



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 Страница 1 из 1 (нумерация обделена по каждое
задаче)

Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \cdot p_1$,
 $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \cdot p_2$,
 $c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \cdot p_3$, $p_i \neq 2, 3, 5$

$ab : 2^6 3^{13} 5^{11} \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \geq 6, \alpha_2 + \beta_2 \geq 13, \alpha_3 + \beta_3 \geq 11$	(1)	$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 18$	(2)	$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$	(3)
$bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13} \Rightarrow \beta_1 + \gamma_1 \geq 14, \beta_2 + \gamma_2 \geq 21, \beta_3 + \gamma_3 \geq 13$					
$ac : 2^{16} 3^{25} 5^{28} \Rightarrow \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16, \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25, \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28$					

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} p_1 p_2 p_3$$

При максимальном abc $p_1 = p_2 = p_3 = 1$

У3 ① $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$ пример № 18

$$(\alpha_1 = 4, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 12)$$

У3 ② $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29,5$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$$

$$\text{пример № 30 } (\alpha_2 = 9, \beta_2 = 4, \gamma_2 = 17)$$

У3 ③ $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$

Предположим $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 26$

Тогда $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow \beta_3 = -2$ противоречие, $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 27$

Предположим $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 27$

допустим $\alpha_3 + \beta_3 = x$
1 $\beta_3 + \gamma_3 = y$ $\Rightarrow \beta_3 = \frac{x+y-2}{2}$, $x+y+z = 54$
 $\alpha_3 + \gamma_3 = z$
 $\beta_3 = \frac{54-x-y}{2} \leq -1$ противоречие

Значит $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28$ пример № 28 $\alpha_3 = 13, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 15$

Несколько возможное значение $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$
пример $a = 2^4 3^9 5^{13}$, $b = 2^2 3^4$, $c = 2^{12} 3^{17} 5^{15}$

Отв: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

$$\sin x = t$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{x - 2\pi}{5}$$

$$x = \arcsin t + 2k\pi$$

$$\arcsin t = \frac{\arcsin t + 2k\pi}{5} \quad | \cdot 5$$

$$4\arcsin t = 2k\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{i(k-1)}{2}$$

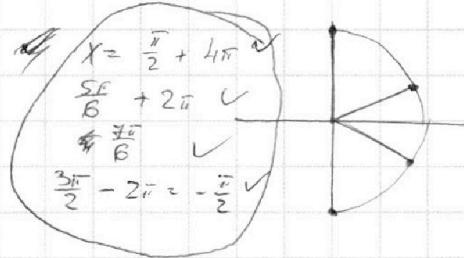
$$\sqrt{81 - 63} = \sqrt{18} \quad k=0 \\ 3\sqrt{2} \quad k=2$$

$$\arcsin t = \frac{-\arcsin t + 2k\pi - 2\pi}{5}$$

$$\arcsin t = \frac{\pi + 2k\pi}{5} \quad k=0, 1, 2, 3, 4$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-1)}{6\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \arcsin t &= \frac{\pi}{2} & k=2 \\ \arcsin t &= \frac{\pi}{6} & k=1 \\ \arcsin t &= -\frac{\pi}{6} & k=0 \\ \arcsin t &= -\frac{\pi}{2} & k=-1 \end{aligned}$$



$$5x + 6ay - 8 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 - 18y + 144) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$\frac{-18\sqrt{2}}{5} < a < 2$$

$$a > \frac{5}{-18\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{a} < -5$$

$$a > -\frac{1}{5}$$

$$y^2 + 29y + 81 = 4$$

$$(y+9)^2$$

$$z_1 + z_2 + z_3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

134

$$5x + 6ay - b = 0$$

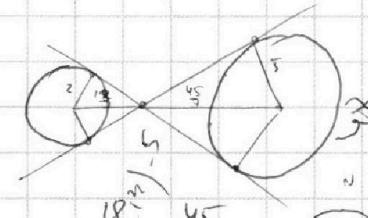
$$Q=0 \quad \checkmark$$

$$a \neq 0$$

$$y = \frac{b - 5x}{6a}$$

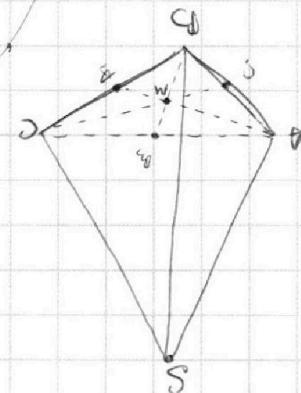
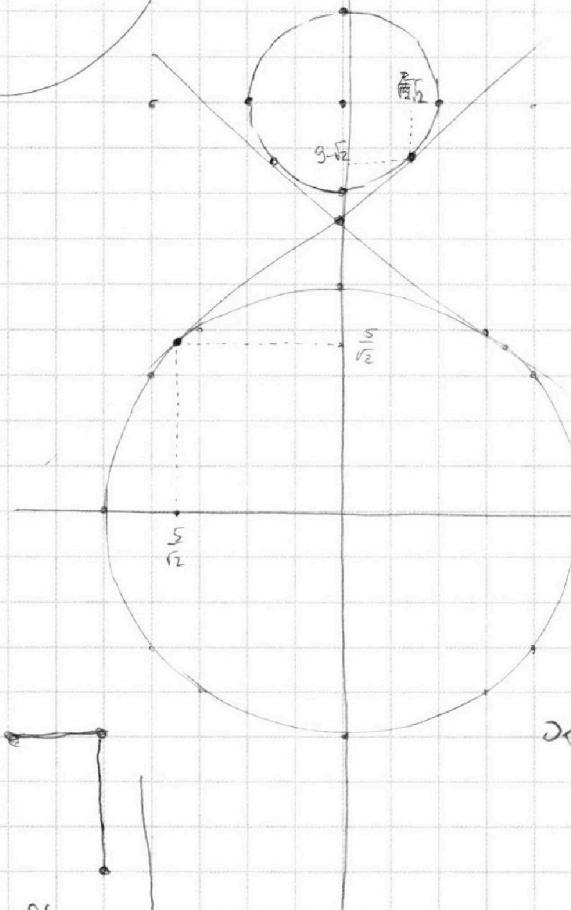
$$= -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \\ = 6\sqrt{2}$$



$$\log_{11} x + 6 \log_{11} 11 = \frac{1}{121} - 5$$
$$\log_{11} (0.5y) + \log_{11} 11 = \frac{1}{125y} - \frac{1}{121} - 5$$
$$\frac{18}{45} + \frac{1}{125y} = \frac{1}{121} - 5$$

$$x > 2$$
$$x > 0$$
$$y > 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

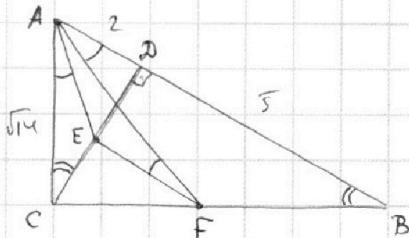


- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 страница 1 из 1



$\angle CAE = \angle EFA$ как угол между кас AC и хорд AE

$\angle EFA = \angle FAB$ как каскест лежащие

$\angle ACD = \angle CBA$ ($\triangle ABC$ прямой, CD высота)

$\triangle CAE \sim \triangle BAF$ по двум углам

$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB}$$

Поставим отрезки и пишем НЧО $BD = 5 \Rightarrow AB = 7 \Rightarrow AD = 2 \Rightarrow CD = \sqrt{10}$
 $AC = \sqrt{4}, BC = \sqrt{35}$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{4}}{7} = \sqrt{\frac{2}{7}} \Rightarrow BF = CE \sqrt{\frac{7}{2}}$$

У3 $\triangle CEF \sim \triangle CBD$: $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$

$$\frac{CE}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{35} - CE \sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{35}}$$

$CE \cancel{\text{пр}} CE \frac{1}{\sqrt{10}} + CE \frac{1}{\sqrt{10}} = 1 \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ~~а~~ ~~б~~, ~~в~~ ~~г~~ ~~д~~ ~~е~~ ~~ж~~ =

$$S_{\triangle CEF} = \frac{5\sqrt{10}}{8} \quad (EF = 2,5)$$

$$S_{\triangle ACD} = \sqrt{10}$$

$$S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CEF} = 8 : 5$$

Ответ: 8 : 5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 отмечена 1 из 1

$$10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = x - 2\pi, \text{ заменяю } \sin x = t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \arcsin t + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin t + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$1) 5 \arcsin t = \arcsin t + 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi(k-1)}{2}, \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k=0 & \arcsin t = -\frac{\pi}{2} & x = -\frac{\pi}{2} \\ k=1 & \arcsin t = 0 & x = 2\pi \\ k=2 & \arcsin t = \frac{\pi}{2} & x = \frac{\pi}{2} + 4\pi \end{cases}$$

$$2) 5 \arcsin t = \pi - \arcsin t + 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-1)}{3}, \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k=-1 & \arcsin t = -\frac{\pi}{2} & x = -\frac{\pi}{2} \\ k=0 & \arcsin t = -\frac{\pi}{8} & x = \frac{7\pi}{8} \\ k=1 & \arcsin t = \frac{\pi}{6} & x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \\ k=2 & \arcsin t = \frac{\pi}{2} & x = \frac{\pi}{2} + 4\pi \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{8}; 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi; \frac{\pi}{2} + 4\pi\right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

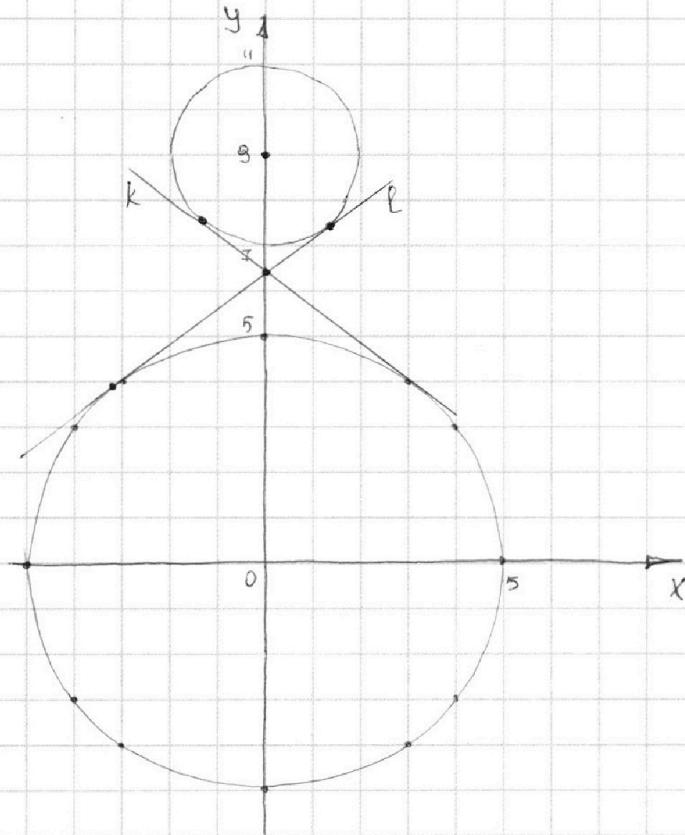
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 страница 1 из 2



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$ - где окружность

w_1 : центр $b = (0, 0)$, $R_1 = 5$

w_2 : центр $b = (0, 9)$, $R_2 = 2$

$5x + 6ay - b = 0$ прямая

При $a = 0$ заменим, что $b = 0$ добавленное условие, т.к.
прямая $x = 0$ пересекает окр-ю в 4х точках

Пусть $a \neq 0$, тогда

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ т.к. б входит в произведение, то a определяет
только наше прямое. Для любого
 a подберем в момент пересечения прямую в модуле параллел.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



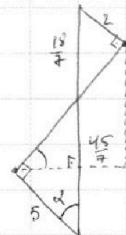
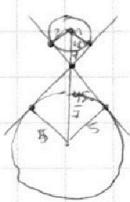
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ страницы 2 из 2

№ 1 и 2 общие внутренние касательные к
окр- Гипер

Из чертежа очевидно, что для любой прямой, касательная которой больше 1 или меньше k (с угл. знаком)
параллельными переносами вогнутости подбирается так, чтобы
пересекаться.

Для прямых не удовлетворяющих условию такая
касательная



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{7}$$

Решая квадратное неравенство геометрическую задачу
получаем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{7}$, т.е. касательна l $\frac{3\sqrt{2}}{7}$
 $k = -\frac{3\sqrt{2}}{7}$

$$-\frac{5}{6a} > \frac{3\sqrt{2}}{7} \quad -\frac{5}{6a} < -\frac{3\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{1}{a} < \frac{-18\sqrt{2}}{5} \quad \frac{1}{a} > \frac{18\sqrt{2}}{5}$$

$$0 > a > \frac{5}{-18\sqrt{2}} \quad 0 < a < \frac{5}{18\sqrt{2}}$$

$a=0$ такое подходит

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-5}{18\sqrt{2}}, \frac{5}{18\sqrt{2}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad x > 0, x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_{11}^4 x} - 5, \quad \log_{11} x = t$$

$$t^4 - \frac{16}{3}t^{-1} + 5 = 0, \quad t \neq 0 \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$(1) t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \quad \text{ровно одно решение, } x = 11^t$$

$\text{ровно одно решение исходного}$

$$\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,25y^3}(11^{-13}) - 5, \quad y > 0, y \neq 2$$

$$\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11} 0,5y} = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5, \quad \log_{11} 0,5y = k$$

$$k^4 + \frac{1}{k^2} - \frac{13}{3}k^{-1} - 5$$

$$k^4 + \frac{16}{3}k^{-1} + 5 = 0, \quad k \neq 0, \text{ т.к. } 0,5y \neq 1$$

$$(2) k^5 + 5k + \frac{16}{3} = 0 \quad \text{ровно одно решения, } y = 2 \cdot 11^k$$

$\text{ровно одно решение исходного}$

Заметим, что если α - корень (1), то $(-\alpha)$ - корень (2),
т.е. $k + t = 0$

$$xy = 11^t \cdot 2 \cdot 11^k = 2 \cdot 11^{t+k} = 2 \cdot 11^0 = 2$$

Ответ: 2



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 страница 1 из 1

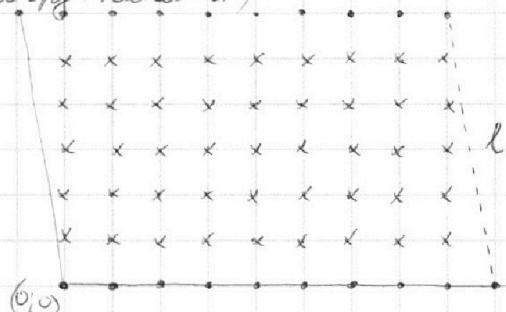
Нетрудно заметить, что 250 для точки (x_1, y_1)

ГМТ (x_2, y_2) удовлетворяющих $6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$ —

прямая, проходящая через $(x_1 + 8, y_1)$ с сдвигом вдоль
нормали -6 ? Точка $(x_1 + 8, y_1)$ сама подходит, отсюда
получается из неё можно ли и дальше и т.д.
и т.д.)

Замечаем, что прямая пересекает параллелограмм
не более, чем в 16 ^{штук} точках ($90/6 + 1$). Ровно 6

16 точек пересекают ширину основания в целой точке
(здесь и далее целые точки — точки с целочисленными
координатами).



ши . 16 шт
ши × 15 пар
(ши × ГМТ пер.
или не 6 цел. точек)

(0,0) (10,0)

Замечаем, что если точка, лежащая правее ℓ не попадет
ни одна из первых y_2 точек. Так как ^{целое} y_2 и
~~направо~~ левее попадет 16 точек, эти точки лежат
на основании или на прямой, параллельной основанию сдвиге
како и пересекающей боковые в целых точках (•) или 15 точек
ши всех других точек (x)

16 прямых из 10 точек из 16 пар

15 прямых из 45 точек из 15 пар

$$\text{Итого } 16^2 \cdot 10 + 15^2 \cdot 45 = 2560 + 225 \cdot 45 = 2560 + 10125 = \\ = 12685$$

Ответ: 12685

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

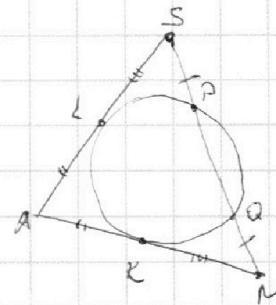
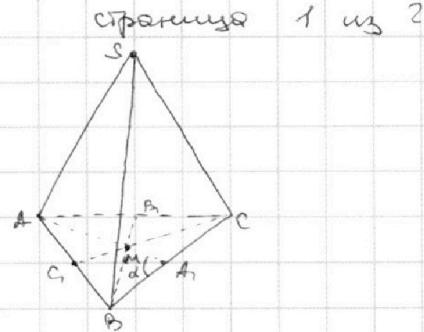
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



В $\triangle ASM$ сечение сферы пл-стого ASM -
окр. через L, K, P, Q

$AL = AK$ отрезки кас

$SQ = MP$ суммы радиусов

$$LS = SP \cdot SQ = QM \cdot MP = MK^2 \Rightarrow LS = MK \quad (\text{как кв. внеш. катет})$$

$AS = AM$, треуг. равнобедр.

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = \frac{3}{2} AS = \frac{3}{2} BC = 30$$

$$\Delta ABC \approx \frac{1}{2} BC \cdot AA_1 \cdot \sin \alpha$$

$$180 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{180}{300} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \cos \alpha = 0,8$$

$$\text{No r. cos } AB^2 = 900 + 100 - 0,4 \cdot 30 \cdot 10 = \sqrt{880} \quad 880 \\ AB = \sqrt{880}$$

$$AC^2 = 900 + 100 + 0,4 \cdot 30 \cdot 10 = \sqrt{1120}$$

$$\text{медиана}^2 = \frac{a^2 + 2b^2 - c^2}{4}, \quad a = 20, \quad b = \sqrt{880}, \quad c = \sqrt{1120}$$

$$\text{биссектриса}^2 = \frac{(a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{16ac}$$

$$= \frac{(4a^2b^2 + 4a^2c^2 - 2a^4 + 4b^4 + 4b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^4 + a^2c^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{(2a^2b^2 + 5a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4b^4 - 2a^4 - 2c^4)(2a^2 + 2c^2 - b^2)} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7
страница 2 из 2

$$= 4a^4 + 10a^4c^2 + \frac{1}{4}a^2b^2c^2 + 8a^2b^4 - 4a^6 - 4a^2c^4 +$$

$$+ 2b^9 - 4a^2b^2c^2 + 10a^2c^4 + 4b^2c^4 + 2b^4c^2 - 4a^4c^2 - 4c^6 +$$

$$- 2a^2b^4 - 5a^2b^2c^2 - 2b^4c^2 - 4b^6 + 2a^4b^2 + 2b^2c^4 -$$

$$a = 20$$

$$b = \sqrt{840}$$

$$c = \sqrt{120}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

90+48

$x_2 - x_1$

$$\frac{10125}{12685} \cdot \frac{90}{15} - 6$$

8-6

$x_2 - x_1$

$y_2 - y_1$

48

30

42

24

18

12

6

0

-6

-12

-18

-24

-36

-42

-48

-54

-60

-66

-72

-78

-84

-90

-96

-102

-108

-114

-120

-126

-132

52

58

64

70

14

15

16

17

CE

CA

C²

C²

CF

CB

C²

C²

AC

AB

A²

B²

$$\frac{S_{\text{triangle}}}{S_{\text{square}}} = \frac{AC}{CE}$$

$$= \frac{AC}{CE}$$

$$= \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{C^2 + D^2}}$$

$$\begin{aligned} & (P^2 + Q^2 + R^2 + S^2) - (A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \\ & = 2(P^2 + Q^2 + R^2 + S^2) - 2(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \\ & = 2(P^2 + Q^2 + R^2 + S^2) - 2(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \end{aligned}$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

$$\frac{10125}{1125} \cdot \frac{900}{5} = 132$$

$$22.6 = 132$$

$$\frac{90}{6} = 15$$

$$15 = 16$$

$$(24,0)$$

$$(-15,0)$$

$$(0,0)$$

$$(0,0)$$

$$\frac{90}{6} = 15$$

$$15 = 16$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

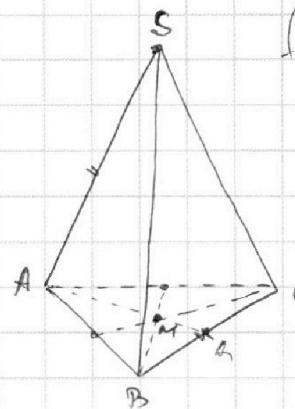
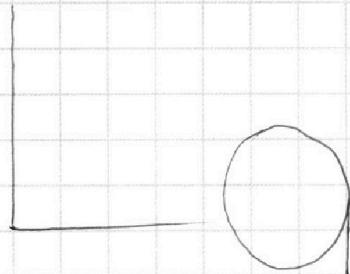
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

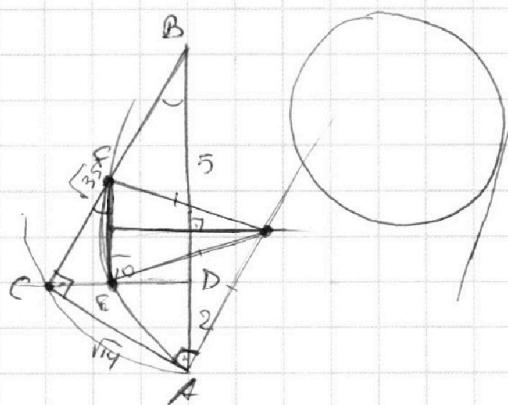
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2a^4 \quad 4a^2 b^2$$

$$(a^2 + 2c^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - b^2)$$



1000
m/s



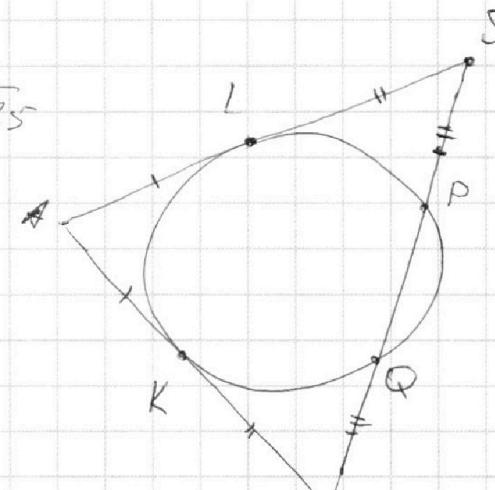
$$\angle BAC = 180$$

$$SA = \frac{3}{4} BC$$

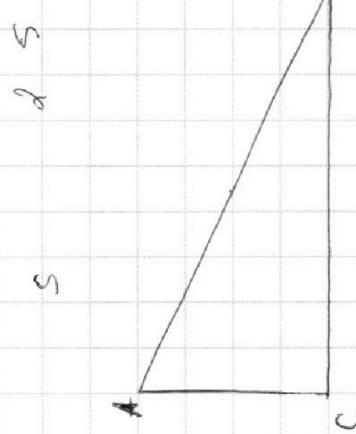
$$AA_1 = \frac{3}{2} AS$$

$$AM = AS$$

$$\frac{\sqrt{35}}{14} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



$$BC \cdot AA \cdot \sin \theta \\ BC \cdot AA \cdot \sin \theta$$



4

5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

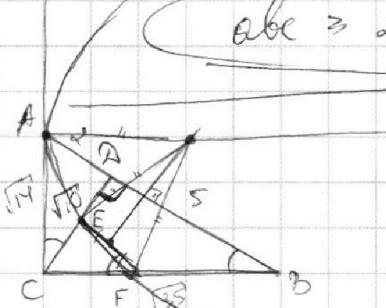
ab bc 38

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ b &= 2 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 11 \\ \alpha_2 + \beta_2 &\geq 13 \quad \text{circle: } 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 12 \\ \beta_2 + \gamma_2 &\geq 21 \quad \alpha_2 \geq 3 \\ \gamma_2 + \alpha_2 &\geq 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2, \beta_2 \\ 2 \quad 3 \quad 5 \\ 2 \quad 3 \quad 5 \quad 11 \\ 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 12 \\ 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 + \beta_3 &\leq 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 &\geq 13 \\ \gamma_3 + \alpha_3 &\geq 28 \\ 24 & \quad \cos = 1 \\ 28 & \quad 28 \quad 28 \quad 13 \\ 52 & \quad 18 \quad 30 \quad 26 \end{aligned}$$

13



AB || EF

AB : BC = 14

$$\frac{AD \cdot CA}{CE \cdot EF}$$

2

AC

CF OB

$$R \in [8, 12]$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 + \beta_3 &= 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 &= 13 \\ \gamma_3 + \alpha_3 &= 28 \end{aligned}$$

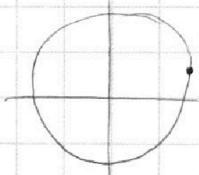
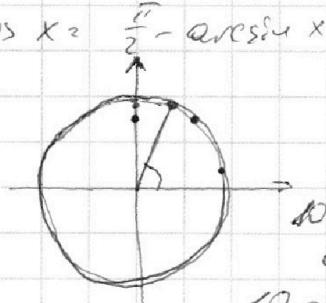
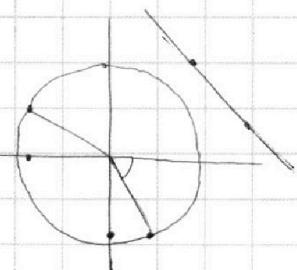
$$\sin x \in [0:1] \quad 13 \quad 0$$

15

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CF}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) = 0.9\pi - 0.2x$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$



$$10 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$

