



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1 : 4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двутранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

Пусть a_1, b_1, c_1 - степени вхождения якорей

в них a, b, c соответственно. Тогда имеем систему:

Л.н. abc имеют \min , то имеют \min степень вхождения $2, 3, 5$ в

abc (2, 3, 5 входят
одинаково)

$$+ \begin{cases} a_1 + b_1 \geq 6 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \quad \text{откуда } a_1 + b_1 + c_1 \geq 18, \text{ значит} \\ c_1 + a_1 \geq 16 \quad \text{но равенство} \end{cases}$$

Пусть $a_1, b_1, c_1 = \text{числ}$ при $a_1 = 4, b_1 = 2, c_1 = 12$

Пусть a_2, b_2, c_2 - степени вхождения якорей

в a, b, c соответственно, откуда чисел

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 13 \\ b_2 + c_2 \geq 21 \quad \text{сумма, чисел: } a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{53}{2}, \\ c_2 + a_2 \geq 25 \quad \text{и.н. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ но } a_2 + b_2 + c_2 \geq \end{cases}$$

≥ 30 . Значит, числа $a_2 = 8, b_2 = 5, c_2 = 17$ нереал.

значения, и их сумма равна 30.

Пусть a_3, b_3, c_3 - степени вхождения якорей

в a, b, c соответственно, откуда чисел.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 + b_3 \geq 11 \quad (1) \\ b_3 + c_3 \geq 13 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ c_3 + a_3 \geq 28 \quad (3) \end{array} \right\}$$

Сложим первые две неравенства:

$$a_3 + c_3 + 2b_3 \geq 24$$

но из (3) $c_3 + a_3 \geq 28$, тогда

минимальная сумма $a_3 + b_3 + c_3 = 28$ при $a_3 = 13, b_3 = 0, c_3 = 15$

(если считать включением)

Минимальное значение $abc = 2^{18} \cdot 3^{20} \cdot 5^{28}$

($a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$, $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$, $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$)



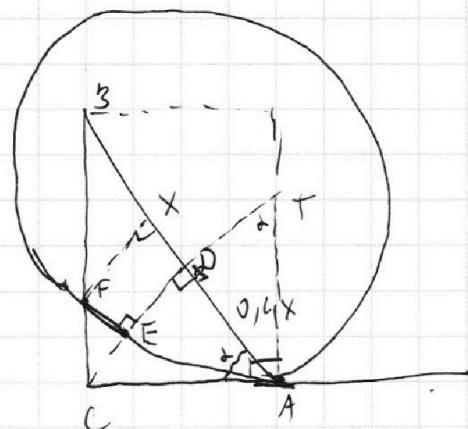
На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

$$BD = x, AD = 1,4x - x = 0,4x$$

$$CD = \sqrt{x \cdot \frac{2}{3}x} = x\sqrt{\frac{2}{3}}$$

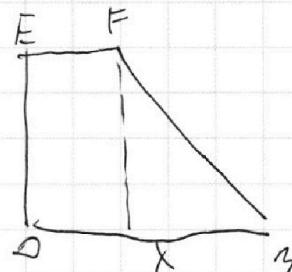
$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF}$$

$$AD^2 = CD \cdot DT$$

$$\frac{4}{25}x^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}x \cdot DT$$

$$DT = CD = \frac{2}{3}x$$

$$DT = \frac{x^2 - \frac{4}{25}x^2}{x\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{x \cdot 4}{25\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{4\sqrt{5}x}{25\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{10}x}{25 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{10}x}{25}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

Возьмём \cos от \arccos не менять, а затем \cos -
умножим на \cos и получим

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)\right) = \sin\left(\frac{5\pi - 9\pi + 2x}{10}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right)$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = 0$$

$$2 \sin \frac{x - \left(\frac{x - 2\pi}{5}\right)}{2} \cos \frac{\frac{x - 2\pi}{5}}{2} = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x - x + 2\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{6x - 2\pi}{10}\right) = 0 \quad | :2$$

$$\sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3x - \pi}{5}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) = 0 & ① \\ \cos\left(\frac{3x - \pi}{5}\right) = 0 & ② \end{cases}$$

$$① \sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{2x + \pi}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \pi = 5\pi k$$

$$2x = -\pi + 5\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

проверим получившуюся серию реш:

при $k \geq -1$ $x \leq -3\pi$, тогда в итоге

ур-нм $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ нулем не б.

$\Rightarrow 15\pi$, но м.н. $0 \leq \arccos(\alpha) \leq \pi$, то есть

знач $\leq 10\pi$, откуда при $k \leq -1$ решением нет

при $k=0$ $x = -\frac{\pi}{2} \cdot \oplus$

$$10 \arccos(\sin(-\frac{\pi}{2})) = 10 \arccos(-1) = 10\pi$$

$$9\pi - 2 \cdot (-\frac{\pi}{2}) = 10\pi$$

при $k=-1$: нулю нет

$\Rightarrow k=1$:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 5\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$10 \arccos(0) = 10$$

$$9\pi - 2 \cdot 2\pi = 5\pi$$

$5\pi \neq 10$, не подн.

при $k \geq 2$

$$x \geq -\frac{\pi}{2} + 5\pi = \frac{11\pi}{2}$$

тогда новые значения в итоге уменьшатся

$$\leq 9\pi - 11\pi = -2\pi < 0, \text{ но } 10 \arccos(\sin x) \geq 0,$$

откуда при $k \geq 2$ решений нет

② $\cos(\frac{3x-\pi}{5}) = 0$

$$\frac{3x-\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$3x - \pi = \frac{5\pi}{2} + 5\pi m$$

$$3x = \frac{9\pi}{2} + 5\pi m$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \frac{4\pi}{6} + \frac{5\pi m}{3}$$

при $m=0$:

$$x = \frac{4\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} \oplus$$

$$3\pi - 2 \cdot \frac{5\pi}{6} = 9\pi - 5\pi = \frac{20\pi}{3}$$

$$10 \arccos(\sin \frac{5\pi}{6}) = 10 \arccos(-\frac{1}{2}) : 10 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

при $m=1$:

$$x = \frac{4\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{14\pi}{6} \oplus$$

$$9\pi - 2 \cdot \frac{14\pi}{6} = 9\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

$$10 \arccos(\sin \frac{14\pi}{6}) = 10 \arccos(\sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{10\pi}{3}$$

при $m=2$: \oplus

$$x = \frac{4\pi}{6} + \frac{20\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}$$

$$9\pi - 2 \frac{9\pi}{3} = 0$$

$$10 \arccos(\sin \frac{24\pi}{6}) = 10 \arccos(\sin \frac{\pi}{2}) = 0$$

при $m \geq 3$

$2x > 9\pi$ и при решении отрицательные значения
рассматриваться не могут

при $m=-1$

$$x = \frac{2\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{8\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3} \oplus$$

$$9\pi + \pi = 10\pi$$

$$10 \arccos(\sin \frac{-\pi}{2}) = 10\pi$$

при $m \leq -2$

$x < -\frac{\pi}{2}$ и при решении $> 10\pi$, значение
рассматриваться не могут.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Ответ: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{9\pi}{2} \right\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 4.

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 81 - a) = 0 & (2) \end{cases}$$

(2)

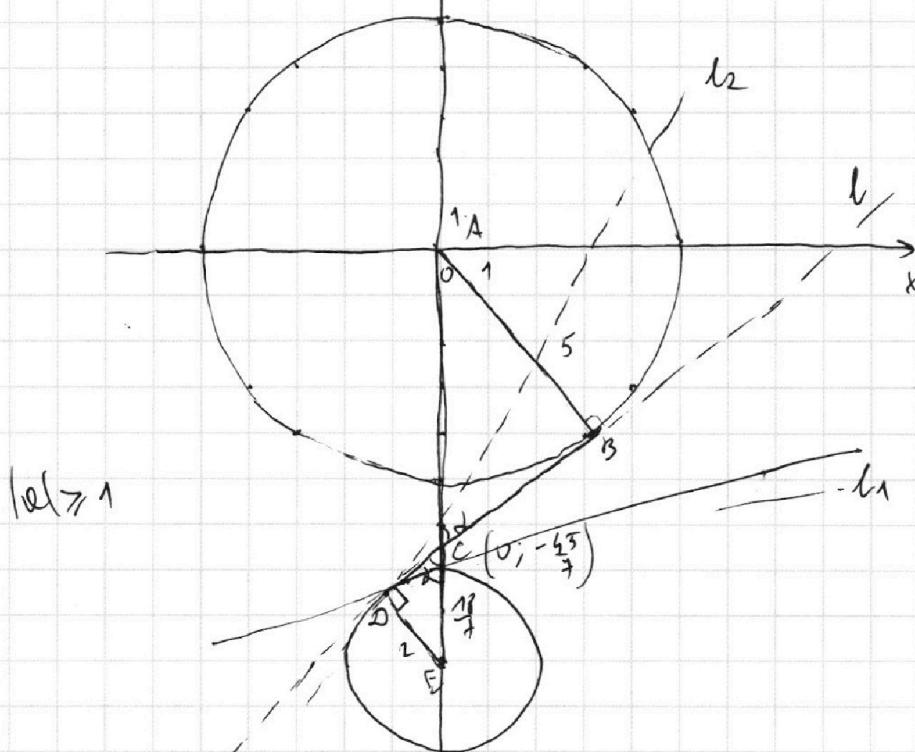
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 9 \end{cases}$$

(1):

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \quad \text{при } a \neq 0$$

$$\text{при } a = 0 \quad x = \frac{b}{5}.$$

↑ y



$|a| \geq 1$

Взяв прямую с фиксированным углом α , мы можем перенести ее (затем мене-мо в)

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Значит, что если прямая - также ~~изнутри~~
(округл. изнутри её в ^{внешнюю сторону})
 касательная 2 прямой, как прямая l, то также
 касательные к ней не пересекут, т.к. параллельны друг
 другу и будут лежать на ^{одной} линии
 тоже пересечет с другой изнутри

(при касании - с внешней). Значит, что если
 мы увеличим угол при прямой (на ^{изнутри}),
 отвечающий ^{изнутри} прямой l (пр. l₂ не растягивается),
 то симметричные ^{изнутри} прямые не будут иметь общие 2
 решения. Если уменьшить угол при прямой (на
 изнутри) или пр. прямой l (пр. l₂ не растягивается),
 то симметричные будут иметь 4 решения при касании
 l- (пересечение с изнутри)

1) $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ по 2 углам; $AB=5$ (высота), $ED=2$

(высота), можем $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{ED} = \frac{5}{2}$

$AE = 9$

$AB = \frac{5}{7} \cdot 9 = \frac{45}{7}$

$CE = \frac{2}{7} \cdot 9 = \frac{18}{7}$

Можем l пропорционально через в. C ($2; -\frac{55}{7}$)
~~если~~ $DCE = \frac{18}{7 \cdot 2} = \frac{18}{14}$ sm $DCE = \frac{2}{\frac{18}{7}} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

∠ DCE = α , тогда ^{ненужно} узловое значение α для бокуса решения

$$\text{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right)$$

$$k = -\frac{5}{6a} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right)$$

$$\alpha = -\frac{6}{5} \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right)$$

таким образом $|k| \leq \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right)$ с учетом

точек решения (кроме случая $a=0$),
мы имеем вертикальные прямые $x = \frac{6}{5}$, которые

имеют конечное количество точек решения), таким образом и
имеем конечное количество точек решения.

Установим ~~все~~ $\alpha = 0$; т.е. $k = \frac{6}{5} \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right)$

$$|k| > \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{7}{9}\right), \text{ т.е. } k = -\frac{5}{6a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

n5.

$$\begin{cases} \log_{m^4} x - 6 \log_{x^{11}} m = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{m^4} (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-11}) - 5 \end{cases}$$

(*):

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ 0,5y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_{x^{11}} m = \frac{1}{\log_m x}$$

$$\log_{x^3} \frac{1}{121} = - \log_{x^3} m^2 = -\frac{2}{3} \log_x m = \frac{-2}{3 \log_x X}$$

$$\begin{aligned} \log_{0,125y^3} (11^{-11}) &= \log_{(0,5y)^3} (11^{-11}) = -\frac{11}{3} \log_{0,5y} 11 = \\ &= -\frac{11}{3 \log_{0,5y} X} \end{aligned}$$

$$\log_m x = a, \log_{11} 0,5y = b$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \quad (-3a \neq 0)$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{11}{3b} - 5 \quad (-3b \neq 0)$$

$$+ \begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases}$$

$$3a^5 + 15a = -36^5 - 15b \quad (:3)$$

$$3a^5 + 15a = (-b)^5 + (-5b - 5)(-b)$$

Решение



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3a^5 + 15a + 3b^5 + 15b = 0 \quad | :5$$

$$\cancel{a^5} + 15a$$

$$a^5 + 5a = (-b)^5 + 5(-b)$$

$$\text{Всем } f(t) = t^5 + 5t$$

$f'(t) = 5t^4 + 5 > 0$, значит $f(t)$ монотонно
возрастает, т.е. каждое значение принимает
один раз

$$f(a) = f(-b), \text{ значит } a = -b$$

$$\log_{10} x + \log_{10} 0,5y = 0$$

$$\log_{10} 0,5xy = 0$$

$$0,5xy = 1$$

$$xy = 2$$

Задача 2.



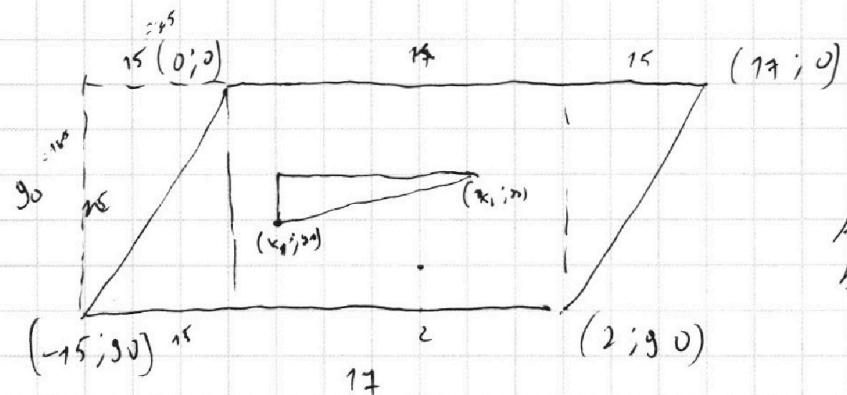
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$\frac{y_2 - y_1}{15} = 6$$

$$y_2 - y_1 = 6t$$

$$y_2 = y_1 + 6t$$

$$6 \underbrace{(x_2 - x_1)}_{16} + \underbrace{y_2 - y_1}_{6t} = 48$$

$$6, \dots$$

$$x_2 - x_1 = 0$$

$$y_2 - y_1 = 6t$$

$$6t = 48$$

$$C \quad \text{найд}$$

0 6 12 18 24 30 36 42 48



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

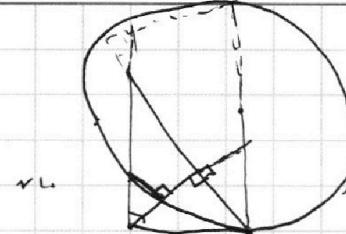
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

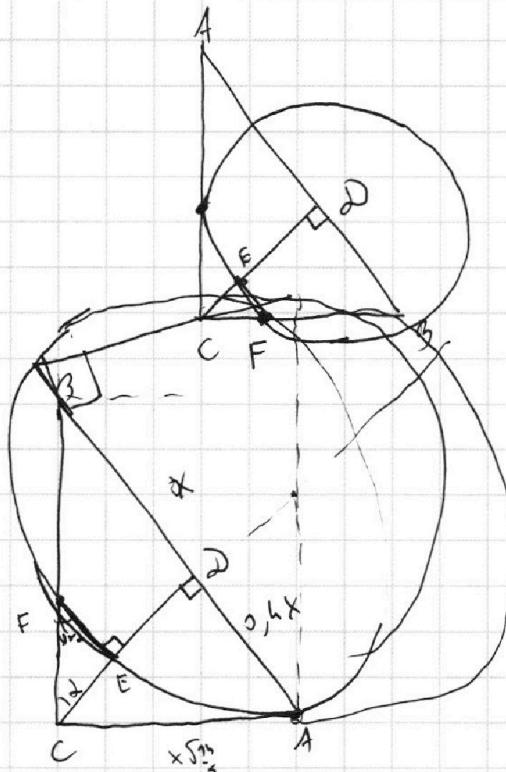
$$\log_{10} x = \alpha$$

$$\log_{10} \left(\frac{y}{x} \right)^3 \left(10^{-13} \right) =$$

$$0,125 \cdot 5^3 =$$



$AB \parallel EF$



$$CA^2 = CE \cdot CD$$

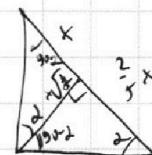
$$CA^2 = CE \cdot x \sqrt{\frac{2}{3}}$$

SA

$$\frac{4}{25} x^2$$

$$CE = x \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{16}{25}$$

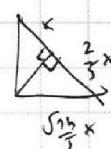
$$= \frac{x \cdot 14}{25 \sqrt{\frac{2}{3}}} =$$



$$h = \sqrt{x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2} = x\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$$CA^2 = \sqrt{\frac{4}{25}x^2 + \frac{2}{3}x^2} =$$

$$= \frac{4}{25}x^2 + \frac{10}{25}x^2 = \frac{14}{25}x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 5.

$$\begin{cases} \log_{11} x - 6 \log_{11} 11 = \log_{11} x^3 \left(\frac{1}{11}\right)^2 - 5 \\ \log_{11} (0.5y) + \log_{0.5y} 11 = \log_{(0.5y)^3} (11^{-1})^5 \end{cases}$$

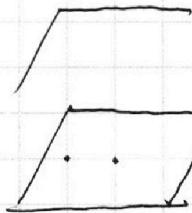
$$\log_{11} x = \alpha$$

$$\log_{11} x^3 \left(\frac{1}{11}\right)^2 = -\log_{11} x^3 \cdot 11^2 = -\frac{2}{3} \log_{11} x \cdot 11$$

$$\log_{11} x = \alpha$$

$$\log_{11} 0.5y = \beta$$

$$-\frac{13}{3} \log_{0.5y} 11$$



$$\begin{cases} \alpha^4 - 6\alpha = -\frac{2}{3} \alpha - 5 & | \cdot 3\alpha \\ 0^4 + \frac{1}{6} = -\frac{13}{3} \beta - 5 & | \cdot 3\beta \end{cases}$$

$$\boxed{\quad}$$

$$3\alpha^5 + 3 + 13\beta + 15\alpha = 0$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \sqrt[4]{x^4 + 10^4} \\ \hline 4 \end{array}$$

$$3\alpha^5 - 18 = -2 - 15\alpha$$

лаб

$$a+b = \log_{11} x \cdot 0.5y$$

$$2^{3+3} =$$

$$\begin{cases} 3\alpha^5 + 15\alpha - 16 = 0 \\ 3\beta^5 + 15\beta + 16 = 0 \end{cases}$$

$$(x^3+y^3) = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$3(a^5+b^5) + 15(a+b) = 0$$

$$\begin{array}{r} a^3 + b^3 \\ \hline a^3 + b^3 \\ - a^3 - b^3 \\ \hline - a^2 b + b^2 \end{array}$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3 b +$$

$$a^5 + b^5 = -5(a+b)$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \\ \hline a^5 + b^5 \\ - a^5 + a^3 b - a^2 b + a b^3 + b^4 \\ \hline - a^2 b + b^4 \end{array}$$

$$a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - b^3 a + b^4 = -5$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \\ \hline a^5 + b^5 \\ - a^5 - b^5 \\ \hline - 2 a^2 b^2 \end{array}$$

$$a^5 + 5a = -b^5$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \\ \hline a^5 + b^5 \\ - a^5 - b^5 \\ \hline - 2 a^2 b^2 \\ \hline - 2 a^2 b^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$a^5 + 5a = -b^5 + (ab)$$

$$f(t) = t^5 + 5t$$

$$f'(t) = 5t^4 + 5$$

~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

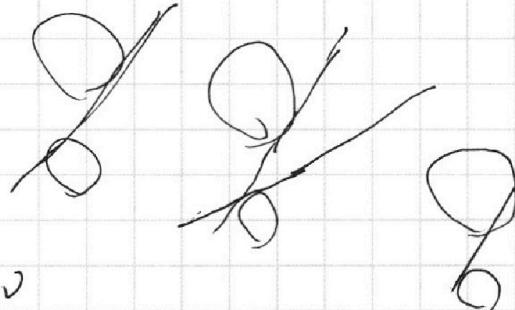
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 8 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 81 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

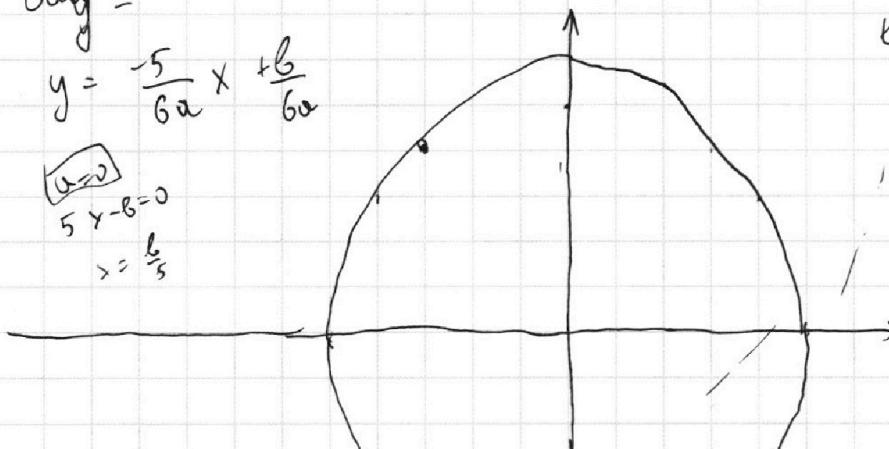
$$x^2 + (y^2 + 18y) + 81 - 4 = 0$$



$$6ay = -5x + 8$$

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{8}{6a}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 5y - 8 = 0 \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$



$$x^2 + (y + 9)^2 = 9$$

$$\log n^x = t$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{x^2}{3t} + 15 = 0$$

$$\begin{aligned} 3t^5 + 15t - 17n &= 0 \\ 3t^5 + 15t - 16 &= 0 \\ t &= 2. \end{aligned}$$

$$3t^5 = 3(2)^5 = 96$$

$$3t^5(x^2 + 15) = 96$$

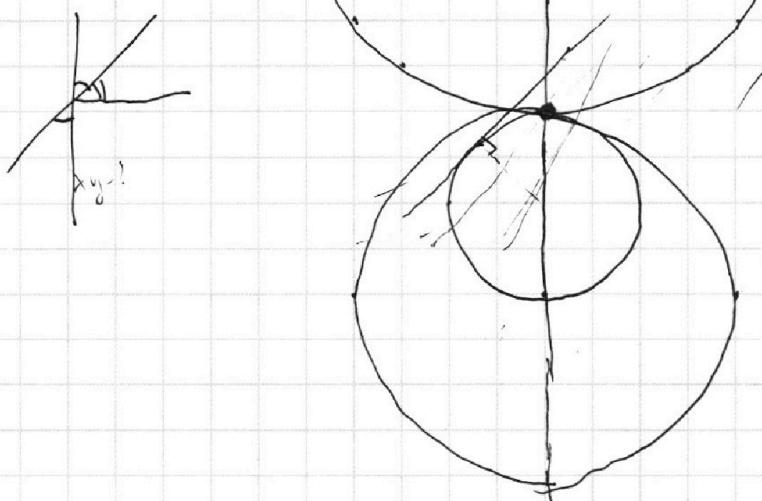
$$\begin{aligned} \log x^4 &= 2 \\ \log x^4 &= 2 \\ \log x^4 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log x^3 \frac{1}{n^3} &= \log x^3 1 - \\ &\quad - \log x^3 n^3 = \\ - \log x^3 n^3 &= \\ - \log x^3 n^3 &= -\frac{2}{3} \log x n \end{aligned}$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$$

$$\log n^4 x - 6 \log x n^3 = \log x^3 \left(\frac{1}{n}\right)^2 - 5$$

$$\log n^4 \left(\frac{1}{2}\right) + \log \frac{1}{2} n^3 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(n^{-1}\right)^3 - 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\frac{1}{6} [0, 10\pi]$$

$$4\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = \frac{7\pi - 10\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{6} = 4 + \frac{3}{6} = 4 + \frac{1}{2}$$

$$\arcsin(\sin x)$$

$$\frac{7\pi}{6} = 2$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$2 + \frac{5}{6}$$

$$\cos(\dots) = \cos(\dots)$$

$$\frac{12}{6} + \frac{5}{6}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin(90^\circ - x)$$

$$9\pi - 2x =$$

$$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \left(\frac{2x - 4\pi}{10}\right) = x - 2\pi$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{x - 2\pi}{5}\right)$$

$$\sin x - \sin B = 2 \sin \frac{x-B}{2} \cos \frac{x+B}{2}$$

$$x - \left(\frac{x - 2\pi}{5}\right) = \frac{5x - x + 2\pi}{5} = \frac{4x + 2\pi}{5} = \frac{2x + \pi}{5}$$

$$\frac{5\pi}{3} x$$

$$2 \sin \frac{x - x + 2\pi}{5}$$

$$2 \sin\left(\frac{2x + \pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3x - \pi}{5}\right) = 0$$

$$6\frac{\pi}{3} x$$

$$2x + \pi = \pi k \quad (1)$$

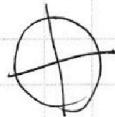
$$\frac{7x\pi}{6} =$$

$$3k - \pi = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$4\pi - \frac{7\pi}{3} =$$

$$(1) 2x + \pi = 5\pi k$$

$$\frac{5x + (x - 2\pi)}{5} = \frac{6x - 2\pi}{5} = \frac{3x - \pi}{5}$$



$$2x = -\pi + 5\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}$$

$$k =$$

$$x = \frac{1}{2}\pi$$

$$10 \arccos(-1) = 9\pi + \pi$$

$$10\pi = 20\pi$$

$$x = -3\pi$$

$$3x - \pi = \frac{5\pi}{2} + 5\pi k$$

$$3x = \frac{7\pi}{2} + 5\pi k$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}$$

$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$9\pi - \frac{7\pi}{3}$$

$$10 \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{12\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{36} \cdot 3$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$abc \rightarrow \min$

$2^{14} + 2^{25} + 13 =$

$$ab : 2^{13} \cdot 2^4 \cdot 3$$

$$4 \cdot 6 : 2^3 \cdot 3$$

$$6 \cdot 12 : 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^5 \cdot 3^2$$

2^8

итог мин : 2^8

$$abc : 2^6$$

$$2^8 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$$

$$4 \cdot 6 \cdot 12$$

$2^5 \cdot 3$

$$2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

$$6 \cdot 4 \cdot 12 : 2^{10} \cdot 3^5$$

$$\frac{56}{53} ab : 2^{18} \cdot 3^{23} \cdot 5^{26}$$

$$2^5 \cdot 3^2$$

$$6 \cdot 6 \cdot 12 : 2^6 \cdot 3^3$$

$\frac{18}{52}$

$$8 \cdot 4 \div 2^5$$

$$a = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^{13} \quad \sqrt{2}$$

$$4 \cdot 6 \div 2^3 \cdot 3$$

$$b = 2^2 \cdot 3^n \cdot 5^{15}$$

$$8 \cdot 6 : 2^4 \cdot 3$$

$$c = 2^n \cdot 3^{23} \cdot 5^{15}$$

$$2^8 \cdot 4 \cdot 6 \quad 2^{12} \cdot 3^2$$

$$\begin{cases} x+y=6 \\ y+z=14 \\ z+x=16 \end{cases}$$

$$z=12 \quad 2^4 \cdot 3 \quad 2^6 \cdot 3$$

$$x=4$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=13 \\ z+x=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-x=2 \\ 2+x=20 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=13 \\ y+z=21 \\ z+x=26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-x=21 \\ 2+x=15 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=13 \\ z+x=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-x=2 \\ 2+x=18 \\ x=13 \end{cases}$$

1-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+y \geq 13 \\ y+z \geq 21 \\ z+x \geq 25 \end{cases}$$

$$x+y+z \rightarrow \min$$

$$5 > 2$$

$$6 > 2$$

$$2(x+y+z) \geq 59$$

$$3 > 1$$

$$a = 2^4 - 3^3 \cdot 5^{10} \cdot 13$$

$$x+y+z \geq 30$$

$$b = -2^2 - 3^5 \cdot 5^{10}$$

$$x+y+z = 30$$

$$c = 2^{12} - 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$\begin{cases} z+x=8 \\ z+y=25 \end{cases}$$

$$x+y=14$$

$$y+z=21$$

$$z+x=15$$

$$\begin{cases} x+y \geq 11 \\ y+z \geq 13 \\ z+x \geq 28 \end{cases}$$

$$z-x \geq 8$$

$$z+y \geq 25$$

$$z-y=12$$

$$22 \geq 33$$

$$z=14$$

$$z=30-x-y$$

$$y \geq 6$$

$$11+13+28$$

$$z=$$

$$15$$

$$13 \cdot 2 \cdot 15$$

$$x \leq 1$$

$$x+y+z \geq 28$$

$$x+y=14$$

$$y+z=15$$

$$z+x=28$$

$$\begin{cases} z+x=14 \\ z+y=15 \end{cases}$$

$$x+y \geq 13$$

$$30-x \geq 21 \quad x \leq 9$$

$$30-y \geq 25 \quad y \leq 5$$

$$\begin{cases} 6 \\ 8 \\ 6 \end{cases} \begin{cases} 11 \\ 17 \\ 17 \end{cases}$$

$$2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\begin{cases} x+y \geq 11 \\ y+z \geq 12 \end{cases}$$

$$27-x \geq 13$$

$$27-y \geq 28$$

$$z=27-x-y$$

$$x \leq 14$$

$$y \leq 1$$

$$y=5$$

$$x=6$$

$$z=16$$

$$y=0$$

$$z=15$$

$$x=13$$

$$x+y=27-z$$

$$y=1$$