



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1. Пусть $a_2; b_2; c_2$ - кол-во двоек в разложении на простые слагаемые чисел a, b, c . (макс. степень двойки, явл. делителем a, b, c)

Аналогично пусть $a_3; b_3; c_3$ - тройки
 $a_5; b_5; c_5$ - пятёрки.

Тогда по условию:

$$a_2 + b_2 \geq 9; \quad b_2 + c_2 \geq 14; \quad a_2 + c_2 \geq 19$$

Сложим эти неравенства

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 41 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$$

макс. степень двойки явл. делителем abc
(по св-ву $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$)

С тройками:

$$a_3 + b_3 \geq 10 \quad b_3 + c_3 \geq 13 \quad a_3 + c_3 \geq 18$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 41 \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$$

↑
целое

макс. ст. тройки в разложении abc .

С пятёрками:

$$a_5 + b_5 \geq 10 \quad b_5 + c_5 \geq 13 \quad a_5 + c_5 \geq 30$$

$$2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 53 \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 27$$

↑
целое

макс. степень "5" в разложении abc .

Вывод: Число abc кратно числу $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Значит, наименьшее значение abc равно $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$.

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

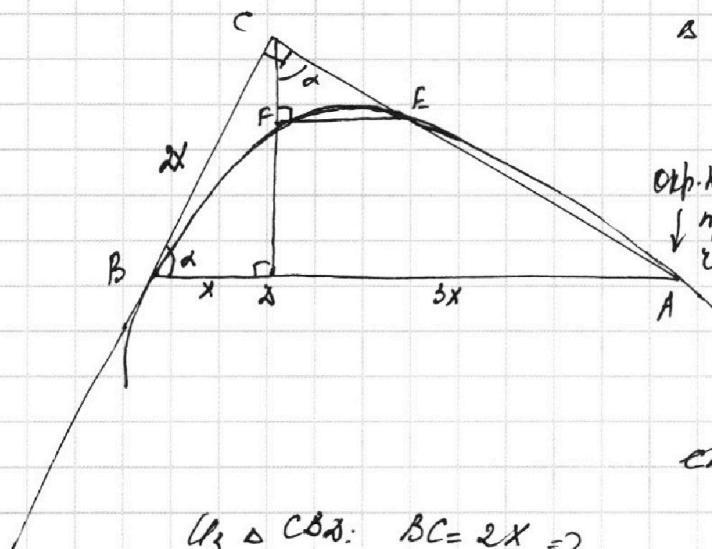
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2



то острые углы
 $\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD \sim \triangle ECF$

факт

$$\angle ABC = \angle ACD = \alpha$$

опр. не б. б. н. р. о. х. с. е. р. с. y. d.

из $\triangle CBD$:

$$\tan \alpha = \frac{CD}{x} \Rightarrow CD = x \tan \alpha$$

из $\triangle ABC$:

$$\tan \alpha = \frac{3x}{CD}$$

$$CB^2 = 3 \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{3x}{x \tan \alpha}$$

$$\tan^2 \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\text{из } \triangle CBA: BC = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = 2x\sqrt{3}$$

то свойствам опр. к. д. с. и с. е. к.

$$CB^2 = CE \cdot AC \Rightarrow 4x^2 = CE \cdot 2x\sqrt{3} \Rightarrow CE = \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} AC$$

$$\triangle ECF \sim \triangle ACD \text{ с коэф. } \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ACD} = 9 S_{ECF}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \text{ с коэф. } \frac{1}{3}$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot 3x$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot 4x \Rightarrow S_{ABC} = \frac{4}{3} S_{ACD} = 12 S_{ECF}$$

Ответ: 12.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Пусть $y = x + \frac{\pi}{2}$. Тогда $\arcsin(\sin y) = y$

$$\frac{y}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow y \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$$

Рассм. случаи

1) $y \in [-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}]$:

$$\arcsin(\sin y) = y + 2\pi$$

(1): $(y + 2\pi) \cdot 5 = y$

$$4y = -10\pi$$

$$\boxed{y = -\frac{5\pi}{2}} \Rightarrow \text{отв. зам. } x = -3\pi$$

2) $y \in [-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$

$$\arcsin(\sin y) = -y - \pi$$

(1): $(-y - \pi) \cdot 5 = y$

$$6y = -5\pi$$

$$\boxed{y = -\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow \text{отв. зам. } x = -\frac{4\pi}{3}$$

3) $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$: $\arcsin(\sin y) = y$

(1): $5y = y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

4) $y \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$: $\arcsin(\sin y) = \pi - y$

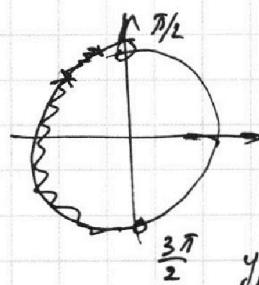
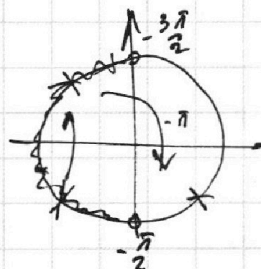
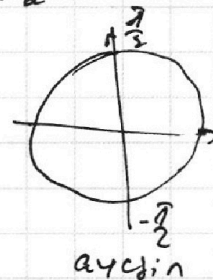
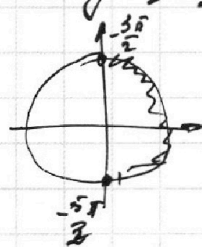
(1): $5(\pi - y) = y \Rightarrow \boxed{y = \frac{5\pi}{6}} \Rightarrow \text{отв. зам. } x = \frac{4\pi}{3}$

5) $y \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$: $\arcsin(\sin y) = y - 2\pi$

(1): $5(y - 2\pi) = y$

$$4y = 10\pi \Rightarrow \boxed{y = \frac{5\pi}{2}} \Rightarrow \text{отв. зам. } x = 2\pi$$

Ответ: $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 2\pi$.



Уравнение
рассмотрено на
всей ОДЗ $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ других корней
нет.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

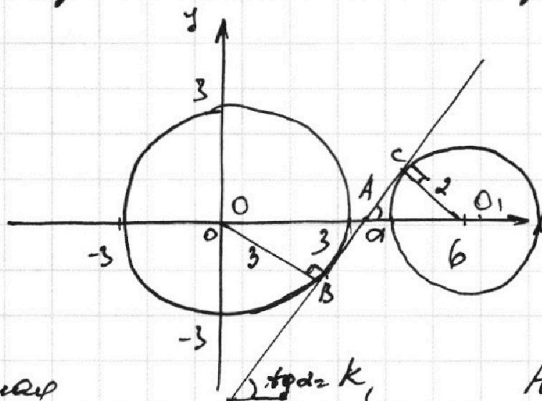
Задача 4

Решить систему графически.

2-ое уравнение - 2 окружности: $(0; 0; 3)$ и $(6; 0; 2)$.

1-ое уравнение - прямая. $y = kx + b$ (заменим $k = -\frac{a}{2}$)

4 решения $\Rightarrow$ 4 точки пересечения.



Для коэффициента наклона меньше k , и больше $-k$, (картинка симметрична отн. ОХ)

можно подобрать b такой, чтобы было 4 пересечения

при большем коэфф. наклона это сделать невозможно.*

Найдем этот критический угол как всегда.

* прямая будет пересекать только одну из окружностей

$$OA = \frac{3}{\sin \alpha}$$

$$AO_1 = \frac{2}{\sin \alpha} \Rightarrow AO_1 = \frac{5}{\sin \alpha} = 6$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Крит. знач. } k_1 = \frac{5\sqrt{11}}{11} \text{ и соотв. } -k_2 = -\frac{5\sqrt{11}}{11}.$$

Чтобы выполнялось условие:

$$k \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11}\right).$$

Обратная замена $a = -2k \Rightarrow a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11}\right).$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11}\right).$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (1) $\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_{x^2} 243 - 8$

(2) $\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25} y^2 (3'') - 8$

ОДЗ: $\begin{cases} x, y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$

(1): $\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_3 x} - 8$

$\log_3^4 x + \frac{7}{2 \log_3 x} + 8 = 0 \quad / \cdot 2 \log_3 x \rightarrow \log_3^4 x + 8 > 0 \Rightarrow \log_3 x < 0.$

$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7 = 0 (*)$

(2): Пусть $t = 5y$
 $\log_3^4 t + \frac{2}{\log_3 t} = \frac{11}{2} \frac{1}{\log_3 t} - 8 \quad / \cdot 2 \log_3 t$
 $\rightarrow \log_3 t > 0$

$2 \log_3^5 t + 4 - 11 + 16 \log_3 t = 0$

$2 \log_3^5 t + 16 \log_3 t = 7 = 0 (**)$

Сложим (*) и (**): $2 (\log_3^5 t + \log_3^5 x) + 16 (\log_3 x + \log_3 t) = 0 / : 2$

$(\log_3 t + \log_3 x) \left(8 + \frac{\dots}{> 0 *} \right) = 0$

(по разн. знаков слагаемых)

лог. равенство $\log_3 t + \log_3 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 tx = 0 \Rightarrow tx = 3$

обр. замена $t = 5y \Rightarrow 5yx = 3 \Rightarrow xy = 0,6$

Ответ: 0,6.

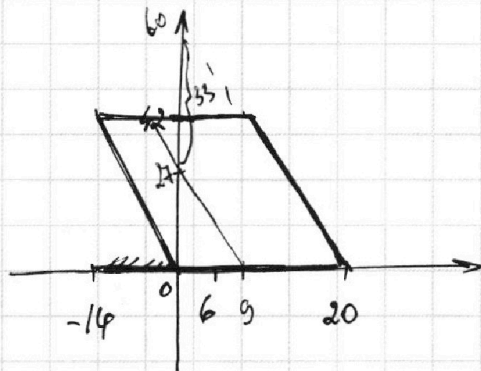
* проверка
 $\log_3^5 t + \log_3^5 x = \log_3 tx \cdot (\log_3 tx)^4 - (\log_3 t + \log_3 x)^5 - 5 \cdot \log_3 t \log_3 x \cdot (\log_3 t + \log_3 x)^3 =$
 $= (\log_3 t + \log_3 x) \underbrace{(\log_3 t + \log_3 x)^4}_{> 0} - \underbrace{(\log_3 t + \log_3 x)^5}_{> 0} - \underbrace{5 \cdot \log_3 t \log_3 x \cdot (\log_3 t + \log_3 x)^3}_{< 0}$

при $\log_3 tx \neq 0$ скобка положительна.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6



* абсцисса отрезка -
абсцисса точки
пересек. с осью x .

Выполнение условия $(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$

означает, что отрезки 1 и 2 (на которых лежат (x_1, y_1) и (x_2, y_2))
отличаются по абсциссе на 11. (соседние отрезки отлич. на 3)
Для всех точек параллелограмма (и внутри)
выполнено условие $(3x + y) \in [0; 60]$.

Значит максимальное значение $(3x + y)$ равно 60,
соотв. отрезок с абсциссой 9.

Теперь задача заключается в том, чтобы поставить в
соответствие ^{каждому} отрезку с абсц. ^{параллельно} отрезок с абсциссой
на 11 больше. Это можно сделать единственным
способом. В каждой отрезке по 15 точек точек.

Будем для каждой пары отрезков пару точек можно
выбрать 225 способами. $\Rightarrow$ всего способов 2250.

(по паре отрезков)

Ответ: 2250.

Существуют отрезки, для всех
точек которых ~~выполнено~~ условие
значение $3x + y$.

Эти отрезки параллельны
наклонной стороне
параллелограмма.

Причем значение $3x + y$
для каждого отрезка равно
увеличенному значению абсциссы
точки, принадлежащей отрезку
"ОХ".

Всего таких отрезков (с разными
значениями $3x + y$) 21

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

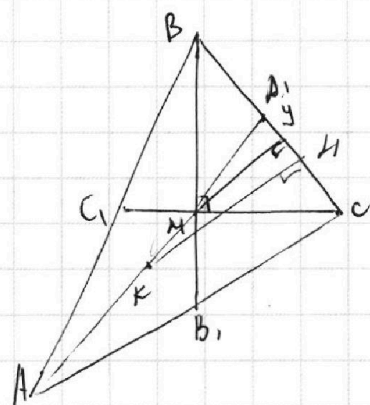
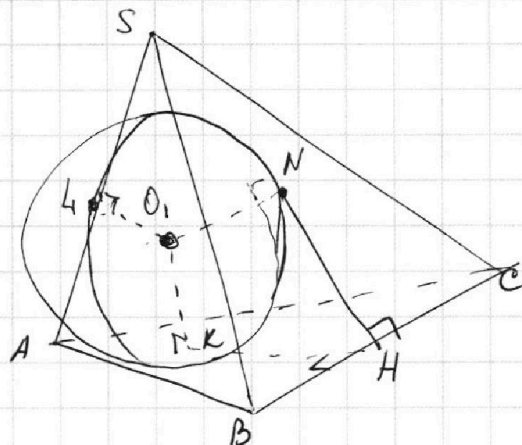
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7) б).



C_1 - ч. сферы

$$O, K \perp (ABC) \Rightarrow O, K \perp BC$$

$$O, N \perp (BSC) \Rightarrow O, N \perp BC$$

$$BC \perp (ONK) \Rightarrow \text{двугр. угол}$$

равен углу $\angle NHK$

$$\text{как отр. кас. } SL = SN = 4$$

$$NH = HK.$$

$$AK = AL = 8$$

$$KM = 4.$$

Опустим высоту из M на K

$$MY = \frac{2 \cdot 30}{12} = 5 \quad (S_{BNC})$$

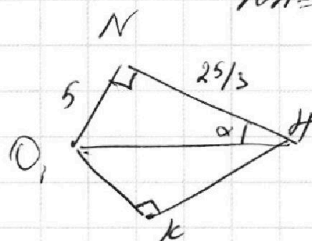
$$\text{также: } MA_1 = 6 \quad A_1K = 4 + 6 = 10.$$

из подобия

$$KH = MY \cdot \frac{10}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}.$$

как отр. кас.

$$NH = HK = \frac{25}{3}$$



$$\text{так } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle NHK = 2 \arctg 0,6$$

Ответ: $2 \arctg 0,6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

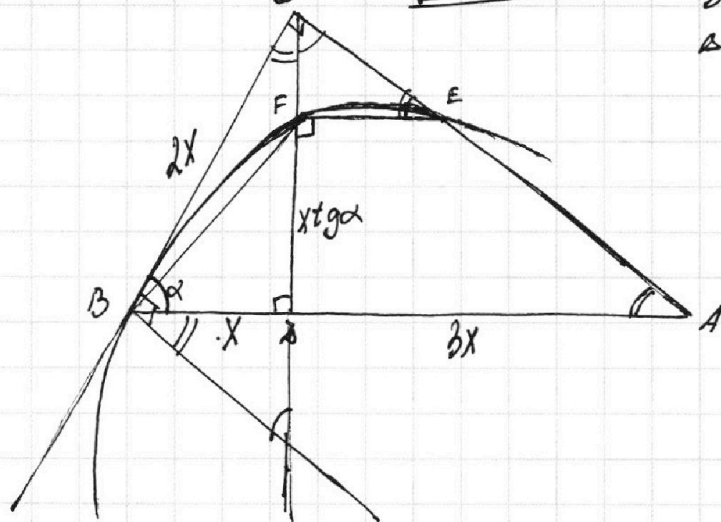
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Черновик Подobie



$$\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ECF \sim \triangle ACD$$

$$CE : CA = EF : AD$$

$$\frac{3x}{x \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

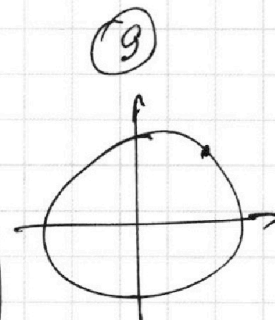
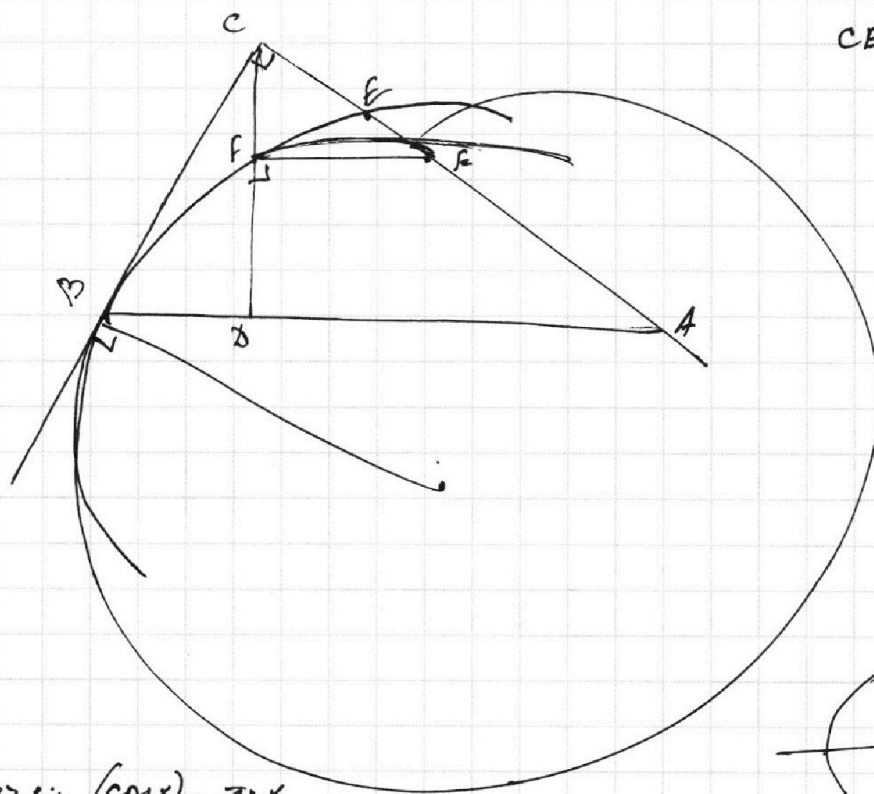
$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 3$$

$$\alpha = 60^\circ$$

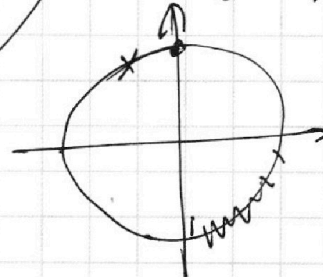
$$AC = \sqrt{6x^2 - 4x^2} = 2x\sqrt{3}$$

$$4x^2 = CE \cdot 2x\sqrt{3}$$

$$CE = \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} AC$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$



$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\operatorname{arcsin}\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Черновик

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим $\arcsin(\sin a)$. Оно возвращает угол
такой, что a в первой четверти $\Rightarrow \arcsin(\sin a) = a + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$.

a - во второй четверти

$$y = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \quad -\frac{3\pi}{5} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{2\pi}{5}. \quad x \in [-3\pi, 2\pi].$$

$$1) x \in [-3\pi, -\frac{5\pi}{2}] \quad y \in [-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

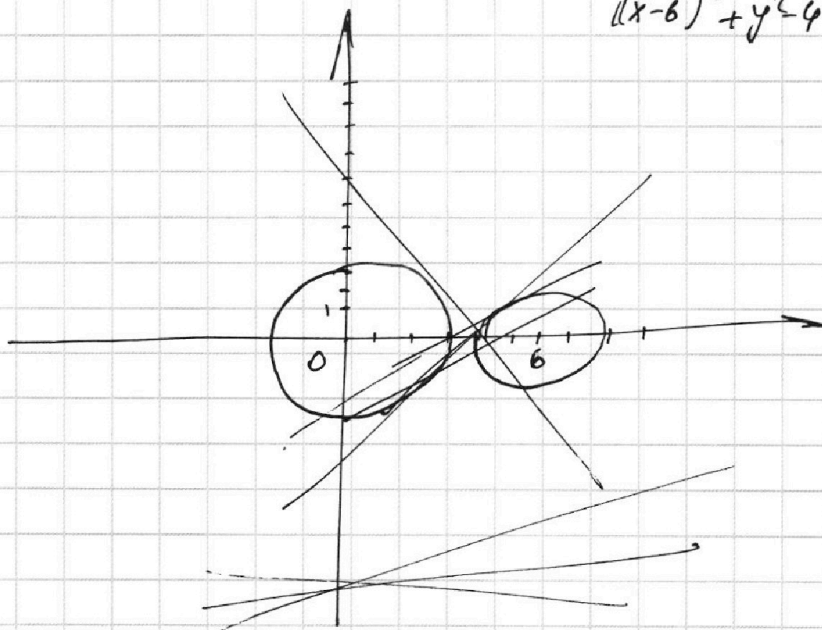
$$1) y \in [-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}]: \arcsin(\sin y) = y + 2\pi.$$

$$2) y \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$4) 2x + 2y - 3d = 0. \quad y = -\frac{d}{2}x + 3b. \quad - \text{прямая.}$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0. \quad \text{окр}$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

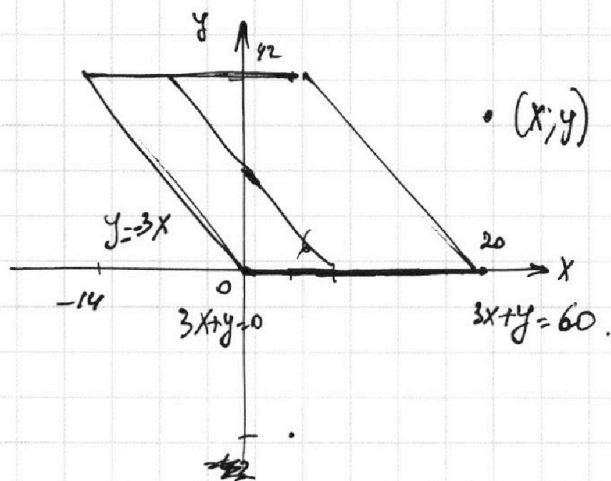
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6



$$3x_2 - x_1 + (y_2 - y_1) = 33$$

$$y_2 - y_1 \div 3$$

$$1) x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow y_2 - y_1 = 33.$$

Для каждого из точек
параллелограмма
 $x + 3y \in [0, 60]$. $\Rightarrow$

$$\rightarrow \text{мы не } 3x_2 + y_1 = 33.$$

Для каждого значения

$3x_1 + y_1$ существует ровно 1

а это отрезок ~~с~~ отрезок $3x_2 + y_2$, такой
из 16 целых
точек что вкл. усл.

т.к. $x + 3y \leq 60$, то

$$3x_1 + y_1 \in [0; 27].$$

Итого условием яз. 10 отрезков

$$10 \cdot 16 \cdot 15 = 2250$$

Черт.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

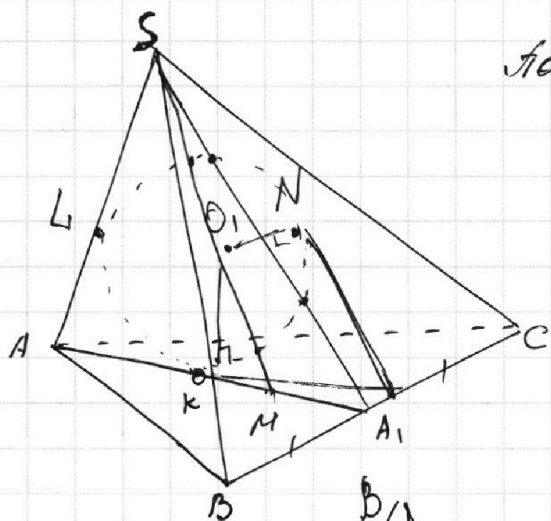
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

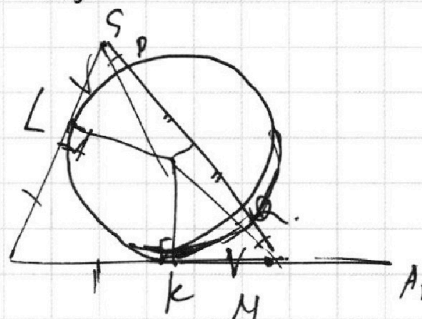
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(7)

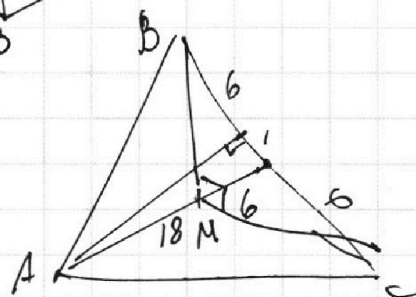


Построение плоскости
(ASA1)



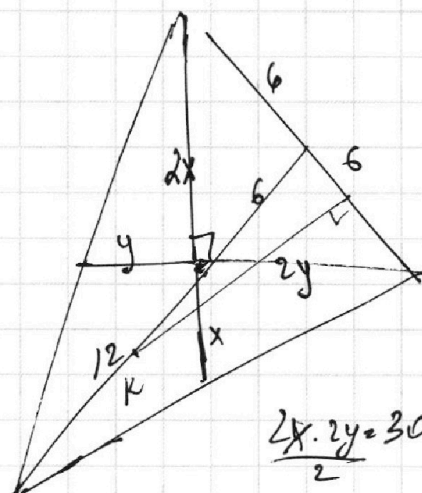
$$SA = AM$$

$$AB = \frac{3}{2} SA = 18$$



O_1 - ч. сфера.

$O_1 K \perp (ABC)$
 $O_1 N \perp (BSC).$



$$\frac{2x \cdot 2y}{2} = 30$$

Черн.

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$15 + y^2 = (x+y)(x^4 + 5xy/x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^4)$$