^2 - 44 \cdot 25 \cdot (k^2+1) = 100(36 - 11k^2 - 11) = 0, \text{ т.к. прямая и окр.}$$

имеют единственную точку пересек.

$$k = \pm \frac{5}{\sqrt{11}}$$

Заметим, что, если $k \in [-\infty; -\frac{5}{\sqrt{11}}] \cup [\frac{5}{\sqrt{11}}; +\infty)$, система не может иметь более 2 решений, а при $k \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}})$ система будет иметь 4 решения, при таком b , что прямая $y = kx + 1,5b$ будет проходить через точку Q. $\Rightarrow k \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}})$

$$-\frac{a}{2} \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}}) \Rightarrow a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$$

Ответ: $(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_2 243 - 8 \quad - 1\text{-ое уравнение}$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \log_2 \frac{3}{2} - 8$$

$$\frac{2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7}{2 \log_3 x} = 0$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0$$

$$\text{Замена: } \log_3 x = t.$$

$$f(t) = 2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$f'(t) = 10t^4 + 16 \Rightarrow$ функция непрерывно возрастает $\Rightarrow$ имеет единственное решение $f(t) = 0$, при этом $f(0) \neq 0 \Rightarrow$ исходное ур. имеет единственное решение.

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3 y = \log_{25y} (3^{11}) - 8 \quad - 2\text{-ое уравнение}$$

$$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2 \log_3 5y} - 8$$

$$\frac{2 \log_3^5 (5y) + 16 \log_3 (5y) - 7}{2 \log_3 5y} = 0$$

$$2 \log_3^5 5y + 16 \log_3 5y - 7 = 0 \quad \text{Замена: } \log_3 5y = t$$

Аналогично 1-ому, это уравнение (исходное ур. с переменной y) имеет единственный корень, доказывается так же.

$$\begin{cases} 2 \log_3^5 5y + 16 \log_3 5y - 7 = 0 \\ 2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x = a$ - решение 1-ого уравнения, тогда $5y = \frac{1}{a}$, то есть $y = \frac{1}{5a}$ будет решением второго, т.к. если $2 \log_3^5 a + 16 \log_3 a = -7$, то $2 \log_3^5 (\frac{1}{a}) + 16 \log_3 (\frac{1}{a}) = -2 \log_3^5 a - 16 \log_3 a = 7$, $\Rightarrow xy = a \cdot \frac{1}{5a} = 0,2$, т.к. a - единственное решение 1-го уравнения и $\frac{1}{5a}$ соответственно, единственное решение 2-го.

Ответ: 0,2

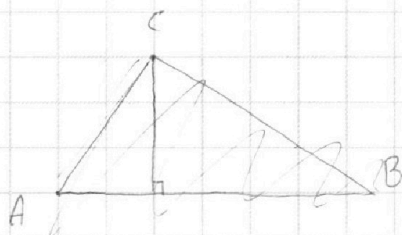
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



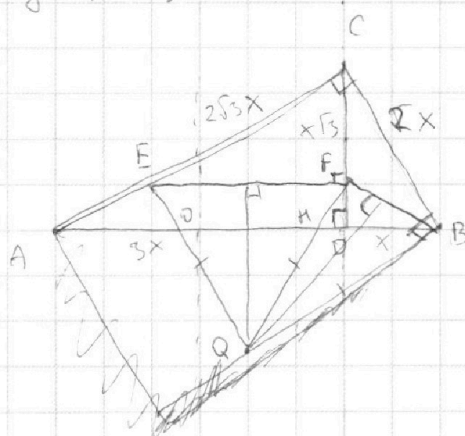
$$y = kx$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

А2

$$y = -\frac{9}{2}x + 1,5b$$

$$\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 = \left(3x - 7\right)^2$$



$$\frac{AE}{QB} = \frac{AO}{OB}$$

$$AD \cdot DB = CD^2$$

$$3BD^2 = CD^2$$

$$36 - 9x^2 + 42x - 49 = 9k^2x^2$$

$$9x^2(k^2 + 1) - 42x + 13 = 0$$

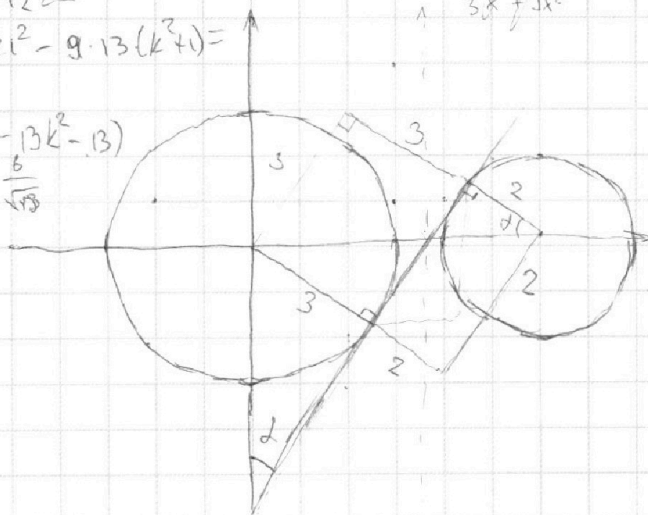
$$D = 42^2 -$$

$$\frac{D}{9} = 21^2 - 9 \cdot 13(k^2 + 1) =$$

$$= 9(49 - 13k^2 - 13)$$

$$k = \pm \frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{6}{\sqrt{13}}$$



$$\begin{cases} 4 - \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = k^2x^2 \cdot 9 \\ 9 - \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = k^2x^2 \cdot 9 \end{cases}$$

$$36 - 9x^2 + 6x - 1 = 9k^2x^2 = 0$$

$$9x^2 - x(6 - 9k) - 35 = 0$$

$$D = (6 - 9k)^2 + 4 \cdot 35 \cdot 9 =$$

$$= 81k^2 - 108k + 36 + 4 \cdot 35 \cdot 9 = 0$$

$$81k^2 - 108k + 36 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^2 b^2 c^2 : 2^8 \cdot 3^{10} \cdot 5$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{8+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30}$$

$$2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc : 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{26}$$

$$2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$a : 2^7$$

$$c : 2^{12}$$

$$b : 2^2$$

$$a : 2^7$$

$$b : 2^3$$

$$c : 2^{11}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) \\ \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k\right) \end{aligned}$$

$$\frac{5\pi}{2} + 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi + 10\pi k$$

$$12x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}$$

$$\begin{aligned} \sin(4\alpha) &= 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha = \\ &= 4\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

$$30^\circ \cdot 5 = 60^\circ + 90^\circ$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{2} + 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi - 10\pi k$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2}))$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}))$$

$$\cos x = \sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10})$$

$$\cos x =$$

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = 6x \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} + 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

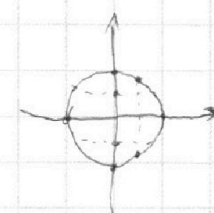
$$4x = -2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \cos x =$$

$$\frac{\pi}{10}$$

$$x \in [-3\pi, 2\pi]$$

$$-\frac{5\pi}{2}$$



$$\frac{\pi}{6} \cdot 5 \leq \frac{11\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{10}{2} \log_3^3 x - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2} \log_3^3 x + 8 = 0$$

$$t^4 + \frac{6}{t} - \frac{5}{2} t^3 + 8 = 0$$

$$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0$$

$$\frac{2t^5 + 16t + 7}{2t} = 0$$

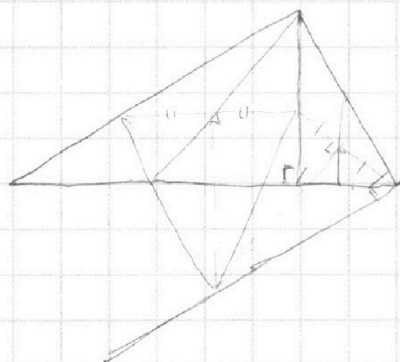
$$12t^4 + 16$$

$$\begin{cases} 2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \log_3^5 (5y) + 16 \log_3 (5y) - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 (5y) + 8 \log_3 x + 8 \log_3 (5y) = 0$$

$$x = \frac{1}{5y}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

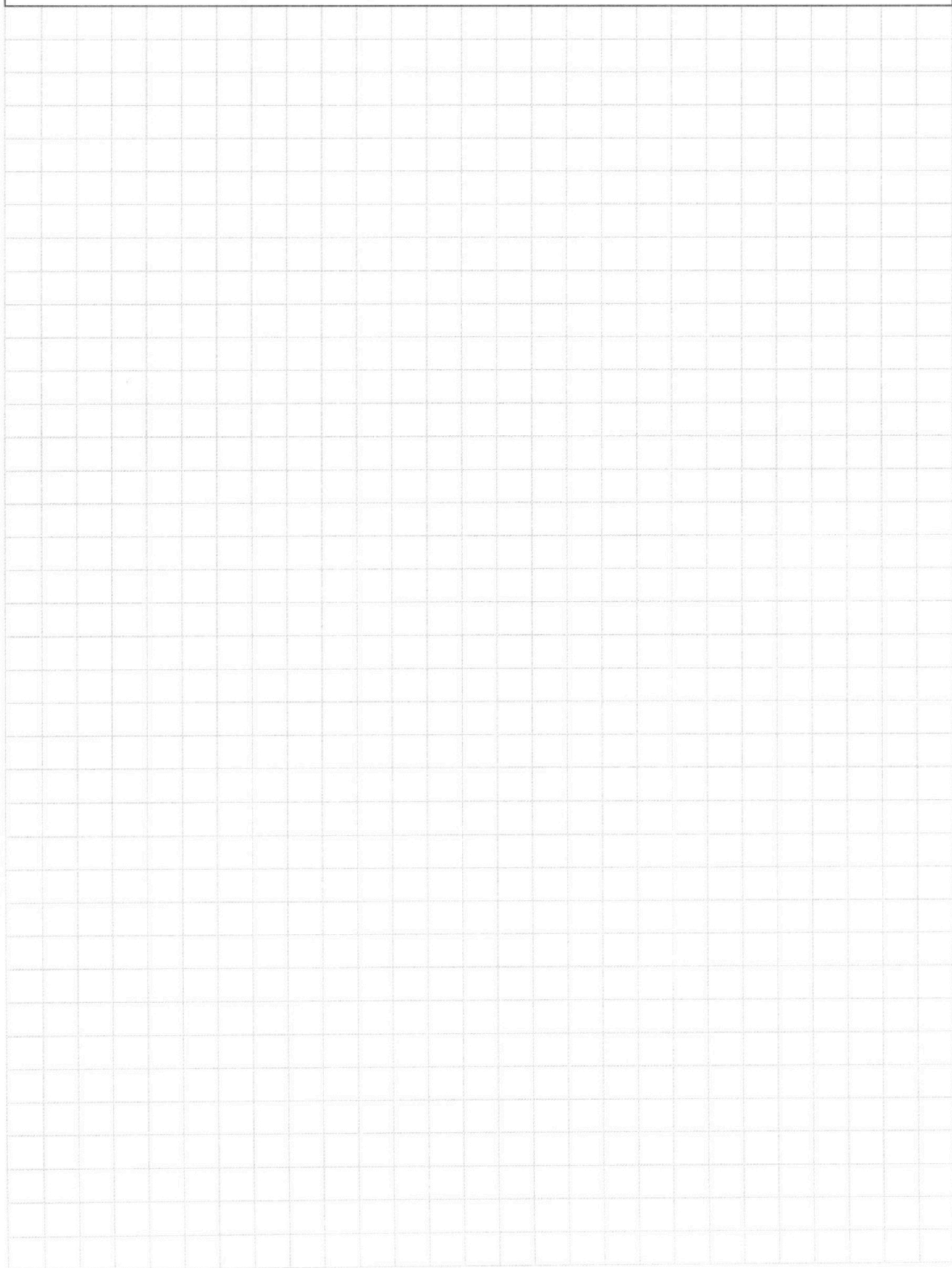
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!