



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } abc \geq 2^{x_a+x_b+x_c} 3^{y_a+y_b+y_c} 5^{z_a+z_b+z_c} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Можно взять } a=2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13}, b=2^2 \cdot 3^3, c=2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}, \text{ тогда } ab=2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}; 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}, \\ bc=2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13}; 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}, ca=2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}; 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \\ \text{Отв. } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$a, b, c \in \mathbb{N}, ab: 2^9 3^{10} 5^{10}, bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}, ca: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

Пусть 2-й множитель в а входит x_a раз, в b x_b раз, в c x_c раз,
по условию $ab: 2^9 \Rightarrow x_a + x_b \geq 9, bc: 2^{14} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_b + x_c \geq 14, ca: 2^{19} \Rightarrow x_c + x_a \geq 19$

Сложив 3 неравенства получим, что $2(x_a + x_b + x_c) \geq 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq 21$. Если взять $x_a = 7, x_b = 3, x_c = 11$,

то $ab = 2^9 AB: 2^9, bc = 2^{14} BC: 2^{14}, ca = 2^{19} CA: 2^{19}$.

Аналогично y_a -к-вориз, которое входит в разл. $a, y_b - b, y_c - c$

$ab: 3^{10} \Rightarrow y_a + y_b \geq 10, bc: 3^{13} \Rightarrow y_b + y_c \geq 13, ca: 3^{18} \Rightarrow y_c + y_a \geq 18$

Сложив неравенства $2(y_a + y_b + y_c) \geq 41 \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 20,5$, т.к.

y_a, y_b, y_c цел., то их сумма тоже натуральная $\Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 21$

Если взять $y_c = 11, y_a = 7, y_b = 3$, то $ab: 3^{10} y_{ab}: 3^{10}$

$bc = 3^{14} y_{bc}: 3^{14}, ca = 3^{18} y_{ac}: 3^{18}$.

z_a -к-вориз, которое входит в а-ый множитель,
 $z_b - b, z_c - c$ раз

$ab: 5^{10} \Rightarrow z_a + z_b \geq 10, z_b + z_c \geq 13, z_c + z_a \geq 30, z_b \geq 0$

$z_a + z_b + z_c \geq 30 + 0 = 30$. Если $z_c = 17, z_a = 13$, то
все неравенства выполняются

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$CF = \frac{CB^2}{CR} = \frac{2EF \cdot CB}{EC}, EF = CF \cdot \operatorname{tg} 80^\circ =$$
$$= \frac{CF \cdot \sqrt{3}CF}{CB} \quad EC = \frac{CF}{\cos 60^\circ} = 2CF \Rightarrow \frac{EC}{EF} = \frac{EF}{EC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow CF = \sqrt{3} CB \Rightarrow k = \frac{CF}{CB} = \sqrt{3}, k^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ECF}}{S_{ACB}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{ECF}}{S_{ACB}} = \frac{1}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $x \in [-3\pi, -2\pi]$, то $\arccos(\cos x) =$

$$= -2\pi - x. \text{ Тогда } x = 2\pi - 5(-2\pi - x),$$

$$\cancel{-4x = 12\pi} \quad -4x = 12\pi, \quad x = -3\pi \in [-3\pi, -2\pi]$$

Мы перебрали все ^{корень}возможные x , а значит нашли все корни

$$\text{Ответ. } x = -3\pi, x = -\frac{4}{3}\pi, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{3}, x = 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

Для всех $L \in [-1, 1]$ верно: $\arcsin L + \arccos L = \frac{\pi}{2}$

возьмем $L = \cos x$, тогда $\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{2} - 5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 5 \arccos(\cos x) = 2\pi, \text{ т.к. } \arccos L \in [0, \pi], \text{ то}$$

$$5 \arccos(\cos x) \in [0, 5\pi] \Rightarrow x \in [-3\pi, 2\pi]$$

$$\Rightarrow x = (2\pi - 5 \arccos(\cos x)) \in [-3\pi, 2\pi]$$

Если $x \in [\pi, 2\pi]$, то $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$

$$x = 2\pi - 10\pi + 5x \Rightarrow x = 2\pi \in [\pi, 2\pi] - \text{корень}$$

Если $x \in [0, \pi]$, то $\arccos(\cos x) = x$

$$x = 2\pi - 5x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in [0, \pi] - \text{корень}$$

Если $x \in [-\pi, 0]$, то $\arccos(\cos x) = \pi - x$

$$x = 2\pi - 5(\pi - x) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, 0] - \text{корень}$$

Если $x \in [-2\pi, -\pi]$, то $\arccos(\cos x) = x + 2\pi$

$$x = 2\pi - 5(x + 2\pi) \Rightarrow 6x = -8\pi \Rightarrow x = -\frac{4}{3}\pi \in [-2\pi, -\pi] - \text{корень}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_3 x - \log_3 t)(\log_3 x - \log_3 t) + \log_3^2 x \log_3^2 t + 8) = 0$$

≥ 0 ≥ 0

$\log_3 x - \log_3 t \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 x \geq \log_3 t \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_3^3 x \geq \log_3^3 t \Leftrightarrow \log_3^3 x - \log_3^3 t \geq 0.$
 $\log_3^3 x - \log_3^3 t = (\log_3 x - \log_3 t)$ всегда
одного знака ~~тоже~~, тогда их произведение
 ≥ 0 . Тогда ≥ 0

$$(\log_3^3 x - \log_3^3 t)(\log_3 x - \log_3 t) + \log_3^2 x \log_3^2 t + 8 \geq 0$$

≥ 0 ≥ 0

не может быть 0, тогда
 $\log_3 x - \log_3 t = 0 \Rightarrow x = t \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$

Ур-ние $\log_3^5 x + 8 \log_3 x = \frac{7}{2}$ - 5-ой степени, а
значит имеет хотя бы одно решение x_0 , тогда

$$\text{если } \log_3^5 x_0 + 8 \log_3 x_0 = \frac{7}{2}, \text{ то}$$

$$\log_3^5 \frac{1}{x_0} + 8 \log_3 \frac{1}{x_0} = -\log_3^5 x_0 + 8 \log_3 \frac{1}{x_0} =$$
$$= -\log_3^5 x_0 - 8 \log_3 x_0 = -\frac{7}{2} - \text{тоже имеет}$$

решение

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



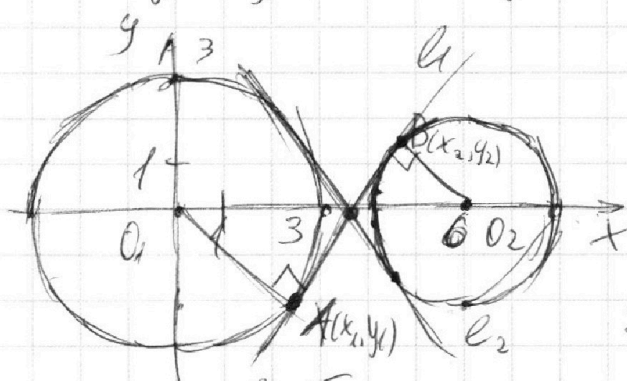
15

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$

$$(x^2 + y^2 - 9)((x^2 - 6)^2 + y^2 - 4) = 0 \text{ найдем второе уравнение:}$$



это 2 окр. Тенение
второго - прямая, она
имеет с окр. не более
2 пересечений. Выбираю

а мы выбираем как-то прямую, выбираю
в мы переносим прямую вверх и вниз.
Заметим, что если у прямой угол наклона меньше
чем у C_1 , или больше чем у C_2 , то мы можем
перенести её так, чтобы она пересекла обе
окр-ти. (Сначала мы перенесём её до т. касания
с 1-ой окр-тью, при этом она будет пересекать
вторую, затем значительно её подвинув, она
всё ещё будет пересекать вторую окр., но при
этом будет уже не касаться первой окр., а пересекать её.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы расс. от пр. касались окр., нужно, чтобы
расс. от O_1 до прямой было равно радиусу
окр. Для ω_2 то $\frac{a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{6 + c}{6}$

ℓ_1 кас. ω_1 в (x_1, y_1) , ω_2 в (x_2, y_2) . Тогда
 $\vec{O_1 A} \cdot \vec{AB} = 0 : (x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$

$$x_1 x_2 - x_1^2 + y_1 y_2 - y_1^2 = 0, \text{ также}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{O_2 B} = 0 \Rightarrow (6 - x_2, y_2) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$$

$$\begin{cases} 6x_2 - x_2^2 + x_1 x_2 + y_2^2 + y_2 y_1 = 0 \\ -x_1^2 + x_1 x_2 - y_1^2 + y_1 y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + 6x_2 - 6x_1 - x_2^2 - y_2^2 = 0$$

$\overset{r^2=9}{\quad \quad \quad} \quad \quad \quad \overset{-r^2=-9}{\quad \quad \quad}$

$$6x_2 - 6x_1 = 5$$

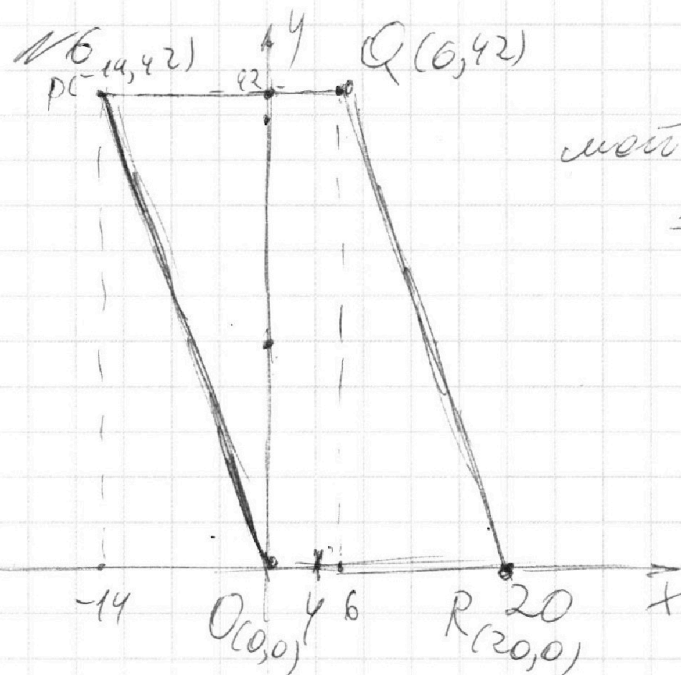
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдём уравнение прямой QR

$$\frac{x-6}{20-6} = \frac{y-42}{0-42}$$

$$x-6 = -\frac{y}{3} + 14$$

$$x = -\frac{y}{3} + 20$$

Все точки в параллелограмме лежат выше этой прямой, значит

$$x \leq -\frac{y}{3} + 20, \text{ также } 0 \leq y \leq 42$$

Найдём уравнение прямой PO : $\frac{x-0}{-14-0} = \frac{y-0}{42-0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{y}{3}$ Все то параллельно лежат ниже этой прямой, значит $x \geq -\frac{y}{3}$. По всем

точки параллельно заданы неравенствами

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ -\frac{y}{3} \leq x \leq 20 - \frac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq 3x + y \leq 60 \end{cases}$$

По-есть $3x_2 + y_2 \in [0, 60], 3x_1 + y_1 \in [0, 60],$

$$\text{Тогда } 3x_1 + y_1 = 3x_2 + y_2 - 33 \leq 27 \Rightarrow 3x_1 + y_1 \in [0, 27]$$

Рассмотрим все варианты $3x_2 + y_2 = 33 + 3x_1 + y_1$

$$3x_1 + y_1 = \frac{3}{k} \in [33, 60], k \in [11, 20].$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2 \cdot 36 - 2 \cdot 36 \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{11}}{6},$$

$$CM^2 = CA_1^2 + A_1M^2 - 2CA_1 \cdot A_1M \cdot \cos \angle CA_1M =$$

$$= 2 \cdot 36 + 2 \cdot 36 \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow (CM \cdot BM)^2 =$$

$$= (2 \cdot 36)^2 \cdot \left(1 - \frac{11}{36}\right) = 4 \cdot 36 \cdot 25 \Rightarrow CM \cdot BM = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{3}{2} CM \cdot \frac{3}{2} BM = 135, \text{ тогда}$$

$$CC_1 \cdot BB_1 \cdot AA_1 = 135 \cdot 18 = 2430$$

Ответ: 2430

$$5) SO = \sqrt{ON^2 + SN^2} = \sqrt{41}, SL = \sqrt{SO^2 - OL^2} = 4,$$

$$\text{Тогда } AL = AS - SL = 8, AK = AL = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KA_1 = AA_1 - AK = 10.$$

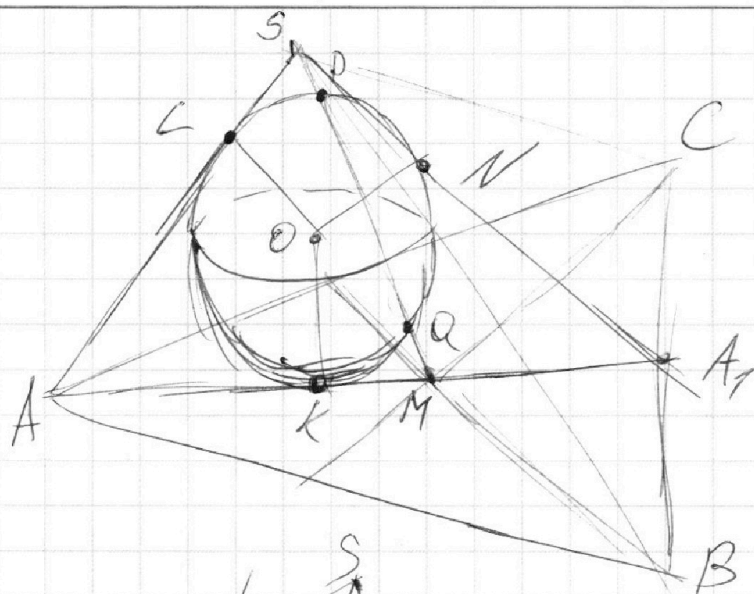
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

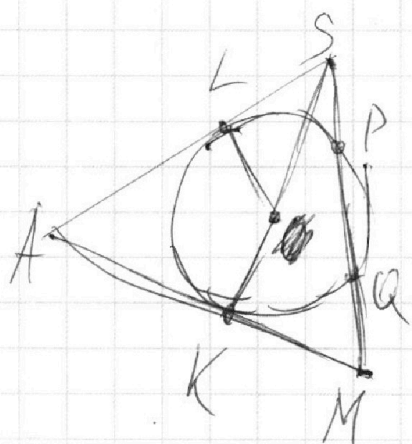
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SP = MQ, S_{ABC} = 90,$$

$$SA = BC = 12,$$

$$SN = 4, r = 3$$

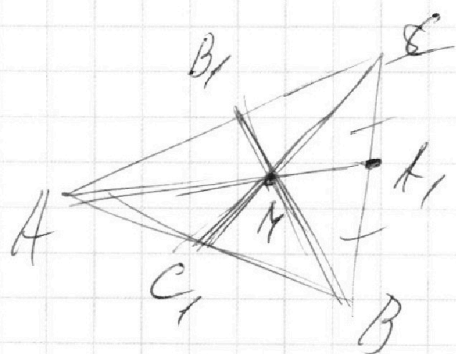


$$SL^2 = SP \cdot SQ = SP \cdot (PQ + SP) =$$

$$= QM \cdot (PQ + QM) = QM \cdot MP = MK^2,$$

$$AL = AK \Rightarrow AM = AK + KM + AL +$$

$$+ LS = AS = BC = 12.$$



$$\text{Тогда } AA_1 = \frac{3}{2} AM = 18,$$

$$S_{AA_1B} = \frac{AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin \angle AA_1B}{2}$$

$$= \frac{S_{ABC}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 \cdot \frac{12}{2} \cdot \sin \alpha = 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}.$$

Из углов AA_1B и AA_1C выхвой, другой тупой,

$$\text{т.е. } \cos \angle AA_1B = \frac{\sqrt{11}}{6}, \cos \angle AA_1C = -\frac{\sqrt{11}}{6},$$

$$A_1M = \frac{AA_1}{3} = 6 \Rightarrow MB = MA_1^2 + A_1B^2 - 2MA_1 \cdot A_1B \cos \angle AA_1B$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$x \neq 1 \Rightarrow \log_3 x \neq 0$. Докажем первое
рав-во на $\log_3 x$

$$\log_3^5 x + 6 = \frac{5}{2} \log_x 3 \log_3 x - 8 \log_3 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3^5 x + 8 \log_3 x = -\frac{7}{2}$$

Сделаем замену $t = 5y$, $t \neq 1 \Rightarrow \log_3 t \neq 0$

Докажем второе рав-во $\log_3 t$

$$\log_3^5 t + 2 = \frac{11}{2} \log_t 3 \log_3 t - 8 \log_3 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3^5 t + 8 \log_3 t = -\frac{7}{2}$$

Сложим 2 полученных уравнения:

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \log_3^5 t + 8 \log_3 t = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}$$

$$(\log_3 x + \log_3 t) (\log_3^4 x + \log_3^3 x \log_3 t +$$

$$+ \log_3^2 x \log_3^2 t - \log_3 x \log_3^3 t + \log_3^4 t) +$$

$$+ 8(\log_3 x + \log_3 t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x + \log_3 t) (\log_3^3 x (\log_3 x - \log_3 t) +$$

$$+ \log_3^3 t (\log_3 t - \log_3 x) + \log_3^2 t \log_3^2 x + 8) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $x_1 = k - \frac{y_1}{3}$ сюда подходит все $y \in [0, 42]$, $y \in 3$ и $x = \frac{y_2}{3}$ 15, в то же время $x_2 = \frac{33 + 3k - y_2}{3} = 11 + k - \frac{y_2}{3}$, сюда также подходит все y_2 кратные 3. При этом таких k : $\frac{27}{3} + 1 = 10$ (выкрывшие 307 190 27 и 0).
Пар по ур. этим условиям: $10 \cdot 15^2$
Если $3x_1 + y_1 = l$, то $x_1 = \frac{l - y_1}{3}$
Если $l = 3k + 1$, то $y = 3k + 1$, $y \in [0, 42]$, таких y равно $\frac{42}{3} = 14$, также $l = 3k + 2$
 $y_2 + 3x_2 = 33 + l$, $x_2 = 11 + \frac{l - y_2}{3}$, таких y_2 будет также 14 (все они подходят, т.к. $y_2 + 3x_2 \in [0, 60]$),
что верно для всех оставшихся l , которых 28-10. Тогда мы добавим $18 \cdot 14^2$ пар
Ответ: всего $10 \cdot 15^2 + 18 \cdot 14^2$ пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = 20 - \frac{y_1}{3}$$

$$x_2 = 9 - \frac{y_2}{3}$$

$$x_1 = \frac{59 - y_1}{3}, x_2 = \frac{28 - y_2}{3}$$

$$x_2 = \frac{58 - y_1}{3}, 9$$

$$19 - \frac{y_1}{3}$$

$$9$$



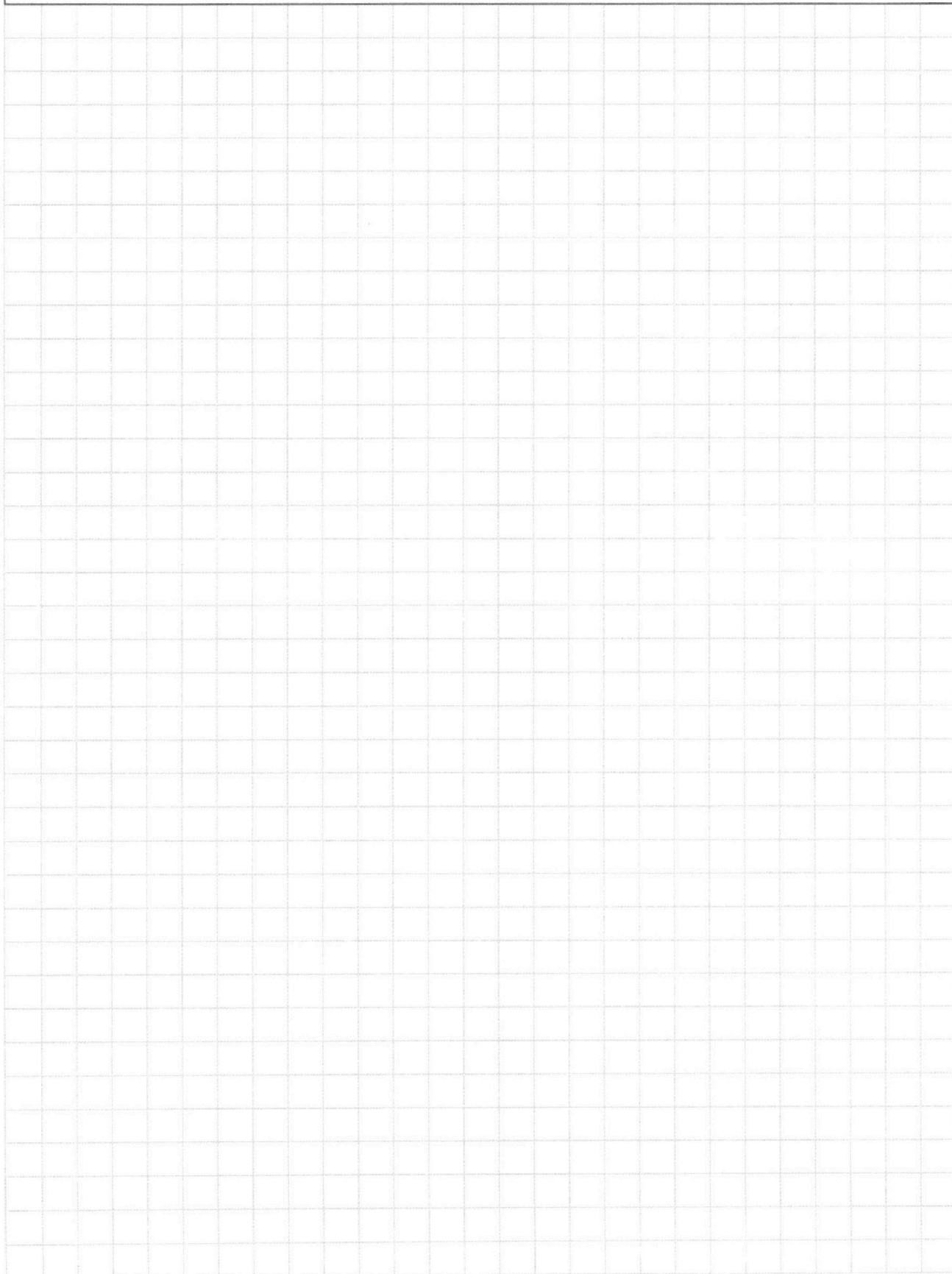
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



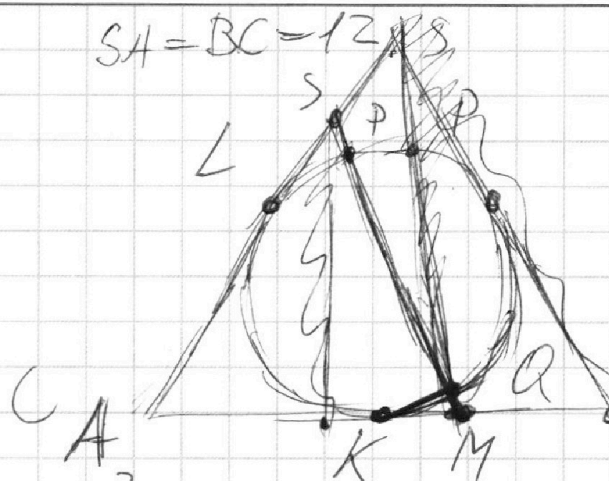
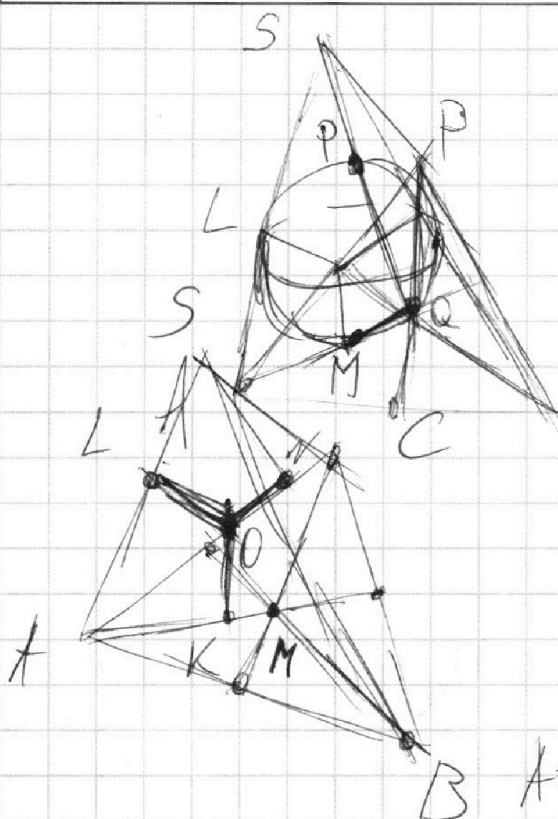
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

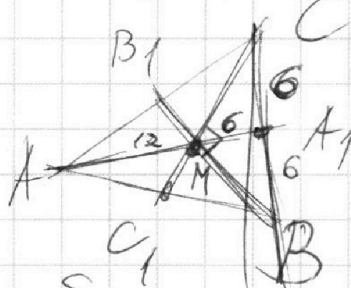
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SL^2 = SP \cdot SQ = MK^2 = AS \cdot AM$$

$$AM = BC = 12 \Rightarrow AM = 12, AS = 18$$



$$AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin \angle AA_1B = \frac{S}{2}$$

$$= \frac{18 \cdot 6}{2} = 54$$

$$\sin \angle AA_1B = \frac{54}{18 \cdot 6} = \frac{5}{6}$$

$$18 \cdot 6 \cdot \sin \alpha = 90 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{6}$$

$$AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin \alpha = \frac{S}{2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$= 2 \cdot 36 \cdot \left(1 \pm \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$$

$$= 100 \cdot 36$$

$$MB \cdot MC = 360 \cdot 60$$

$$SN = 4, ON = 5$$

$$MB^2 = MA_1^2 + A_1B^2 - 2MA_1A_1B \cos \alpha =$$

$$MB^2 \cdot MC^2 = 4 \cdot 36^2 \cdot \left(1 - \frac{11}{36}\right) =$$

$$MB$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☒	☐	☒	☐	☐

МФТИ

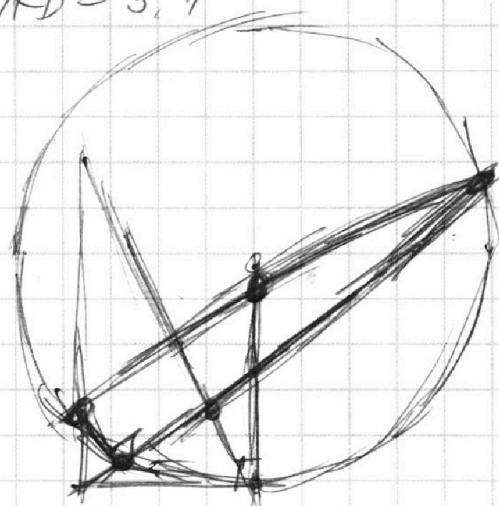
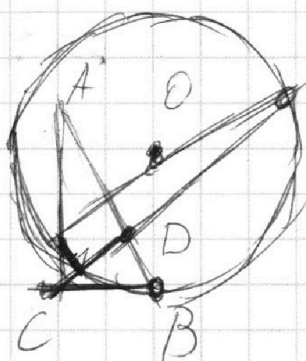
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}, bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}, ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$x_a + x_b \geq 9 \quad x_b + x_c \geq 14 \quad x_a + x_c \geq 19 \Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq 21$$

$(2, 7, 2)$

$$AP: AD = 3:1$$



$$\begin{array}{r} +135 \\ 18 \\ \hline 1080 \\ 135 \\ \hline 2430 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☒	☒	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax+2y-3b=0$$

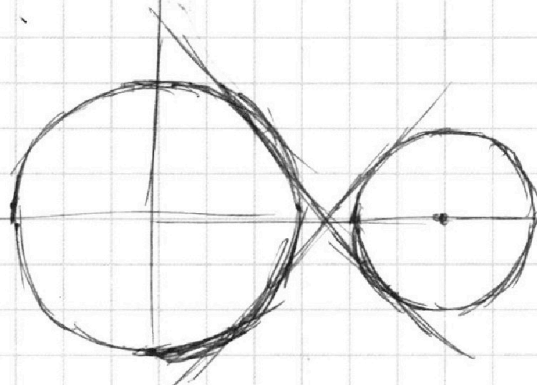
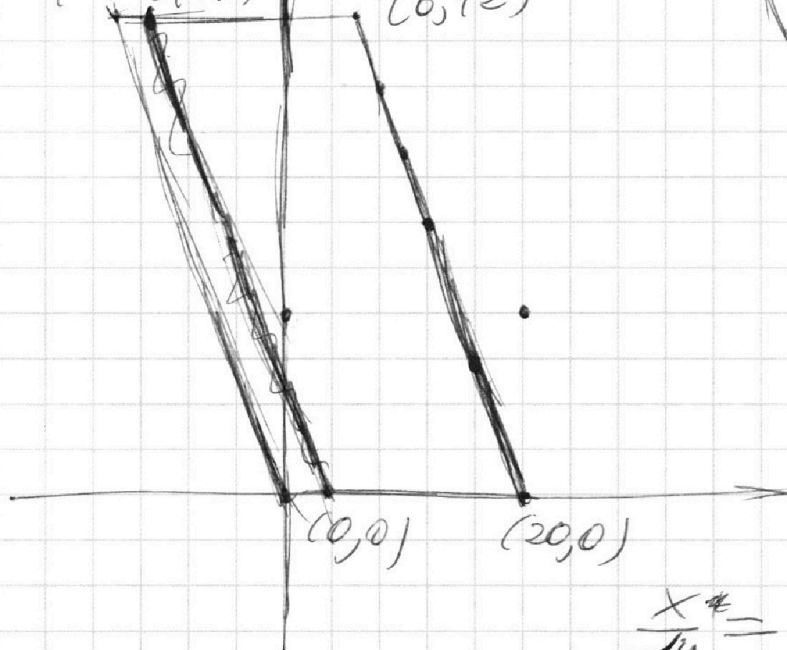
$$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12+32)=0$$

$$(x-6)^2+y^2=4$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$

$(-14, 42)$ $(10, 42)$

$(6, 42)$



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$\frac{x-6}{20-6} = \frac{y-42}{-42}$$

$$x-6 = \frac{y}{3} + 14$$

$$x = \frac{y}{3} + 20$$

$$x \leq \frac{y}{3} + 20$$

$$x \geq \frac{y}{3}$$

$$\frac{x-6}{-14} = \frac{y}{42}$$

$$x \geq -\frac{y}{3}$$

$$0 \leq y \leq 42 \quad 0 \leq 3x+y \leq 60 \quad 0 \leq y \leq 42$$

$$-y \leq 3x \leq 60-y \quad -y \leq 3x \leq 60-y \quad y = 24x$$

$$-y \leq t \leq 60-y \quad t_2 + y_2 - t_1 - y_1 = 33$$

$$y_1 = 42 \quad t \in [-42, 18] \quad y_1 + t_1 \in [0, 60]$$

$$y_1 + t_1 = 60 \quad t_2 \in [3, 13] \quad 3x_2 + y_2 = 4$$

$$y_1 + t_1 = 60 \quad t_1 = 60 - y_1 \quad y_1 = 42, 39, \dots, 0$$

$$t_2 = 27 - y_2 \quad y_2 = 0, \dots, 37 \quad 59 \Rightarrow y_1 = 15, \dots, 14$$

$$\frac{4}{3}\pi$$

$$\frac{2\pi}{3}$$

$$120$$

$$-60 = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} = -\frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{6}$$

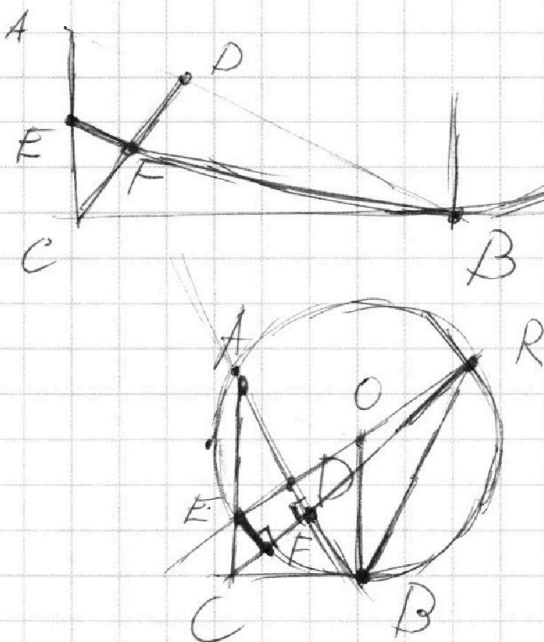
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF \quad AD:DB = 3:1$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DB}{BC}$$

$$\frac{AD}{DB} = 3 \quad \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{PB}$$

$$CD^2 = 3DB^2 \quad CR = \sqrt{3}DB$$

$$BC = 2DB$$

$$\angle ABC = 60^\circ$$

$$CB^2 = 4DB^2 \quad CF \cdot CR = CB^2 = 4DB^2 = \frac{4}{3}CD^2$$

$$\angle CEF = 60^\circ$$

$$5\sqrt{1-x^4} = x + \frac{\pi}{2} \quad \arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2} \quad 2\pi = 6x \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 =$$

$$= \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \quad \log_3^5 x + 6 = \frac{5}{2} - 8 \log_3 x$$

$$\log_3^4 t + 2 \log_t 3 = \log_{t^2} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^5 t + 2 = \frac{11}{2} - 8 \log_3 t \quad \frac{7}{2} \quad -\frac{7}{2}$$

$$\log_3^5 t + 8 \log_3 t = \frac{7}{2} \quad + \log_3^3 x (\log_3 x \log_3 t) + t = 1$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x = -\frac{7}{2} \quad \log_3^3 t + \log_3 t - \log_3 x +$$

$$\log_3 x t \cdot (\log_3^4 t - \log_3^3 t \log_3 x + \log_3^2 t \log_3^2 x - \log_3^4 t \log_3^3 x + \log_3^4 x + 8) = 0$$