



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нп. Пусть  $ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ ;  $bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ ;  $ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$$abc = ac \cdot \sqrt{\frac{ab \cdot bc}{ac}} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N})$$

$$abc = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \sqrt{\frac{\alpha \beta \cdot 2^{7+13-14} \cdot 3^{11+15-17} \cdot 5^{14+18-43}}{\gamma}} =$$

$$= \sqrt{\alpha \beta \gamma} \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \sqrt{2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha \beta \gamma}{3 \cdot 5}} \cdot 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}; \text{ Т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ то } \sqrt{\frac{\alpha \beta \gamma}{15}} \in \mathbb{N}$$

(т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ )

( $\alpha \beta \gamma : 15$ , например,  $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 5$ )

Наши значения  $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$  (при  $\alpha \beta \gamma = 15$ )

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

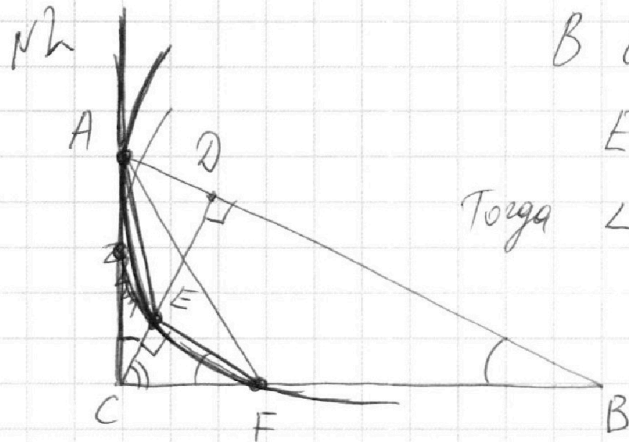
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В силу параллельности  $EF \parallel AB$

$EF \perp CD$ ;  $\angle CFE = \angle CBD$ .

Тогда  $\angle ACD = 90^\circ - \angle ECF = \angle CFE$

$\triangle ADC$   
 $\triangle CEF \sim \triangle ADC$  по 2 углам

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CF} = \frac{CD}{FE} = k, \text{ тогда } \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,3 \Rightarrow AD = 0,3 BD \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{\frac{3}{10}} BD$$

$$AB = 1,3 \cdot \frac{AD}{0,3} = \frac{13}{3} AD$$

$\angle CAE = \angle AFE$  (угол между касат. и хордой равен впис. углу, опир. на эту хорду)

Тогда  $\angle AFB = 180^\circ - \angle AFE - \angle EFC = \angle AEC$

$\triangle AFB \sim \triangle AEC$  по 2 углам;  $\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{FB}{CE}$

Но  $\frac{AB}{AC} = \frac{CF}{CE}$  (из подобия  $\triangle CEF$  и  $\triangle ACB$ )

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CF}{CE} = \frac{FB}{CE} \Rightarrow CF = FB \Rightarrow F - \text{сер. } BC.$$

$$CF = FB = \frac{BC}{2} \Rightarrow CE = \frac{1}{2} CD$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF = \frac{1}{8} \cdot BC \cdot CD$$

$$S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{3}{20} \cdot CD \cdot BD$$

(из подобия  $\triangle CEF$  и  $\triangle CDB$ )

$$\frac{S_{\triangle ACB}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{3 \cdot 8}{20 \cdot 1} = \frac{12}{10} = 1,2$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

Заметим, что  $5 \arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$  (по опред.  $\arccos$ )

Тогда  $x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$  — это область допуст. значений  $x$ .

Пусть  $\sin x = \alpha \in [-1; 1]$ , тогда

~~$5 \arccos \alpha =$~~   $5 \arccos \alpha = \frac{3\pi}{2} + x$

Пусть  $\alpha = \cos \beta \in [-1; 1]$ , тогда  $\beta = \arccos \alpha = \arccos(\sin x)$

Тогда  $\cos \beta = \sin x$  и  $5\beta = x + \frac{3\pi}{2}$

$$\begin{cases} 5\beta = x + \frac{3\pi}{2} & (1) \\ \sin x = \cos \beta & (2) \end{cases}$$
 Решим полученную систему

2)  $\sin x = \cos \beta$ ;  $\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = 0$

$2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2} + \beta}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{2} - \beta}{2} = 0$

$$\begin{cases} \sin \frac{x + \beta - \pi/2}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi/2 - \beta + x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x + \beta - \pi/2}{2} = \pi n \\ \frac{\pi/2 - \beta + x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases} ; \begin{cases} \beta + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases} \quad \begin{matrix} \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - x \\ \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi m + x \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \beta = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ \beta = x - (\frac{\pi}{2} + 2\pi n) \end{cases}$$
 Возвращаемся к системе:

$$\begin{cases} x + \frac{3\pi}{2} = 5x + \frac{5\pi}{2} + 10\pi m \\ x + \frac{3\pi}{2} = 5x - (\frac{5\pi}{2} + 10\pi m) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - x$ , *Вернемся к системе.*  
 $\beta = x - (\frac{\pi}{2} + 2\pi m)$

$$\begin{cases} x + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} + 10\pi n - 5x \\ x + \frac{3\pi}{2} = 5x - \frac{5\pi}{2} - 10\pi m \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x = \pi + 10\pi n \\ 4x = 4\pi + 10\pi m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3} \\ x = \pi + \frac{5\pi m}{2} \end{cases}$$

При этом  $x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

Этим условиям удовлетворяют следующие значения  $x$ :

$$\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{7\pi}{2} \\ x = \pi \end{cases}$$

Ответ:  $-\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$ .

$\beta =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

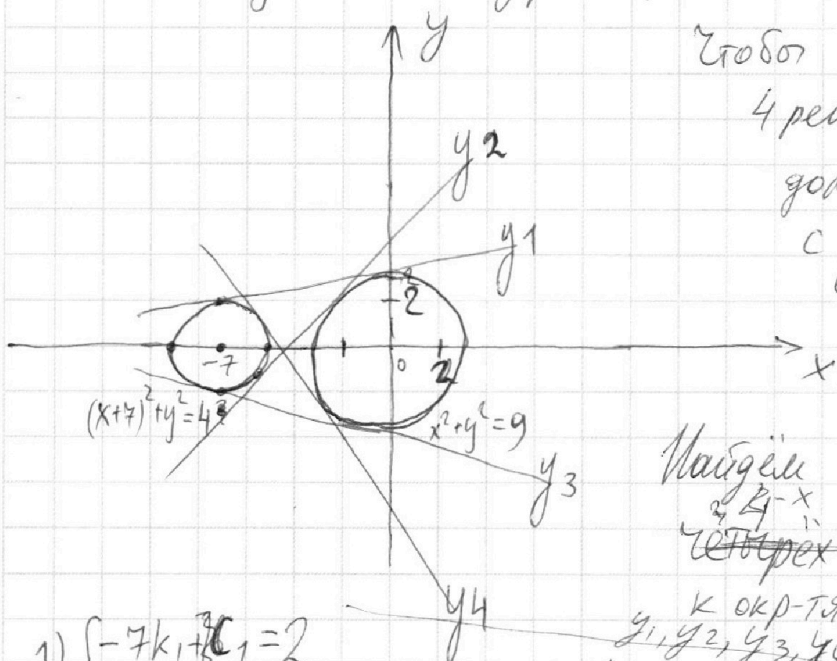
$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$N4. (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x = 7b - 3ay \\ y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} \quad (\text{при } a \neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 & \text{— ур. окр-ти с центром } (-7; 0) \text{ и } R=2 \\ x^2 + y^2 = 9 & \text{— ур. окр-ти с центром } (0; 0) \text{ и } R=3 \end{cases}$$



Чтобы у системы было 4 решения, прямая  $y = \frac{7b-x}{3a}$  должна иметь 4 пересек. с 2-мя окр-тями, то есть по 2 пересек. с каждой.

Найдём уравнения ~~всех~~ ~~четырёх~~ ~~ближних~~ касательных к окр-тям  $(y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x))$

$$1) \begin{cases} -7k_1 + c_1 = 2 \\ c_1 = 3 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{1}{7}x + 3 \quad k_1 = \frac{1}{7}$$

$$y_1 = k_1x + c_1$$

$$y_2 = k_2x + c_2$$

$$y_3 = k_3x + c_3$$

$$y_4 = k_4x + c_4$$

$$2) \begin{cases} -7k_3 + c_3 = -2 \\ c_3 = -3 \end{cases}$$

$$y_3 = -\frac{1}{7}x - 3 \quad k_3 = -\frac{1}{7}$$

При  $a \in [k_1; k_2)$  найдётся  $b$ , такое, что у сист. будет 4 рещ.

При  $a \in (k_4; k_3]$  также найдётся  $b$ , при котором у системы будет 4 рещ.

Найдём  $k_2$  и  $k_4$ . Из симметрии получено, что  $k_4 = -k_2$

$$\text{ур. } k_2x + c_2 = \dots$$

$$y_2 = k_2x^2 + 2k_2c_2x + c_2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_2^2 = 9 - x^2 \quad (\text{упр. касания с окр. } R=3)$$

$$k_2^2 x^2 + 2k_2 c_2 x + c_2^2 = 9 - x^2 \quad \text{упр. имеет 1 реш.}$$

(условие касания  
прямой окр-ти)

$$(k_2^2 + 1)x^2 + 2k_2 c_2 x + c_2^2 - 9 = 0$$

$$k_2^2 c_2^2 - c_2^2 (k_2^2 + 1) = 0 \Rightarrow c_2 =$$

1)  $k_2 x + c_2 = \sqrt{9 - x^2}$  ~~не имеет~~  
- имеет 1 решение  
(условие касания с первой окр-тью радиуса 3)

$$9 - x^2 = c_2^2 + k_2^2 x^2 + 2k_2 c_2 x$$

$$(1 + k_2^2)x^2 + 2k_2 c_2 x + c_2^2 - 9 = 0 \quad \text{имеет 1 решение}$$

$$(k_2 c_2)^2 - (1 + k_2^2)(c_2^2 - 9) = 0;$$

$$k_2^2 c_2^2 - c_2^2 - k_2^2 c_2^2 + 9 + 9k_2^2 = 0 \Rightarrow 9k_2^2 = c_2^2 - 9 \quad (*)$$

$$k_2 x + c_2 = -\sqrt{4 - (x+7)^2} \quad \text{имеет 1 решение}$$

(условие касания со 2-й окр-тью радиуса 2)

$$k_2^2 x^2 + c_2^2 = 4 - (x+7)^2 - 2k_2 c_2 x$$

$$(1 + k_2^2)x^2 + (14 + 2k_2 c_2)x + (c_2^2 + 45) = 0$$

$$(7 + k_2 c_2)^2 - (1 + k_2^2)(c_2^2 + 45) = 0; \Rightarrow 45k_2^2 - 14c_2 k_2 - 4 = 0$$

Из (\*) и (\*\*) следует, что  $14c_2 k_2 + 4 = 5c_2^2 - 45$  (\*\*)

$$\begin{cases} 9k_2^2 = c_2^2 - 9 \\ 45k_2^2 = 14c_2 k_2 + 4 \end{cases}$$

$$k_2 = \left( \frac{5c_2^2 - 49}{14c_2} \right)^2$$

решив систему и найдя  $k_2$  и  $c_2$ , можно  
дать ответ на вопрос задачи.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.  $\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$ ;  $\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$

~~$\log_7^4(6x) - \frac{7}{2} \log_7(6x) + 4 = 0$~~

$\log_7^4(6x) - \frac{7}{2 \log_7(6x)} + 4 = 0$

$\log_7^4 y + \frac{7}{2 \log_7 y} + 4 = 0$

Рассм. функцию  $f(t) = \log_7^4 t + \frac{7}{2 \log_7 t} + 4$

$f(t) = t^4 + \frac{7}{2t} + 4$ ; при  $t_1 = -\log_7 6x$  и  $t_2 = \log_7 y$

$f(t)$  обращается в ноль. ( $7^{t_1} = 6x$   $7^{t_2} = y$ )

$x = \frac{1}{6 \cdot 7^{t_1}}$ ;  $y = 7^{t_2}$

при  $t_1 = t_2$   $xy = \frac{1}{6}$

~~Исследуем  $f(t)$ .~~

$t^4 + \frac{7}{2t} + 4 = \frac{2t^5 + 8t + 7}{2t}$

$2t^5 + 8t + 7 = 0$ .  $t_1$  и  $t_2$  - корни этого уравнения

Рассм. ср-во  $y(t) = 2t^5 + 8t + 7$

( $t_1$  и  $t_2 \neq 0$ , т.к.  $6x$  и  $y$  - осн. логарифмов) (по условию)

$y' = 10t^4 + 8 > 0$  при всех  $t \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t)$  возр. монотонно

и имеет максимум только один корень  $\Rightarrow t_1 = t_2$ , и един-

ственный возм. произв.  $xy$  является  $\frac{1}{6}$ .

ответ:  $\frac{1}{6}$ .



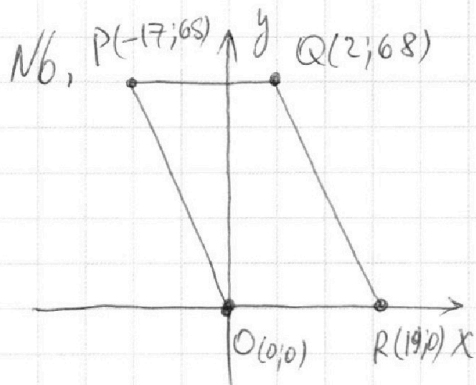
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ур. прямой  $OR$ :  $y=0$

ур. прямой  $PQ$ :  $y=68$

ур. прямой  $PO$ :  $y=-4x$

ур. прямой  $QR$ :  $y=-4x+76$   
с целыми коорд.

Любая точка  $\checkmark$  внутри парал-

лелограмма будет леж. на прямой  $y=-4x+\alpha$ ,

где  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha \in [0; 76]$ ; ~~для~~

Пусть  $y_1 = -4x_1 + c_1$ ;  $y_2 = -4x_2 + c_2$

Тогда  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = y_2 + 4x_2 - (y_1 + 4x_1) =$   
 $= c_2 - c_1 = 40$ ;  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $c_1, c_2 \in [0; 76]$ .

Задачу можно переформулировать так; сколькими способами можно выбрать два целых на числа на отрезке  $[0; 76]$  так, чтобы их разность равнялась 40.

Пометно, что  $c_2 > c_1$ ;  $76 \geq c_2 \geq 39$ ; ~~и~~ при  $c_2 \leq 39$

$c_1$  будет  $< 0$ . Значит, всего способов  $76 - 39 = 37$

Ответ: 37.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

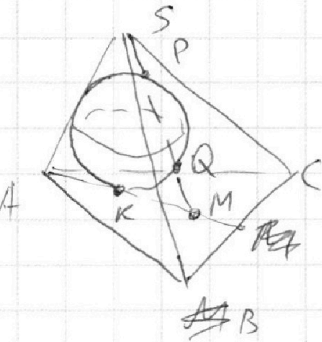
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

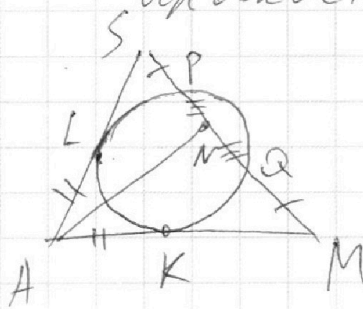


Рассм. сечение пирамиды

плоскостью  $ASM$ ,

$AL = AK$  как

отрезки касат.



Проведем медиану  $AN$  в  $\triangle ASM$ .

Тогда  $PN = NQ$  (в силу  $p$ -оси  $SP$  и  $MQ$ ),

и  $AM = \frac{2}{3} \cdot \overline{AN}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos \alpha \in [0; 5\pi)$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x < 5\pi \quad -\frac{3\pi}{2} \leq x < \frac{7}{2}\pi$$

$$\arccos \alpha \in [0; \pi)$$

$$\sin x = \alpha$$

$$\arccos \alpha = \beta$$

$$\cos \beta = \alpha$$

$$\cos \beta = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin x$$

$$5\beta = \frac{3\pi}{2} + x$$

sin

$$x = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$2 \sin \frac{\pi - \beta - x}{2} \cos \frac{\pi - (\beta + x)}{2} = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin x = 0$$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) =$$

$$\frac{\cos(x+\beta)}{2} = 0$$

$$x + \beta = \pi n + \frac{\pi}{2} = \sin A \cos B - \sin A \cos B + \cos A \sin B + \cos A \sin B$$

$$= 2 \sin B \cos A$$

$$\sin(\beta - x) = 0$$

$$\beta - x = \pi m$$

$$\beta = \frac{A+B+A-B}{2}$$

$$\beta = \pi n + \frac{\pi}{2} - x$$

$$\beta = \frac{A+B-A+B}{2}$$

$$\beta = \pi m + x$$

$$5\pi n + \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = 5\pi n + \pi = 6\pi k$$

$$x = \pi k$$

$$5\pi m + 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = \frac{3\pi}{2} - 5\pi m$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$0 = 5 + 7p + (4 + 57)z$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ x^2 + y^2 + 14x + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 14x + 45 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}; \quad bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}; \quad ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$abc = \alpha\beta\gamma \cdot 2^{34} \cdot 3^{41} \cdot 5^{75} \quad ab, bc, ac; \quad 2^7, 3^{11}, 5^{14}$$

$$abc = ac \cdot \sqrt{\frac{ab \cdot bc}{ac}} = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \sqrt{\frac{\alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}}{\gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}}}$$

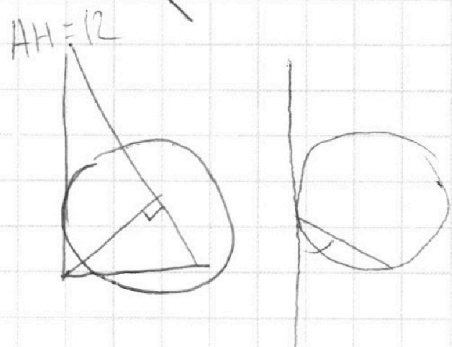
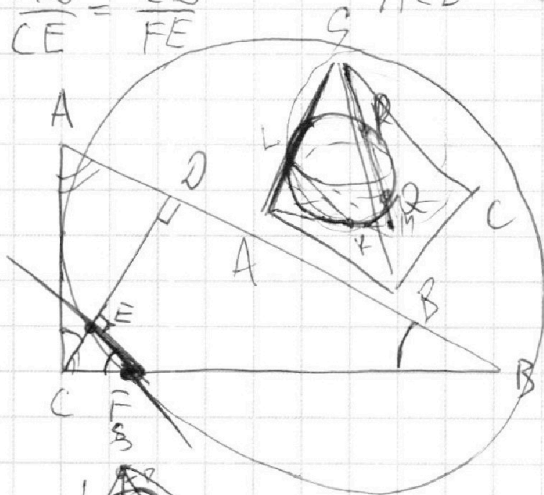
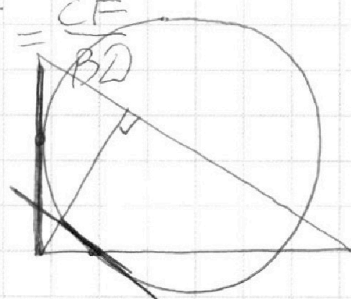
$$= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{38} \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}} = 2^{17} \cdot 3^{24} \cdot 5^{38} \sqrt{\alpha\beta\gamma/5} \quad \alpha\beta\gamma = 5$$

$$10t^4 + 8 = 8$$

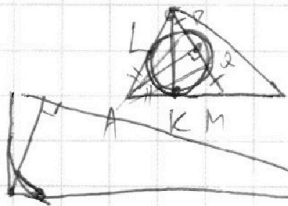
$$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{CE} = \frac{CD}{FE}$$

$$\frac{FE}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BD}$$

$$ACD \sim CFE$$



$$-7 \log_6 x + 4 = 0 \Rightarrow \log_6 x = \frac{4}{7} \Rightarrow x = 6^{\frac{4}{7}}$$



$$\frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$0 = k + (k+7)l + 57z$$

$$AB = 1,3 BD$$

$$AB = 0,3 BD$$

$$AB = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$0 = k + 78 + 57z$$

$$AD = 1,3 \cdot BD$$

$$AD = AB - BD = 1,3BD - BD = 0,3 BD$$

$$\sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{0,3 BD^2} = AB \quad \sqrt{0,3} BD = AB$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

$$x = 78$$

$$0 = \frac{72}{k+78+57z}$$



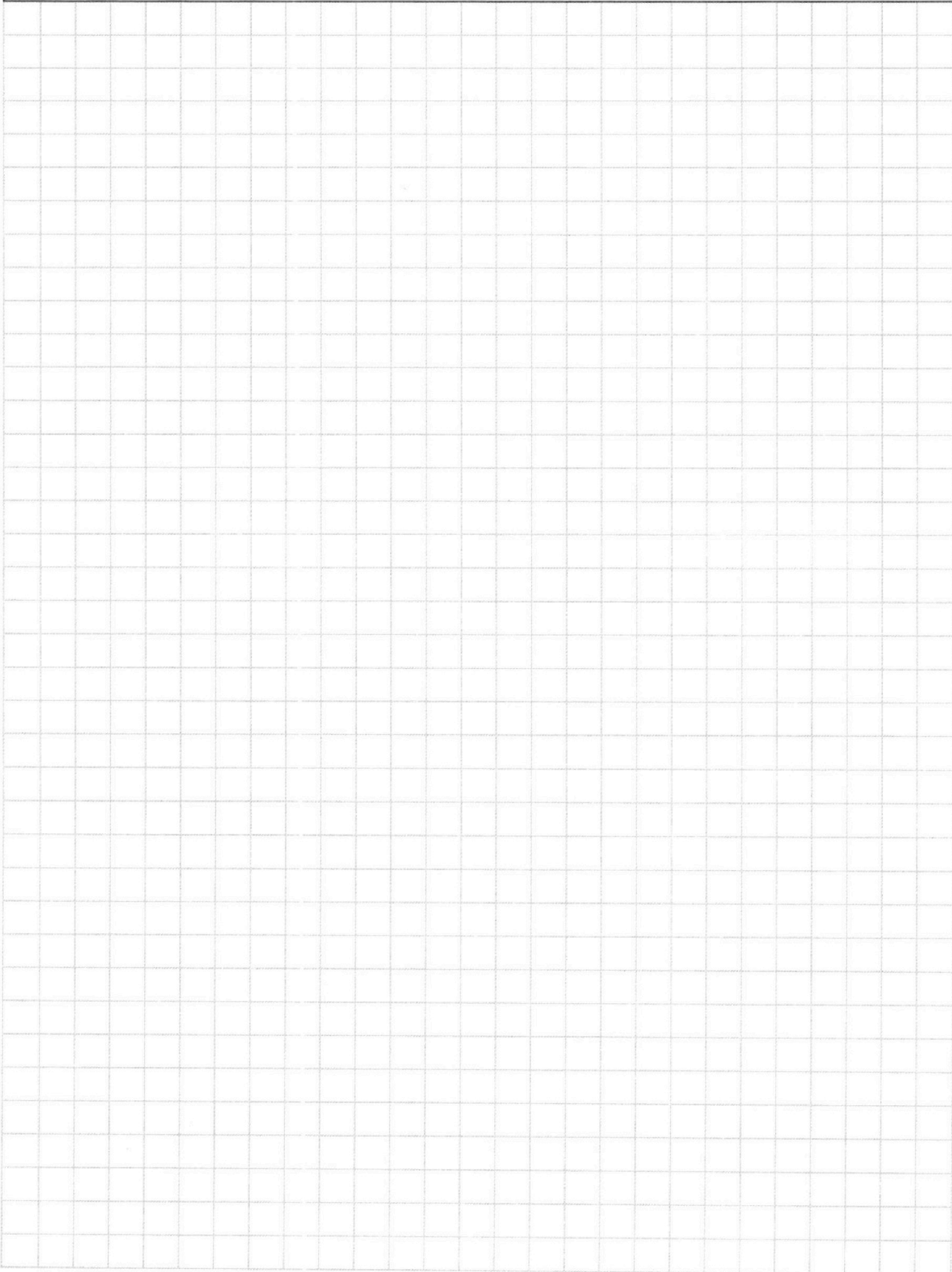
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49 + k_2^2 + 14k_2c_2 - c_2^2 - k_2^2 c_2^2 - 45k_2 - 45k_2^2 = 0$$

$$45k_2^2 - 14k_2c_2 - 4 = 0 \quad 4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

$$9k_2^2 = c_2^2 - 9 \quad y_1 = -4x + c_1 \quad y_1 + 4x_1 = c_1$$

$$45k_2^2 - 14c_2k_2 - 4 = 0 \quad 14c_2k_2 + 4 = 5c_2^2 - 45$$

$$y_2 + 4x_2 = c_2$$

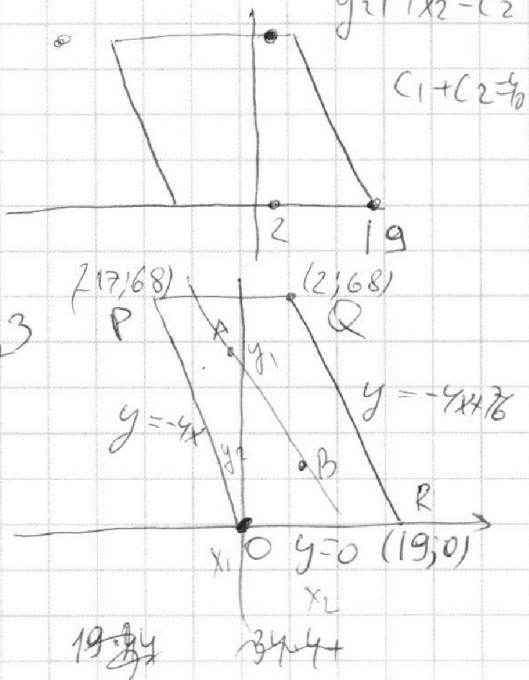
$$k_2 = \frac{14c_2 + \sqrt{49c_2^2 + 180}}{90}$$

$$(4x_2 + y_2) - (4x_1 + y_1) = 40$$

$$y = 68$$

$$343 = 7^3$$

$$y = 0$$



$$RQ: \begin{cases} 19a + b = 0 \\ 2a + b = 68 \end{cases} \begin{cases} a = -4 \\ b = 76 \end{cases}$$

$$343 = 7 \cdot 49 = 7^3$$

$$AB = 1,3 BD = \frac{13}{8} AD$$

$$\frac{AD}{CE} = \frac{FB}{CE} = \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{FB} \quad CE = \frac{AC \cdot FB}{AB}$$

$$CE \cdot AB = AC \cdot BC - \frac{CE \cdot AC^2}{AD} \quad CE \cdot AB = AC \cdot (BC - CF)$$

$$CE \cdot \frac{13}{8} AD = \frac{AC \cdot BC - CE \cdot AC^2}{AD} \quad CF = \frac{AC \cdot CE}{AD}$$

$$y_2 - y_1 = -4x_2 + 2 \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \quad a \in [0; 76], a \in \mathbb{Z}$$

$$-4x_1 + 40 = 2 \quad S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF = \frac{1}{8} \cdot BD \cdot CD$$

$$x \in [0; 76] \quad \log_7^4 6x - 2 \log_7 6x = \frac{3}{2} \log_7 6x - 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

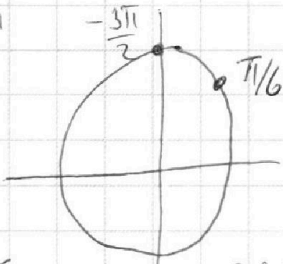
- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}$$



$$x = 7b - 3ay$$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi - 10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi + 10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2}$$

$$c^2 - 9 = 9 \cdot \frac{(5c^2 - 49)^2}{14c^2}$$

$$5c^2 - 45 = 14c^2 k_2 + 4$$

$$k_2 = \frac{5c^2 - 49}{14c^2} - \frac{5\pi}{2} = \frac{-3\pi}{2}$$

$$\pi + \frac{5\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$x = 7b - 3ay$$

$$y = \frac{7b - x}{3a}$$

$$49^2 = 2500 + 1 - 100 = 2401$$

$$\sqrt{2401} = 49$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 9 \quad \text{or } p.$$

$$y^2 =$$

$$y^2 = x^2 + 14x + 45$$

$$u + 3av - 7b = 0 \quad -y^2 = x^2 + 14x + 45$$

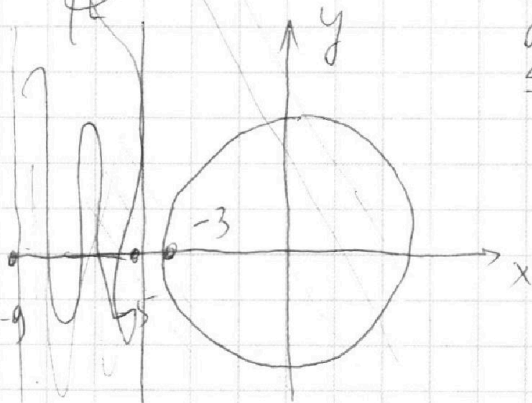
$$u + v - 9 = 0$$

$$D_{14} = 49 - 45 = 4$$

$$-y^2 = (x+9)(x+5) < 0$$

$$x \in [-9, -5]$$

$$y = \frac{7b - x}{3a}$$



$$y^2 + 45 \quad y_2 = k_2 x + c_2$$

$$k_2 x + c_2 =$$

$$x + 3ay - 7b = (x^2 + 14x + y^2 + 45)$$

$$(x^2 + 7)^2 + y^2 = 4$$

$$9(25c_2^4 + 49^2 - 490c_2^2) = 196c_2^2(c_2^2 - 9)$$

$$29c_2^4 - 294 \cdot 9c_2^2 + 9 \cdot 2205 = 0 \quad 21609 = 0$$