



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 страница 1 из 1 (нумерация отдельная по каждому заданию)

Пусть  $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \cdot p_1$   
 $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \cdot p_2$   
 $c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \cdot p_3$ ,  $p_i \notin \{2, 3, 5\}$

$$\begin{array}{l} ab : 2^{\alpha_1 + \beta_1} 3^{\alpha_2 + \beta_2} 5^{\alpha_3 + \beta_3} \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \geq 6, \alpha_2 + \beta_2 \geq 13, \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ bc : 2^{\beta_1 + \gamma_1} 3^{\beta_2 + \gamma_2} 5^{\beta_3 + \gamma_3} \Rightarrow \beta_1 + \gamma_1 \geq 14, \beta_2 + \gamma_2 \geq 21, \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \\ ac : 2^{\alpha_1 + \gamma_1} 3^{\alpha_2 + \gamma_2} 5^{\alpha_3 + \gamma_3} \Rightarrow \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16, \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25, \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 \end{array}$$

$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} p_1 p_2 p_3$   
 При минимальном  $abc$   $p_1 = p_2 = p_3 = 1$

Уз ①  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$  пример на 18  
 $(\alpha_1 = 4, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 12)$

Уз ②  $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29,5$ ,  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$   
 $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$   
 пример на 30  $(\alpha_2 = 9, \beta_2 = 4, \gamma_2 = 17)$

Уз ③  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$   
 Предположим  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 26$   
 Тогда  $\left. \begin{array}{l} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_3 = -2$  противоречие,  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 27$

Предположим  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 27$   
 $\left. \begin{array}{l} \alpha_3 + \beta_3 = x \\ \beta_3 + \gamma_3 = y \\ \alpha_3 + \gamma_3 = z \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_3 = \frac{x+y-z}{2}$ ,  $x+y+z = 54$   
 $\beta_3 = \frac{54-28}{2} \leq -1$  противоречие

Значит  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28$  пример на 28  $\alpha_3 = 13, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 15$

Наименьшее возможное значение  $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$   
 пример  $a = 2^4 3^9 5^{13}$ ,  $b = 2^2 3^4$ ,  $c = 2^{12} 3^{17} 5^{15}$

Ответ:  $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{x - 2\pi}{5}$$

$$\sin x = t$$

$$x = \arcsin t + 2\pi k$$

$$\arcsin t = \frac{\arcsin t + 2\pi(k-1)}{5}$$

$$4 \arcsin t = 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi(k-1)}{2}$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$$

$$t = \pm 1$$

$$\sqrt{81 - 6^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 4\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

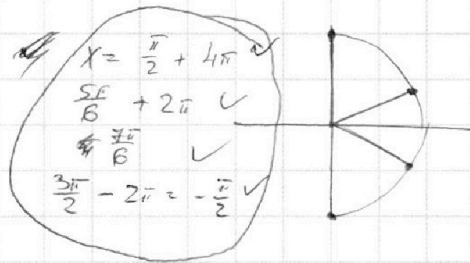
$$\arcsin t = \frac{\pi - \arcsin t + 2\pi k - 2\pi}{5}$$

$$6 \arcsin t = \pi + 2\pi k - \pi - 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-1)}{3}$$

$$x = \pi - \arcsin t + 2\pi k$$

- $\arcsin t = \frac{\pi}{2} \quad k=2$
- $\arcsin t = \frac{\pi}{6} \quad k=1$
- $\arcsin t = -\frac{\pi}{6} \quad k=0$
- $\arcsin t = -\frac{\pi}{2} \quad k=-1$



$$\frac{5\pi}{6}$$

$$y^2 + 2y + 81 = 4$$

$$(y-9)^2$$

$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$\frac{1}{a} < -5$$

$$a > -\frac{1}{5}$$

$$-\frac{18\sqrt{2}}{5} a < 1$$

$$a > \frac{5}{-18\sqrt{2}}$$

$$5x + 6y + 60$$

54-2.28 x+y+z = 54  
 54-56

$\frac{\pi}{2}$   
 $\frac{\pi}{6}$   
 $-\frac{\pi}{6}$   
 $-\frac{\pi}{2}$   
 $2\pi$   
 $\frac{5\pi}{6} + 2\pi$   
 $\frac{\pi}{2} + 4\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

134

$$5x + 6ay^2 - b = 0$$

$a = 0$  ✓

$a \neq 0$

$$y = \frac{b - 5x}{6a}$$

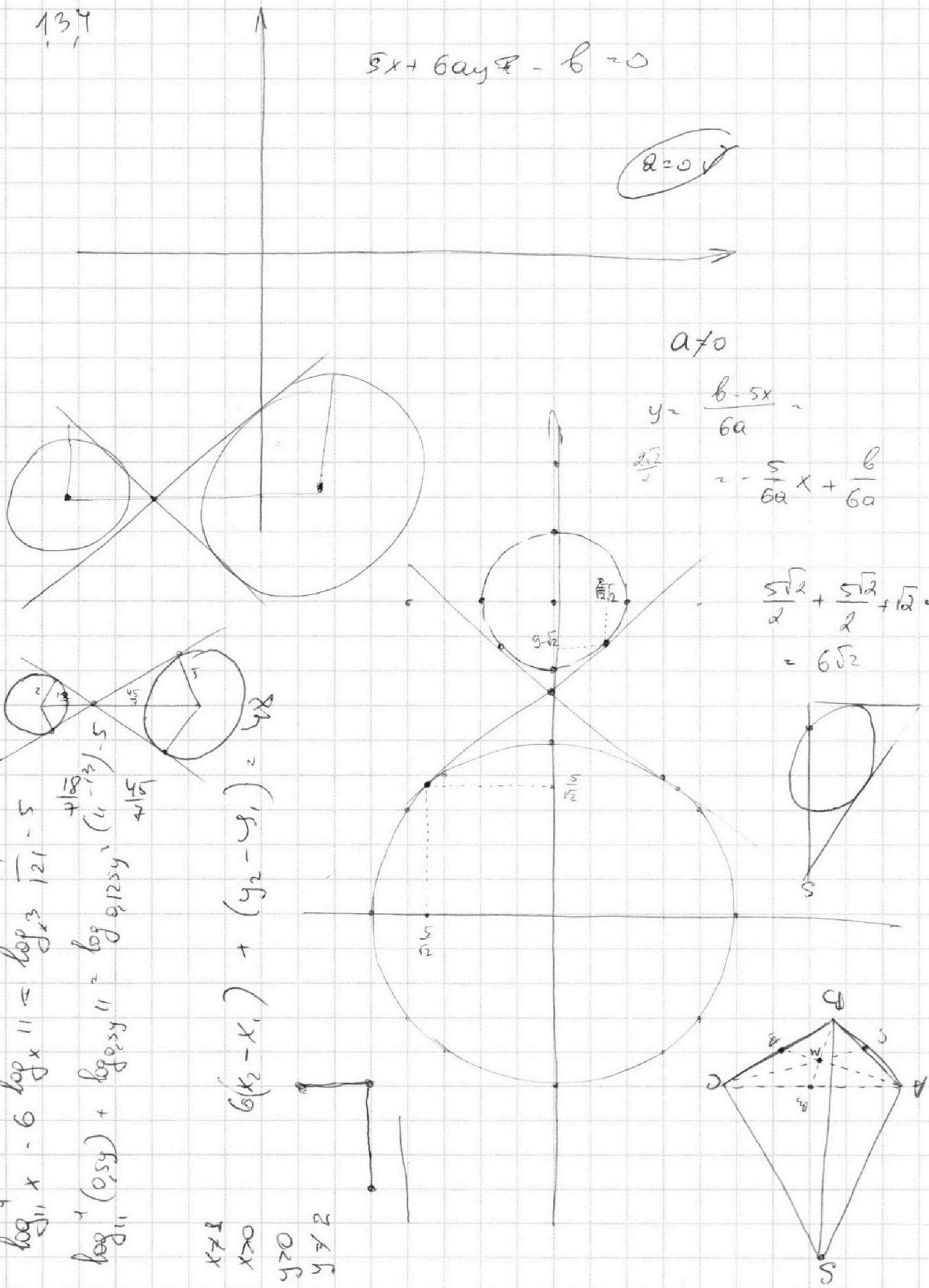
$$= -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$\log_{1/2} x - 6 \log_{1/2} x = \log_{1/2} 3 \cdot \frac{1}{21} - 5$   
 $\log_{1/2} (x_1) + \log_{1/2} (x_2) = \log_{1/2} 3 \cdot \frac{1}{21} - 5$   
 $\log_{1/2} (x_1 x_2) = \log_{1/2} 3 \cdot \frac{1}{21} - 5$   
 $x_1 x_2 = 3 \cdot \frac{1}{21} \cdot 2^{-10} = \frac{1}{7} \cdot 2^{-10}$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

$x \neq 1$   
 $x > 0$   
 $y > 0$   
 $y \neq 2$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

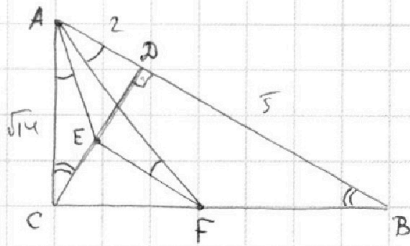
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2 страница 1 из 1



∠CAE = ∠EFA как угол между кас AC и хордой AE

∠EFA = ∠FAB как накрест лежащие

∠ACD = ∠CBA (ΔABC прямой, CD высота)

ΔCAE ~ ΔBAF по двум углам

$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB}$$

Положим отрезки приков нулю  $AD = 2 \Rightarrow AB = 7 \Rightarrow AD = 2 \Rightarrow CD = \sqrt{10}$   
 $AC = \sqrt{14}$ ,  $BC = \sqrt{35}$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow BF = CE \sqrt{\frac{7}{2}}$$

№3 ΔCEF ~ ΔCDB :  $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$

$$\frac{CE}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{35} - CE \sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{35}}$$

$$CE \sqrt{\frac{2}{7}} + CE \frac{1}{\sqrt{10}} = 1 \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$S_{\Delta CEF} = \frac{5\sqrt{10}}{8} \quad (EF = 2,5)$$

$$S_{\Delta ACD} = \sqrt{10}$$

$$S_{\Delta ACD} : S_{\Delta CEF} = 8 : 5$$

Ответ: 8 : 5

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 страница 1 из 1

$$10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = x - 2\pi, \text{ заменим } \sin x = t \Rightarrow$$

$$1) \begin{cases} x = \arcsin t + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2) \begin{cases} x = \pi - \arcsin t + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

$$1) 5 \arcsin t = \arcsin t + 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi(k-1)}{2}, \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{cases} \begin{cases} \arcsin t = -\frac{\pi}{2} \\ \arcsin t = 0 \\ \arcsin t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 4\pi \end{cases}$$

$$2) 5 \arcsin t = \pi - \arcsin t + 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-1)}{3}, \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k=-1 \\ k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{cases} \begin{cases} \arcsin t = -\frac{\pi}{2} \\ \arcsin t = -\frac{\pi}{6} \\ \arcsin t = \frac{\pi}{6} \\ \arcsin t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 4\pi \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi; \frac{\pi}{2} + 4\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

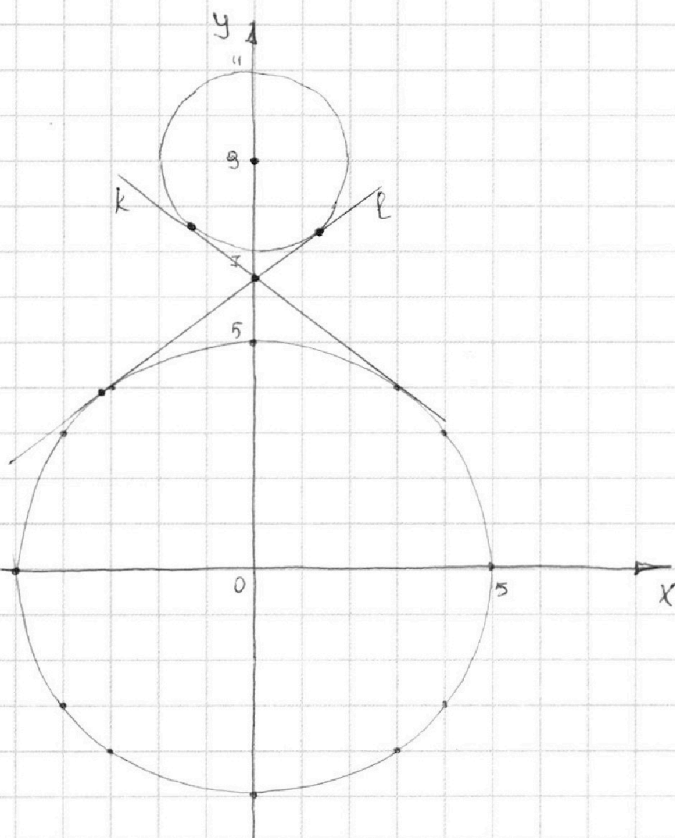
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 страница 1 из 2



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$  - две окружности:  
 $\omega_1$ : центр  $O_1(0,0)$ ,  $R_1 = 5$   
 $\omega_2$ : центр  $O_2(0,9)$ ,  $R_2 = 2$

$5x + 6ay - b = 0$  прямая

При  $a = 0$  заметим, что  $b = 0$  удовлетворяет условию, т.е.  
прямая  $x = 0$  пересекает окружности в 4х точках

Пусть  $a \neq 0$ , тогда

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$  т.к.  $b$  выбирается произвольно, то  $a$  определяет  
только наклон прямой. Для любого  
 $a$  подбором  $b$  можно перевести прямую в любую параллель

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

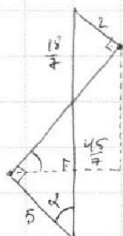
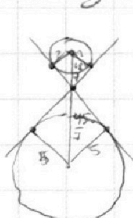


№4 страница 2 из 2

Пусть  $k$  и  $l$  общие внутренние касательные к  
окр-гам

Из чертика очевидно, что для любой прямой, коэфф  
наклона которой больше 1 или меньше  $k$  (с уг. знаком)  
параллельным переносом возможно добиться их точек  
пересечения

Для прямой  $m$  уг. этому условию так сказать  
невозь.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{7}$$

Решая нелинейную квадратическую задачу  
получаем  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{7}$ , т.е. коэфф наклона  $l$   $\frac{3\sqrt{2}}{7}$   
 $k$   $-\frac{3\sqrt{2}}{7}$

$$-\frac{5}{6a} > \frac{3\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{5}{6a} < -\frac{3\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{1}{a} < \frac{-18\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{18\sqrt{2}}{5}$$

$$0 > a > \frac{5}{-18\sqrt{2}}$$

$$0 < a < \frac{5}{18\sqrt{2}}$$

$a = 0$  такие порядки

Ответ:  $\left( \frac{-5}{18\sqrt{2}}; \frac{5}{18\sqrt{2}} \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5, \quad x > 0, x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_x 11} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\log_x 11} - 5, \quad \log_x 11 = t$$

$$t^4 - \frac{16}{3} t^{-1} + 5 = 0, \quad t \neq 0 \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$(1) t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \quad \text{ровно одно решение, } x = 11^t \\ \text{ровно одно решение исходного}$$

$$\log_{0,5y}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y}^3 (11^{-13}) - 5, \quad y > 0, y \neq 2$$

$$\log_{0,5y}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5, \quad \log_{0,5y} 11 = k$$

$$k^4 + \frac{1}{k} = -\frac{13}{3} k - 5$$

$$k^4 + \frac{16}{3} k + 5 = 0, \quad k \neq 0, \text{ т.к. } 0,5y \neq 1$$

$$(2) k^5 + 5k + \frac{16}{3} = 0 \quad \text{ровно одно решение, } y = 2 \cdot 11^k \\ \text{ровно одно решение исходного}$$

Заметим, что если  $a$  - корень (1), то  $(-a)$  - корень (2),  
т.е.  $k + t = 0$

$$xy = 11^t \cdot 2 \cdot 11^k = 2 \cdot 11^{t+k} = 2 \cdot 11^0 = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

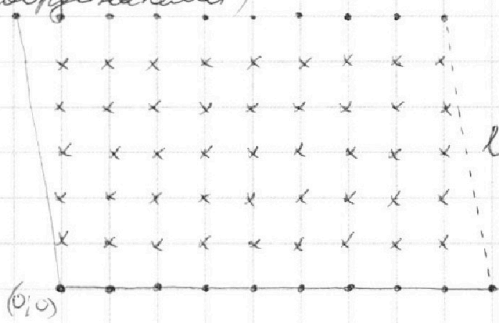
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 страница 1 из 1

Нетрудно заметить, что две точки  $(x_1; y_1)$

ГМТ  $(x_2; y_2)$  удовлетворяющих  $6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$  -  
прямая, проходящая через  $(x_1 + 8; y_1)$  с коэф-ом  
наклона  $-6$  (Точка  $(x_1 + 8; y_1)$  очев. подходит, остальные  
получаются из неё шагом на и вправо и на  
и вниз)

Заметим, что такая прямая пересекает параллелограмм  
не более, чем в  $16$  <sup>целых</sup> точках  $(90/6 + 1)$ . Ровно в  
 $16$  точек пересекает нижнее основание в целых точках  
(здесь и ранее целая точка - точка с целочисленными  
координатами)



где  $\circ$  16 пар  
где  $\times$  15 пар  
(где  $\times$  ГМТ пер.  
ост не в цел. точке)

Заметим, что для точек, лежащих правее  $l$  не найдётся  
ни одной пары уд. усл. Для каждой <sup>целой точки</sup> на  $l$  и  
правее найдётся 16 точек, если точка лежит  
на <sup>нижн.</sup> основании или на прямой, параллельной нижней стороне  
нижн. и пересекающей боковую в целых точках ( $\circ$ ) или 15 точек  
для всех других точек ( $\times$ )

16 прямых по 10 точек по 16 пар  
15 прямоугольников по 45 точек по 15 пар

Итого  $16^2 \cdot 10 + 15^2 \cdot 45 = 2560 + 225 \cdot 45 = 2560 + 10125 =$   
 $= 12685$

Ответ: 12685

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

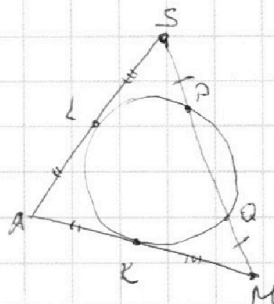
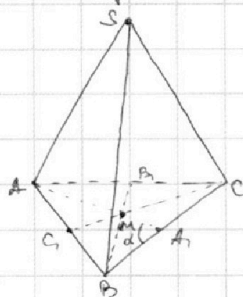
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7

страница 1 из 2



$\triangle ASM$  сечение сферы пл-стью  $ASM$  -  
окр через  $L, K, P, Q$

$AL = AK$  отрезки кас  
 $SQ = MP$  суммы равных

$$LS^2 = SP \cdot SQ = QM \cdot MP = MK^2 \Rightarrow LS = MK \text{ (кас. ко внеш. часть)}$$

$AS = AM$ , треуг. равнобедр.

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = \frac{3}{2} AS = \frac{3}{2} BC = 30$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AA_1 \cdot \sin \alpha$$

$$180 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{180}{300} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \cos \alpha = 0,8$$

По т. кос  $AB^2 = 900 + 100 - 0,4 \cdot 30 \cdot 10 = \sqrt{880}$   
 ~~$AB = \sqrt{880}$~~

$$AC^2 = 900 + 100 + 0,4 \cdot 30 \cdot 10 = \sqrt{1120}$$

медiana  $= \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$  ,  $a = 20$ ,  $b = \sqrt{880}$ ,  $c = \sqrt{1120}$

$$\text{Высота} = \frac{(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4ab}$$

$$= \frac{(4a^2b^2 + 4a^2c^2 - 2a^4 + 4b^4 + 4b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^4 + a^2c^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4ab}$$

$$= (2a^2b^2 + 5a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4b^4 - 2a^4 - 2c^4)(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7 страница 2 из 2

$$= 4a^4 + 10a^4c^2 + 4a^2b^2c^2 + 8a^2b^4 - 4a^6 - 4a^2c^4 +$$

$$+ 2b^4 + 4a^2b^2c^2 + 10a^2c^4 + 4b^2c^4 + 2b^4c^2 - 4a^4c^2 - 4c^6 +$$

$$- 2a^2b^4 - 5a^2b^2c^2 - 2b^4c^2 - 4b^6 + 2a^4b^2 + 2b^2c^4 =$$

~

$$a = 20$$

$$b = \sqrt{810}$$

$$c = \sqrt{1120}$$





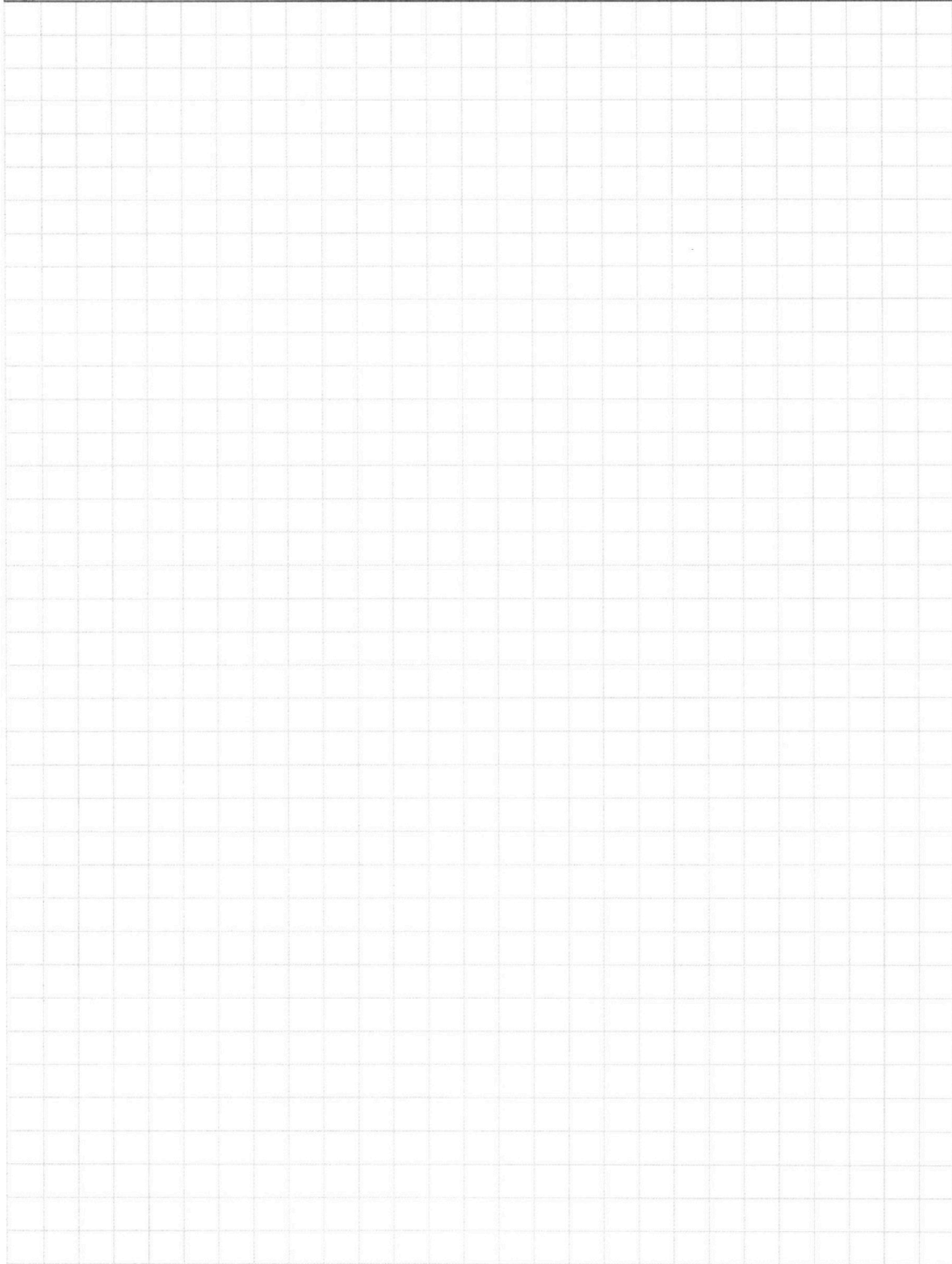
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

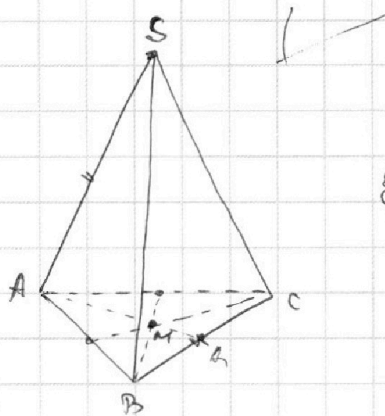
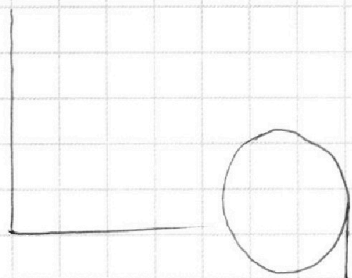


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2a^2$   $4a^2b^2$

$$(2a^2 + 2b^2 - c^2) (2b^2 + 2c^2 - a^2) (2c^2 + 2a^2 - b^2)$$



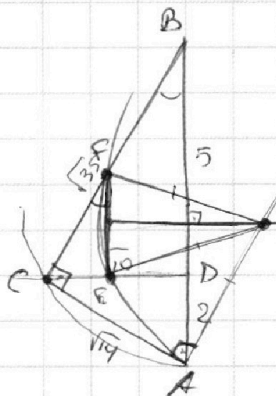
$1000$

$$S_{\triangle ABC} = 180$$

$$SA = SB = SC$$

$$AM = \frac{3}{2} AS$$

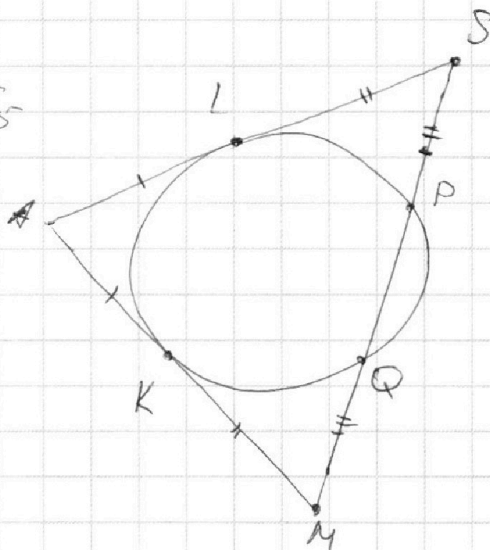
$$AM = AS$$



$$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{2.5}$$

$S$   
 $d$   
 $S$



$$PC \cdot AA_1 \cdot \sin$$

$$PC \cdot AA_1 \cdot \sin$$

$$PC \cdot AA_1 \cdot \sin$$

$is$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ab bc 38

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

17

$$\alpha_2 = 9$$

$$\beta_2 = 4$$

$$\gamma_2 = 17$$

$$\arccos(\sin x) = 0,9\pi - 0,2x$$

a=1  
b=2<sup>6</sup> 3<sup>13</sup> 5<sup>11</sup>

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 20\pi$$

$$0 \geq 2x - 9\pi \geq -20\pi$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$$

$$c = 2^8 3^8 5^2$$

$$0 \leq 0,9\pi - 0,2x \leq 2\pi$$

$$-0,9\pi \leq -0,2x \leq 1,1\pi$$

$$\sin x = t$$

$$x = \arcsin t + 2\pi k$$

$$\beta_2 + \gamma_2 \geq 21$$

$$\alpha_2 \geq$$

$$9\pi \geq 2x \geq -11\pi$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 6$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 14$$

$$\alpha_1 + \gamma_1 \geq 16$$

$$\pi - \arcsin t + 2\pi k$$

$$\gamma_2 + \alpha_2 \geq 25$$

$$\alpha_1 \geq$$

$$4,5\pi \geq x \geq -5,5\pi$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 18$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 30$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$$

$$\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$$

$$\beta_3 + \gamma_3 \geq 13$$

$$\gamma_3 + \alpha_3 \geq 28$$

$$x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\alpha_1 = 4$$

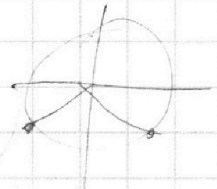
$$\beta_1 = 2$$

$$\gamma_1 = 12$$

$$\cos = 1$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$$

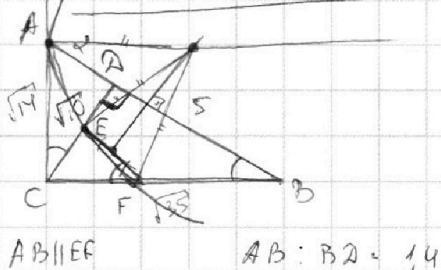


13

$$abc \geq 2^{18} 3^{30} 5^{26}$$

$$\alpha_2 + \beta_2$$

$$5^{24}$$



$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF}$$

24

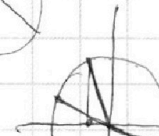
AC

CF \cdot CB

$$\alpha_3 + \beta_3 = 11$$

$$\beta_3 + \gamma_3 = 13$$

$$\gamma_3 + \alpha_3 = 28$$



$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF}$$

$$\frac{AC \cdot CD}{CF \cdot FE}$$

$$x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin x \in [0; 1]$$

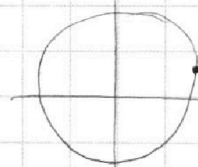
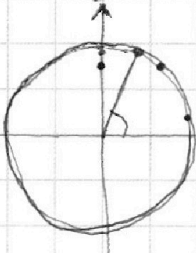
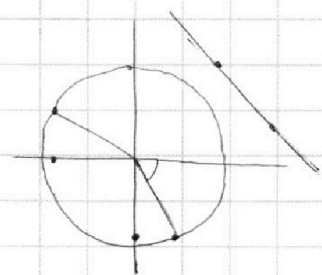
13 0

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CF}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) = 0,9\pi - 0,2x$$

15

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$



$$10 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x \neq 0$      $x \neq 1$   
 $y > 0$      $y \neq 2$

$$\log^4 x - 6 \log^2 x = \log^2 x^2 \cdot \frac{1}{12} - 5$$

$$\log^4 x - \frac{6}{\log^2 x} = -2 \log^2 x \cdot \frac{1}{3} - 5 = -2 \frac{1}{3} \log^2 x - 5$$

$$\log^4 x - \frac{6}{\log^2 x} = -\frac{2}{3} \log^2 x - 5$$

$$\frac{1}{4} - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5$$

$$\log^4 (\log^2 x) + \log^2 x = \log^2 x^2 \cdot \frac{1}{11} = \log^2 (11^{-1/2}) - 5$$

$$\log^4 z + \frac{1}{\log^2 z} = -13 \frac{1}{3} \log^2 z - 5$$

$$k^4 + \frac{1}{k} = \frac{-13}{3}k - 5$$

$$k^4 + \left(\frac{13}{3} + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{k} + 5 = 0$$

$$k^4 + \frac{16}{3k} + 5 = 0$$

$$t^5 k^5 + 5(k+t) = 0$$

$$(t+k)(t^4 - t^3 k + t^2 k^2 - t k^3 + k^4) + 5(t+k) = 0$$

$$-\frac{2}{3} \log^2 x$$

$$t = \log^2 x$$

$$z = 5t$$

$$2x = 0.5ky$$

$$xy = z$$

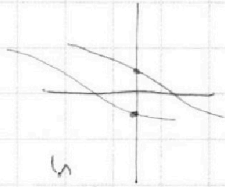
$$\log^2 z = t$$

$$k+t=0$$

$$k \neq 0$$

$$k^5 + 5k + \frac{16}{3} = 0$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$



ky

$$\log^2 z = t+k$$

$$t+k$$

$$x^2 = 11$$

$$ky = \frac{11(k+k)}{2}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$t^4 \left(-\frac{18}{3} + \frac{2}{3}\right) t + \frac{1}{3} + 5 = 0$$

$$t^4 - \frac{16}{3}t + 5 = 0$$