



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

Обозначим за  $d_p$  - степень, в которой число (простое)  $p$  входит в  $a$ ; аналогично  $\beta_p$  - в число  $b$ ,  $f_p$  - в число  $c$ .

Тогда 1)  $ab : 2^7 \Leftrightarrow 2^{d_2} \cdot 2^{\beta_2} : 2^7 \Leftrightarrow d_2 + \beta_2 \geq 7$ .  
 Аналогично  $bc : 2^{13} \Leftrightarrow \beta_2 + f_2 \geq 13$  и  
 $ac : 2^{14} \Leftrightarrow d_2 + f_2 \geq 14 \Rightarrow (d_2 + \beta_2) + (\beta_2 + f_2) + (d_2 + f_2) \geq 7 + 13 + 14 = 34 \Rightarrow d_2 + \beta_2 + f_2 \geq 17$ . ■

2)  $ab : 3^{11} \Leftrightarrow 3^{d_3} \cdot 3^{\beta_3} : 3^{11} \Leftrightarrow d_3 + \beta_3 \geq 11$ . Аналогично  $bc : 3^{15} \Leftrightarrow \beta_3 + f_3 \geq 15$  и  $ac : 3^{17} \Leftrightarrow d_3 + f_3 \geq 17$   
 $\Rightarrow (d_3 + \beta_3) + (\beta_3 + f_3) + (d_3 + f_3) \geq 11 + 15 + 17 = 43 \Rightarrow d_3 + \beta_3 + f_3 \geq 21,5$ . Т.к.  $d_i, \beta_i, f_i$  - целые, то

$d_3 + \beta_3 + f_3 \geq 22$  ■  
 3)  $ab : 5^{14} \Leftrightarrow 5^{d_5} \cdot 5^{\beta_5} : 5^{14} \Leftrightarrow d_5 + \beta_5 \geq 14$ . Аналогично  $ac : 5^{43} \Leftrightarrow d_5 + f_5 \geq 43$

~~Следовательно  $d_5 + \beta_5 + f_5 \geq 43$  и  $d_3 + \beta_3 + f_3 \geq 22$  и  $d_2 + \beta_2 + f_2 \geq 17$ . Т.к.  $d_i + \beta_i + f_i \geq 43$  и  $d_i + \beta_i + f_i \geq 22$  и  $d_i + \beta_i + f_i \geq 17$  то  $d_i + \beta_i + f_i \geq 43$  ■~~

Заметим, что  $a \geq 2^{d_2} \cdot 3^{d_3} \cdot 5^{d_5}$ ,  $b \geq 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5}$   
 и  $c \geq 2^{f_2} \cdot 3^{f_3} \cdot 5^{f_5}$  (исходя из пр.  $d_i, \beta_i, f_i$ )

числа  $2^{\dots}, 3^{\dots}, 5^{\dots}$  входят в числа  $a, b, c$  ⇒  
 $a \cdot b \cdot c \geq 2^{d_2 + \beta_2 + f_2} \cdot 3^{d_3 + \beta_3 + f_3} \cdot 5^{d_5 + \beta_5 + f_5} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Воспользуемся тем, что  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$   
 Пример:  $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{24}$ ,  $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$ ,  $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{18}$

Действительно  $abc = 2^{4+3+10} \cdot 3^{6+5+11} \cdot 5^{24+0+18} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$   
 $ab = 2^{4+3} \cdot 3^{6+5} \cdot 5^{24} = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{24}$ ;  $bc = 2^{3+10} \cdot 3^{5+11} \cdot 5^{18} = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{18}$   
 и  $ac = 2^{4+10} \cdot 3^{6+11} \cdot 5^{24+18} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ ;  $2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

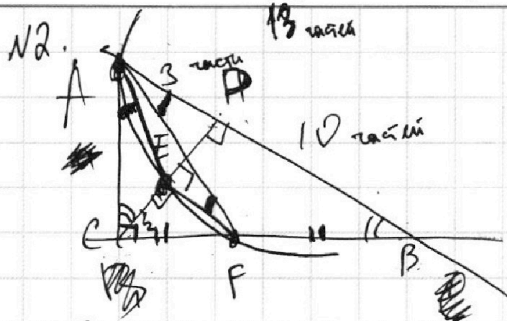
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~CD = 10 см~~  $\frac{AB}{AD} = \frac{13}{3} \Rightarrow$   
 $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{10}$   
 Вспомогательная линия EF || AB, тогда отрезки AC и BC делятся в равных отношениях (не обязательно).

~~AC = 13 см, CD = 10 см, AD = 3 см, AB = 13 см, BC = 12 см, AC = 13 см, AB = 13 см, BC = 12 см, AC = 13 см, AB = 13 см, BC = 12 см~~

$\angle CAE = \angle EFA$  (угл. между кас-ой и хордой)

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFA = \angle FAB, \Rightarrow \angle FAB = \angle EAC$

$\angle ACD = 90^\circ, \angle CAD = 90^\circ - \angle CAB = \angle CBA, \text{ т.е. } \angle ACD = \angle CBA$

значит,  $\triangle CEA \sim \triangle BFA$  по двум углам.

$EF \parallel DB \Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 90^\circ. \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$  по двум углам.

$\Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{BF}{BA}$  и  $\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow BF = CE \cdot \frac{AB}{AC}, CF = CE \cdot \frac{CB}{CD}$

по  $\triangle ABC: \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin \angle B}$ , по  $\triangle CDB: \frac{CB}{CD} = \frac{1}{\sin \angle B} \Rightarrow$

$\Rightarrow BF = CE \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{CE}{\sin \angle B} = CE \cdot \frac{CB}{CD} = CF, \text{ т.е. } BF = CF. \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DB} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} CE \cdot EF}{\frac{1}{2} CD \cdot DB} =$

$= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{EF}{DB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot DC}{\frac{1}{2} CD \cdot DB} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} : \frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{1}{4} : \frac{3}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{6}{5}$

Ответ:  $\frac{6}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{arccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x &\Rightarrow \text{arccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \\ \sin x = \cos y &\Rightarrow \text{arccos}(\cos y) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow y = \pm \left( \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin x = \cos \left( \pm \left( \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right) \right) \end{aligned}$$

$$\sin x = \cos \left( \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right).$$

$$\sin x = \cos \left( \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \right)$$

$$\sin x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \left( \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \right) \right)$$

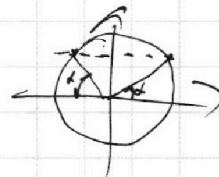
$$\sin x = \sin \left( \frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \right). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{aligned} x + 2\pi k &= \frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \\ x + 2\pi k &= \pi - \left( \frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \right) \end{aligned} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{6}{5}x &= \frac{\pi}{5} - 2\pi k \\ \frac{4}{5}x &= \frac{4\pi}{5} - 2\pi k \end{aligned} \right.$$

$$\left[ \begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \\ x &= \pi - \frac{5\pi k}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{5\pi}{10} - \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$



$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \text{ или } x = \pi - \frac{5\pi k}{2}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2 стр.) №4.

Тогда  $l_1: y = kx + t_0$   
 $l_2: y = -kx + t'_0$

$t_0$  таковой, что  $x = -t$  при  $y = 0$ , т.е.  
 $0 = kx + t_0$   $t_0' : 0 = -k(-t) + t_0'$   
 $0 = -kt + t_0$   $t_0' = -kt.$   
 $t_0 = kb.$

т.е.  $l_1: y = kx + kt$   
 $l_2: y = -kx - kt.$

Найдем  $t, k$ .

~~уравнение~~  
система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = kx + kt \end{cases}$  1 решение, так как  
еще точка.

$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ y = kx + kt \end{cases}$  1 решение аналогично.

$x^2 + (kx + kt)^2 = 9$

$x^2(k^2 + 1) + x(2k^2t) + k^2t^2 - 9 = 0$

1 решение  $\Rightarrow$  дискр. = 0. т.е.  $(2k^2t)^2 - 4(k^2t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$   
 $(k^2t)^2 - (k^2t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0.$   
 $-k^2t^2 + 9k^2 + 9 = 0.$

$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ y = kx + kt \end{cases}$  аналогично  $(x+7)^2 + (kx + kt)^2 = 4.$

$x^2 + 14x + 49 + k^2x^2 + 2x \cdot k^2t + k^2t^2 - 4 = 0.$   
 $x^2(k^2 + 1) + x(14 + 2k^2t) + k^2t^2 + 45 = 0$

$D = 0, \Rightarrow$  1 решение  $\Rightarrow (14 + 2k^2t)^2 - 4(k^2t^2 + 45)(1 + k^2) = 0$   
 $(7 + k^2t)^2 = (k^2t^2 + 45)(1 + k^2)$

$49 + 14k^2t + k^4t^2 = k^2t^2 + k^4t^2 + 45 + k^2 \cdot 45$   
 $4 + 14k^2t + k^4t^2 = k^2t^2 + k^2 \cdot 45.$

т.е.  $\begin{cases} 4 + 14k^2t = k^2t^2 + 45k^2 \\ 9k^2 + 9 = k^2t^2 \end{cases}$   ~~$k^2(9 - t^2) = -9$~~

$4 + 14\left(\frac{-9}{9 - t^2}\right)t = \frac{-9}{9 - t^2}t^2 + 45\left(\frac{-9}{9 - t^2}\right) \mid (9 - t^2)$   
 $k^2 = \frac{-9}{9 - t^2}$

$4(9 - t^2) + 14 \cdot 9t = -9t^2 - 9 \cdot 45$

$36 - 4t^2 - 126t = -9t^2 - 405$

$-5t^2 - 126t + 441 = 0$

$D = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 441 = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 = (21 \cdot 6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 =$

$= 21^2(6^2 - 4 \cdot 5) = 21^2(36 - 20) = 21^2 \cdot 16 = (21 \cdot 4)^2 = 84^2.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3 ар.) МН.

$$t = \frac{126 \pm 84}{5 \cdot 2}$$

или  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}$  ~~или  $\sqrt{30}$~~

$t$ , т.е. мы рассматриваем точку пересечения окружности с осью абсцисс (внешний диаметр радиуса от центра)

$$t = \frac{126 - 84}{5 \cdot 2} = \frac{63 - 42}{5} = \frac{21}{5}$$

$$k^2 = -\frac{9}{9-t^2} = \frac{9}{t^2-9} = \frac{9}{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 9} = \frac{1}{\left(\frac{7}{5}\right)^2 - 1} = \frac{5^2}{7^2 - 5^2}$$

$$= \frac{5^2}{2 \cdot 12} = \frac{5^2}{4 \cdot 6}$$

касательная кр.  $l_1$ , поэтому  $k > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

уравнение касательной  $(x; y)$  или  $(x; k)$  ~~или  $(x; y)$~~  ~~или  $(x; k)$~~

~~Знаменатель  $\frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$~~

~~$-\frac{5\sqrt{6}}{12} < \frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}$~~

~~$\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}$~~

~~$\frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12}$~~

~~$a > \frac{12}{3 \cdot 5\sqrt{6}}$~~

~~$\frac{1}{a} > -\frac{5\sqrt{6}}{4}$~~

~~$a > \frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6} \cdot 4}$~~

~~$a > \frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}$~~

~~$a > \frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}$~~

~~$a > \frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}$~~

Значит  $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$

Ответ:  $\left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$  (касат.)

Заметим, что если у прямой угол наклона будет  $\geq k$ , то она не сможет пересечь сразу 2 окружности (см. рис) или 2,





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{N5. } \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4 \quad 6x > 0, t = 6x. \\ t \neq 1.$$

$$\log_7^4 t - 2 \log_{\frac{t}{6}} 7 = \frac{3}{2} \log_{\frac{t}{6}} 7 - 4$$

$$\log_7^4 t = 3,5 \log_{\frac{t}{6}} 7 - 4$$

$$\log_7^4 t = \frac{3,5}{\log_7 t} - 4$$

$$\text{и. л. } \log_x y \cdot \log_y x = 1.$$

$$\log_7^5 t = 3,5 - 4 \log_7 t \quad \bullet \quad (1)$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4.$$

$$\log_7^4 y = -3,5 \log_y 7 - 4$$

$$\log_7^5 y = -3,5 - 4 \log_7 y. \quad \bullet \quad (2)$$

Сложим (1) и (2):

$$\log_7^5 y + \log_7^5 t = -4 (\log_7 t + \log_7 y).$$

$$\log_7^5 (yt) = -4 \log_7 (yt). \quad \text{и. л.}$$

$$\log_7 (yt) (\log_7^4 (yt) + 1) = 0.$$

$\geq 0$ , и. л. ч. не равно

$$\log_7 (yt) = 0.$$

$$yt = 1.$$

$$t = 6x \Rightarrow 6x \cdot y = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}.$$

Ответ:  $\frac{1}{6}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\log_7(6x))^4 - 2 \log_7(6x) \cdot 7 = \frac{3}{2} \log_7(6x) \cdot 7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - 3.5 \log_7(6x) \cdot 7 = -4$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$b \cdot a^{\log_b a} = a$$

$$\log_7^4 y = -3.5 \log_7 y \cdot 7 - 4$$

$$\log_7^4(t) = \frac{3.5}{\log_7 t} - 4$$

$$\log_7^5 t = 3.5 - 4 \log_7 t$$

$$\log_7^5 y = -3.5 - 4 \log_7 y$$

$$\log_7^5 t + \log_7^5 y = -4 \log_7(ty)$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$b \cdot a^{\log_b a} = a$$

$$a = b^{\log_b a}$$

$$b \cdot b^{\log_b a} = a$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y \cdot 7 = \frac{5}{2} \log_7 y \cdot 7 - 4$$

$$\log_a a = \frac{a}{b} \cdot \log_a b$$

$$\log_a a = \log_a a$$

$$\log_a a = \log_a a - \log_a b$$

$$\log_a a + \log_a b = 1$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_7^4 y = -3.5 \log_7 y \cdot 7 - 4$$

$$\log_7^4(t) = 3.5 \log_7 t \cdot 7 - 4$$

$$\log_y 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 y} = \frac{1}{\log_7 y}$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = \log_a a = 1$$

~~$$\log_{ab} x = c$$~~
~~$$x = ab^c$$~~
~~$$x = a^c b$$~~

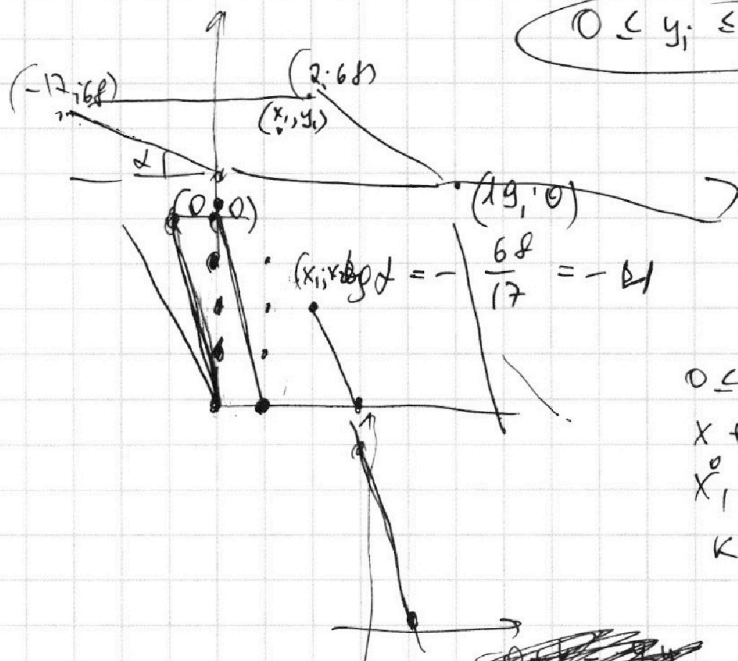
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$0 \leq y_1 \leq 68$

$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40.$

$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40.$

$x_2 - x_1 \leq 19.$

$0 \leq k \leq 19$

$x + k = -4y.$

$x_1 + k = -4y_1.$

$k =$

~~4. x + 1 = -4y.~~  
y =

$$\frac{441}{36} \Big| \frac{9}{49}$$

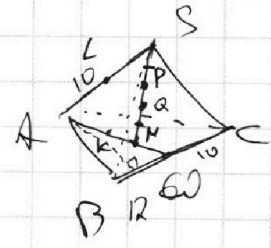
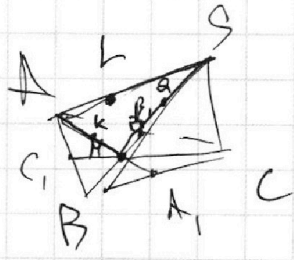
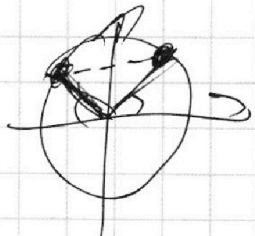
$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \cdot (7 \cdot 3)^2 = 21^2.$



$\sin x = \cos y$   
 $y = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}.$   
 $4(63^2 - 21^2 \cdot 5) =$

$\frac{3\pi}{10}$

$\sin x = \cos(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5})$   
 $4((21 \cdot 3)^2 - 21^2 \cdot 5) =$   
 $= 4 \cdot 21^2(3^2 - 5) =$   
 $= 4 \cdot 21^2 \cdot 4$



$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} = \pi - \frac{5\pi k}{2} \cdot 6$

$\pi - 10\pi k = 6\pi - 15\pi k.$   
 $1 - 10k = 6 - 15k$

$5k = 5$   
 $k = 1.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4  
(2 оп.)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x = ky - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (ky - t)^2 + y^2 = 9 \\ y^2(k^2 + 1) - 2kty + t^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

решение  $\Rightarrow$  дискр. = 0  $\Rightarrow (2kt)^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$

$$(kt)^2 - (t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$$

$$-t^2 + 9k^2 + 9 = 0$$

$$t^2 = 9k^2 + 9$$

аналогично 1 решение  $y$   $\begin{cases} (k+7)^2 + y^2 = 4 \\ y = ky - t \end{cases}$

$$(ky - t + 7)^2 + y^2 = 4$$

$$y^2(k^2 + 1) - y(2kt - 14k) + t^2 + 7^2 - 4 + 14t = 0$$

$$D = 0, \text{ т.е. } (2kt - 14k)^2 - 4(t^2 + 14t + 45)(k^2 + 1) = 0$$

$$(kt + 7k)^2 - (t^2 + 14t + 45)(k^2 + 1) = 0$$

$$k^2t^2 + 14k^2t + 49k^2 - k^2t^2 - t^2 + 14k^2t + 14t - 45k^2 - 45 = 0$$

$$4k^2 - t^2 + 14t - 45 = 0$$

значит,  $\begin{cases} t^2 = 9k^2 + 9 & | \cdot 4 \\ 4k^2 = t^2 + 14t + 45 & | \cdot 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^2 = 36k^2 + 36 \\ 36k^2 = 9t^2 + 9 \cdot 14t + 9 \cdot 45 \end{cases}$

$$4t^2 = 9t^2 + 9 \cdot 14t + 9 \cdot 45 + 36$$

$$5t^2 - 9 \cdot 14t + 9 \cdot 45 + 36 = 0$$

$$D = (9 \cdot 14)^2 - 4(9 \cdot 45 + 36)(5) = 9 \cdot 4(9 \cdot 7^2 - (45 + 4)(5)) =$$

$$= 9 \cdot 4 \cdot 7^2(9 - 5) = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2$$

$$t = \frac{9 \cdot 14 \pm \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2}}{2 \cdot 5}$$

корень, т.е.  $2 \cdot 5$  общие касательные - внешние.

$$t = \frac{9 \cdot 14 - 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 7 - 3 \cdot 7 \cdot 2}{5} = \frac{63 - 42}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$$

$$9k^2 + 9 = t^2 = (4,2)^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2$$

$$k^2 + 1 = \left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$$k^2 = \frac{7^2 - 5^2}{5^2} = \frac{2 \cdot 12}{5^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6$$

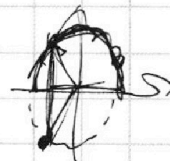
$$k > 0 \Rightarrow k = \frac{2}{5} \sqrt{6}$$

коэф. от  $t$  до  $k$  и  $\sqrt{6}$  коэффициентом или  $\sqrt{6}$  коэффициентом.

значит,  $-3a \in \left(-\frac{2}{5}\sqrt{6}; \frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$

$$a \in \left(-\frac{2}{15}\sqrt{6}; \frac{2}{15}\sqrt{6}\right)$$

ответ:  $a \in \left(-\frac{2}{15}\sqrt{6}; \frac{2}{15}\sqrt{6}\right)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

1)  $x = 0$  - решение.

$$\begin{cases} 3ay = 7b \\ (y^2 + 45)(y^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad \pm 9a = 7b$$

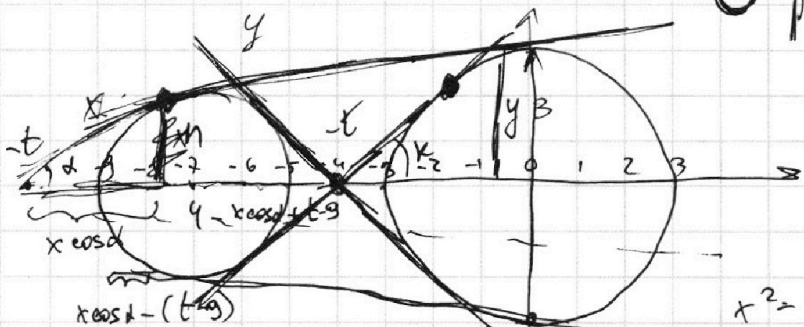
Есть ещё 2 решения  $\Rightarrow y = 0$  тоже реш.

$$\begin{cases} x = 7b \\ (x^2 + 14x + 45)(x^2 - 9) = 0 \\ D = 14^2 - 4 \cdot 45 = 4^2(7^2 - 45) = 4 \cdot 4 \cdot (7+5)(7-9) \end{cases}$$

$$(x+5)(x+9)(x-3)(x+3) = 0 \quad \text{4 решения сдв. круга} \rightarrow x = ky - t.$$

$\Rightarrow$  ЧП-кординаты.

$$\begin{cases} x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0 \\ (x+7)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$



$a \neq 0$ , т.к. прямая не вертикальна

$$\begin{cases} x - 7b = -3ay \\ y = \frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{3}{t} \\ x^2 = (t-9)(t-5) \quad t^2 - 14t + 45 = x^2 \\ y^2 = (t-3)(t+3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 \cos^2 \alpha &= (x \cos \alpha - t + 9)(t - x \cos \alpha - 5) \\ &= xt \cos \alpha - x^2 \cos^2 \alpha - 5x \cos \alpha + t^2 + x t \cos \alpha + 5t + 8t - 8x \cos \alpha - 45 \\ &= 2xt \cos \alpha - 14x \cos \alpha + 14t - t^2 - 45 \end{aligned}$$

$$1 = 2xt \cos \alpha - 14x \cos \alpha - x^2.$$

$$x - 7b = 3ay.$$

$$\begin{cases} x - t = ky \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \quad \text{1 решение}$$

$$\begin{aligned} D &= kt^2 - (t-9)(kt^2) = \\ &= -t^2 + 9kt^2 + 9 = 0 \\ t^2 + 9k^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$(t+ky)^2 + y^2 = 9. \quad | \text{ подст. } \Rightarrow (ky + t)^2 + y^2 = 9.$$

$$\Rightarrow D = 0. \quad y^2(k^2 + 1) - 2kty + t^2 - 9 = 0.$$

$$\begin{aligned} y^2(k^2 + 1) - 2kty + t^2 - 9 &= 0. \quad D = (2kt)^2 + 4 \cdot 9(k^2 + 1) = \\ D &= (2kt)^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0. \quad = 4k^2t^2 + 4 \cdot 9k^2 + 4 \cdot 9 = \\ (kt)^2 - (t^2 - 9)(k^2 + 1) &= 0. \quad = 4((kt)^2 + (9k)^2 + 3^2). \\ -t^2 + 9k^2 + 9 &= 0 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{matrix} 2x & 3y & 5z \\ \alpha_2 + \beta_2 & \geq 7 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 & \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 & \geq 43 \end{matrix}$$

$$z \geq 43$$

$$y \geq 17$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{64}{2} = 32$$

$$\begin{matrix} \alpha_2 + \beta_2 = 7 \\ 7 - \beta_2 + \gamma_2 = 14 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \gamma_2 - \beta_2 = 7 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 43 \end{matrix} \quad | +$$

$$\begin{matrix} 2\gamma_2 = 50 \\ \gamma_2 = 25 \end{matrix}$$

$$\beta_2 = 18$$

$$a = 2 \cdot 4 \cdot 6$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$c = 2 \cdot 10 \cdot 10$$

$$\begin{matrix} 2x & 3y & 5z \\ \alpha_2 + \beta_2 & \geq 7 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 & \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 & \geq 13 \end{matrix}$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \leq 19$$

$$\begin{matrix} (\alpha_2 + \beta_2) + (\alpha_2 + \gamma_2) + (\beta_2 + \gamma_2) \leq 3 \cdot 19 \\ \geq 27 + 17 = 34 \end{matrix}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\begin{matrix} \alpha_3 + \beta_3 & \geq 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 & \geq 17 \\ \beta_3 + \gamma_3 & \geq 15 \end{matrix}$$

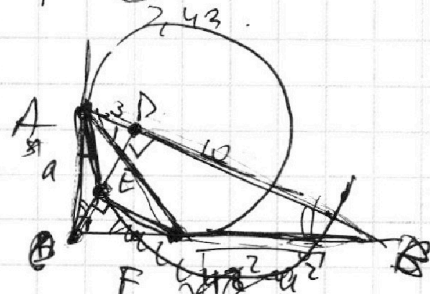
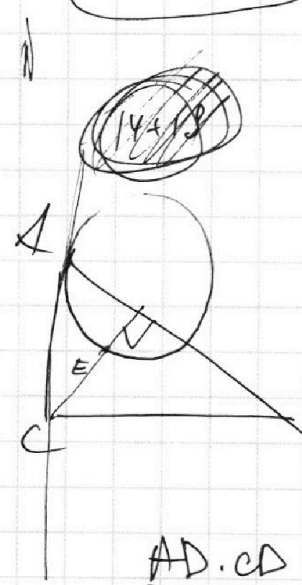
$$\alpha_2 + \gamma_2 + 2\beta_2 \geq 20$$

$$\alpha_2 + \gamma_2 + \beta_2 + \beta_2 \geq 20$$

$$\frac{11 + 17 + 15 + 1}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

$$11 + 6 + 5 = 22$$

$$\alpha + \beta + \alpha + \gamma + 2\beta \geq 32$$



$$\begin{matrix} 5^2 - 3^2 = 12 \cdot 10 \\ 2 \cdot 2 = 2 \cdot 22 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} CD \cdot CB = a \sqrt{13^2 - a^2} \\ CD = \frac{a \sqrt{13^2 - a^2}}{13} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} CE = \frac{a^2}{CD} = \frac{a^2 \cdot 13}{a \sqrt{13^2 - a^2}} \\ = \frac{13a}{\sqrt{13^2 - a^2}} \end{matrix}$$

$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{a(13^2 - a^2)}{13 \cdot 13a} = \frac{13^2 - a^2}{13^2}$$

$$\begin{matrix} \frac{S_{ACD}}{S_{CEP}} = \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} \\ \frac{1}{2} = \frac{13}{10} \\ \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{13}{10} \\ \frac{CE}{EF} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow EF = \frac{CE \cdot DB}{CD} = \left(\frac{CD}{CE}\right)^2 \end{matrix}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_a b \cdot \log_b a$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$$

~~$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$~~

$$a^{\log_a b} = b$$

$$b = b \quad \text{Ⓜ}$$

$$\log_a^n b + \log_a^n c = \log_a^n (bc)$$

$$a^{\log_a^n b} \cdot a^{\log_a^n c} = a^{\log_a^n (bc)}$$

$$b^n \cdot c^n = (bc)^n$$

$$(bc)^n = (bc)^n$$