



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5.

Обозначим за α_p - степень, в которой число (произведение) p встречается в a ; аналогично β_p - в числе b , γ_p - в числе c .

Тогда 1) $ab : 2^7 \Leftrightarrow 2^{\alpha_2} \cdot 2^{\beta_2} : 2^7 \Leftrightarrow \alpha_2 + \beta_2 \geq 7$.

Аналогично $ac : 2^{13} \Leftrightarrow \beta_2 + \gamma_2 \geq 13$ и

$bc : 2^{14} \Leftrightarrow \alpha_2 + \gamma_2 \geq 14 \Rightarrow (\alpha_2 + \beta_2) + (\beta_2 + \gamma_2) \in (\alpha_2 + \beta_2) \geq 7 + 13 + 14 = 34 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 17$. ■

2) $ab : 3^{11} \Leftrightarrow 3^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} : 3^{11} \Leftrightarrow \alpha_3 + \beta_3 \geq 11$. Аналогично $bc : 3^{15} \Leftrightarrow \beta_3 + \gamma_3 \geq 15$ и $ac : 3^{17} \Leftrightarrow \alpha_3 + \gamma_3 \geq 17$
 $\Rightarrow (\alpha_3 + \beta_3) + (\beta_3 + \gamma_3) + (\alpha_3 + \gamma_3) \geq 11 + 15 + 17 = 43 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 21,5$. Т.к. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ - целые, то

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 22$ ■

3) $ab : 5^{14} \Leftrightarrow 5^{\alpha_5} \cdot 5^{\beta_5} : 5^{14} \Leftrightarrow \alpha_5 + \beta_5 \geq 14$. Аналого-

лически $ac : 5^{17} \Leftrightarrow \alpha_5 + \gamma_5 \geq 17$

Заметим, что $a \geq 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5}$, $b \geq 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5}$

и $c \geq 2^{\gamma_2} \cdot 3^{\gamma_3} \cdot 5^{\gamma_5}$ (числа a, b, c входят в числа ab, ac, bc) \Rightarrow

числа $2^{\alpha_2}, 3^{\alpha_3}, 5^{\alpha_5}$ входят в числа a, b, c \Rightarrow
 $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5} = 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5}$

• $5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5} \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{19}$.
По условию $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{19}$.
Пример: $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{24}$, $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$, $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{19}$.

Доказательство: $abc = 2^{4+3+10} \cdot 3^{6+5+11} \cdot 5^{24+0+19} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$ab = 2^{4+3} \cdot 3^{6+5} \cdot 5^{24} = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{24} \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{19}$, $bc = 2^{3+10} \cdot 3^{5+11} \cdot 5^{19} =$
 $= 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{19} \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ и $ac = 2^{4+10} \cdot 3^{6+11} \cdot 5^{24+19} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$.

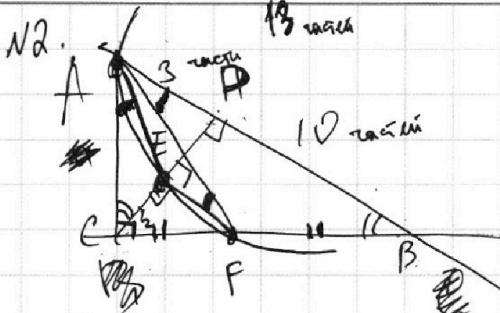
Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{19}$.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~если~~ $\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{3}{10}$. ~~тогда~~
~~все~~ ~~то~~ ~~это~~ ~~значит~~
~~что~~ ~~угол~~ ~~равен~~ ~~углу~~
~~известному~~ ~~не~~ ~~известному~~.

~~так как~~ $\angle CAB = \angle CBA$ ~~так как~~ $\angle CAB = \angle CBA$

$\angle CAE = \angle EFA$ (Углы между рабочей и хордой)

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFA = \angle FAB, \Rightarrow \angle FAB = \angle EAC$.

$\angle ACD = 90^\circ - \angle CAB = \angle CBA$, т.е. $\angle ACD = \angle CBA$.

значит, $\triangle CEA \sim \triangle BFA$ но доказать упрощенно.

$EF \parallel DB \Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$ но доказать упрощенно.

$$\Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{BF}{BA} \text{ и } \frac{CE}{CF} = \frac{CB}{CB} \Rightarrow BF = CE \cdot \frac{AB}{AC}, CF = CE \cdot \frac{CB}{CD}.$$

$$\text{но } \triangle ABC : \frac{AB}{AC} = \frac{CE}{CF} \text{ и } \triangle CDB : \frac{CB}{CD} = \frac{1}{\sin \angle B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BF = CE \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{CE}{\sin \angle B} = CF, \text{ т.е. } BF = CF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CE}{CP} = \frac{EF}{DB} < \frac{CF}{EB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{S_{CEF}}{S_{CDB}}}{\frac{S_{CDB}}{S_{CDB}}} = \frac{\frac{1}{2} CE \cdot EF}{\frac{1}{2} CP \cdot DB} =$$

$$= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{EF}{DB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot DC}{\frac{1}{2} CD \cdot DB} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} : \frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{1}{4} : \frac{3}{10} =$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{6}{5}.$$

Объем: $\frac{6}{5}$.

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

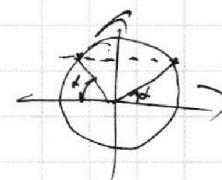
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x &\Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \\ \sin x = \cos y &\Rightarrow \arccos(\cos y) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow y = \pm \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin x &= \cos \left(\pm \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right) \right) \\ \sin x &= \cos \left(\frac{3\pi}{10} \pm \frac{x}{5} + 2\pi k \right). \\ \sin x &= \cos \left(\frac{3\pi}{10} \pm \frac{x}{5} \right) \\ \sin x &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{10} \pm \frac{x}{5} \right) \right) & \frac{3\pi}{10} - \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \\ \sin x &= \sin \left(\frac{\pi}{5} \mp \frac{x}{5} \right). \Rightarrow \\ \Rightarrow & \begin{cases} x + 2\pi k = \frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \\ x + 2\pi k = \pi - \left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \right) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 2\pi k \\ \frac{4}{5}x = \frac{4\pi}{5} - 2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \\ x = \pi - \frac{5\pi k}{2} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}$ или $x = \pi - \frac{5\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2 сп.) №4.

$$\text{Тогда } l_1 : y = kx + t_0$$

$$l_2' : y = -kx + t_0'$$

t_0 - точкой, откуда $x = -t$ при $y = 0$, т.е.

$$0 = kx + t_0$$

$$t_0' : 0 = -k(-t) + t_0'$$

$$0 = -kt + t_0$$

$$t_0' = -kt.$$

$$t_0 = kt.$$

$$\text{т.е. } l_1 : y = kx + kt$$

$$l_2 : y = -kx - kt.$$

Найдём t, k .

$$\begin{array}{c} \cancel{y \neq 0} \\ \text{система} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3^2 \\ y = kx + kt \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{1 решение, т.к.} \\ \text{одн. точка} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} (k+t)^2 + y^2 = 2^2 \\ y = kx + kt \end{array} \right. \quad \text{1 решение аналого.}$$

$$\text{из } \textcircled{1} \quad x^2 + (kx + kt)^2 = 9.$$

$$x^2(k^2+1) + x(2k^2t) + k^2t^2 - 9 = 0$$

$$\begin{aligned} (\text{решение} \Rightarrow \text{функция} = 0. \text{ т.е. } (2k^2t)^2 - 4(k^2t^2 - 9)(k^2+1) = 0) \\ (k^2t)^2 - (k^2t^2 - 9)(k^2+1) = 0. \\ -k^2t^2 + 9k^2 + 9 = 0. \end{aligned}$$

■

$$\text{из } \textcircled{2} \quad (k+t)^2 + y^2 = 4.$$

$$x^2 + 14x + 49 + k^2x^2 + 2x \cdot k^2t + k^2t^2 - 4 = 0.$$

$$x^2(k^2+1) + x(14 + 2k^2t) + k^2t^2 + 45 = 0$$

$$D = 0, \text{ т.к. 1 решение} \Rightarrow (14 + 2k^2t)^2 - 4(k^2t^2 + 45)(1 + k^2) = 0$$

$$(7 + k^2t)^2 = (k^2t^2 + 45)(1 + k^2)$$

$$49 + 14k^2t + k^2t^2 + 45 = k^2t^2 + k^4t^2 + 45 + k^2 \cdot 45$$

$$49 + 14k^2t + 45 = k^2t^2 + k^2 \cdot 45. \quad \blacksquare$$

$$\text{из } \textcircled{1} \quad 4 + 14k^2t = k^2t^2 + 45k^2$$

$$\text{т.е. } \left\{ \begin{array}{l} 4k^2 + 49 = k^2t^2 \\ 8k^2 + 45 = k^2t^2 \end{array} \right. \quad \cancel{k^2} \quad k^2(9 - t^2) = -45$$

$$4 + 14 \left(\frac{-9}{9-t^2} \right) t = \frac{-9}{9-t^2} t^2 + 45 \left(\frac{-9}{9-t^2} \right) \quad \left| \begin{array}{l} t^2 = -\frac{9}{9-t^2} \\ (9-t^2) \end{array} \right.$$

$$4(9-t^2) - 14 \cdot 9t = -9t^2 - 9 \cdot 45.$$

$$36 - 4t^2 - 126t = -9t^2 - 405$$

$$-5t^2 - 126t + 441 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 441 = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4^2 = (21 \cdot 6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 = \\ &= 21^2(6^2 - 4 \cdot 5) = 21^2(36 - 20) = 21^2 \cdot 16 = (21 \cdot 4)^2 = 84^2. \end{aligned}$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

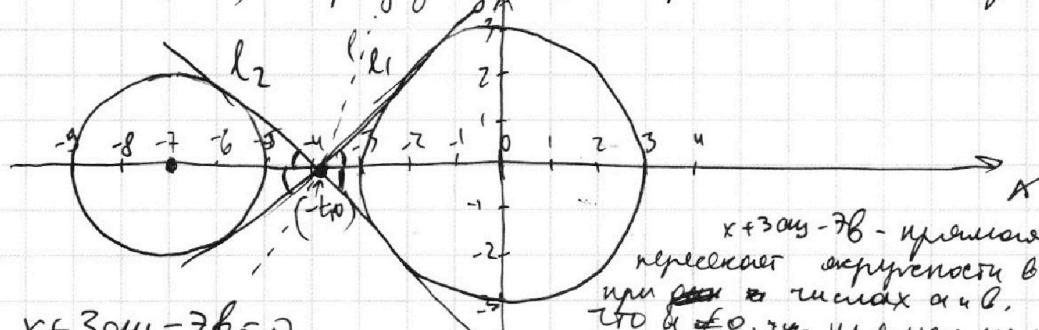
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{н4.} \quad (1 \text{ сп}) \quad \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

Нарисуем графики обеих окружностей: первая
с ц. $(-7; 0)$ и радиусом 2, вторая с ц. $(0; 0)$, радиусом 3.



$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

$x + 3ay - 7b = 0$ - прямая, которая
пересекает окружность в 4 точках
при $a \neq 0$, т.е. прямая не параллельна
оси x и не лежит на ней.

$x + 3ay - 7b = 0$ — для чисел $a \neq 0$ и $b \neq 0$ — уравнение
прямой. При $a = 0$ кот. ф. при $x \neq 0$, т.е. вд. прямой
 $-7b/3a$ заслуживает, в какой точке прямая пересечёт прямую
с радиусом, параллельной оси.

Проверим общие коэф. (внешний) к другим
окружностям. Их симметрии они пересекутся в точке на
оси x , т.е. $(-7; 0)$ $\Rightarrow 0$.

Проверим, принадлежат ли эти точки общим
для l_1 и l_2 — $3a$ и l_2 .

Проверим для l_1 : $x + t - k_1y = 0$ (точка) $\Rightarrow y = \frac{1}{t}x + \frac{k_1}{t}$

и общую y . Оබерните, он описан в прямой
линии l_1 , то прямые l_1 и l_2 пересекутся.

Линия l_1 не является общим радиусом, т.к. l_2 не общим
радиусом, т.к. она не является общим радиусом.

Проверим для l_2 : не является общим радиусом
прямой $x + t - k_2y = 0$ и l_2 не общим радиусом.

Проверим $x + t - k_2y = 0$ и l_2 не общим радиусом.

Проверим $x + t - k_2y = 0$ и l_2 не общим радиусом.

Проверим $x + t - k_2y = 0$ и l_2 не общим радиусом.

Проверим $x + t - k_2y = 0$ и l_2 не общим радиусом.

Проверим $x + t - k_2y = 0$ и l_2 не общим радиусом.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(зад.) №4. $t = \frac{126 \pm 84}{5 \cdot 2}$. Как будет ^{меньше} ~~больше~~

т.ч. что рассмотриваем токсичность -
генических окружных суб. класс-ов (внешних будут зависеть от
изделия)

$$t = \frac{126 - 84}{5 \cdot 2} = \frac{63 - 42}{5} = \frac{21}{5}$$

$$k = -\frac{9}{9-t^2} = \frac{9}{t^2-9} = \frac{9}{(\frac{21}{5})^2-9} = \frac{1}{(\frac{21}{5})^2-1} = \frac{5^2}{7^2-5^2} =$$
$$= \frac{5^2}{2 \cdot 12} = \frac{5^2}{4 \cdot 6}$$

как интересует №п. 1, поэтому $k \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 56} = \frac{5\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

Число k не может лежать с ^{указ.} из условия

$(k; t)$

\Leftrightarrow

$\frac{1}{3a} \in (-\frac{5\sqrt{6}}{12}, \frac{5\sqrt{6}}{12})$

\Leftrightarrow

$\frac{1}{12} < \frac{5\sqrt{6}}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}$

\Leftrightarrow

$\frac{12}{5\sqrt{6}} < a < \frac{12}{5\sqrt{6}}$

\Leftrightarrow

$\frac{12}{5\sqrt{6}} < a < \frac{12}{5\sqrt{6}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a > -\frac{4}{5\sqrt{6}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a > -\frac{4\sqrt{6}}{15} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > \frac{12}{5\sqrt{6}} \\ a > -\frac{12}{5\sqrt{6}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > \frac{12}{5\sqrt{6}} \\ a > -\frac{12}{5\sqrt{6}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > \frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} \\ a > -\frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > \frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} \\ a > -\frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} \end{array} \right.$$

Значит $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$.

Давайте: $\left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$ (кото.)

Заметим, что если ч. приходит ^{указ.} из условия
будет $\geq k$, то она не может пересечь
среди 2 окружности (ан.рис) или 2 ,

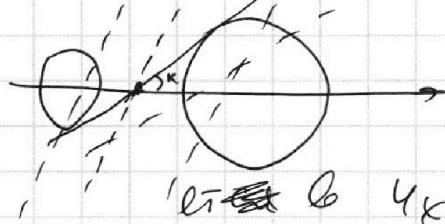


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4 ер.) № 4.
но пасынок сюда.



аналогично, если
линия пасынка $\leq -k$,
то кривая не пересека-
ет l в y_k точках.

Значит, $a \in (-k; k)$.

$$l: y \text{ np. } y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

$$\text{так как } -\frac{1}{3a} \in (-k; k) \Rightarrow -k < -\frac{1}{3a} < k \Rightarrow$$

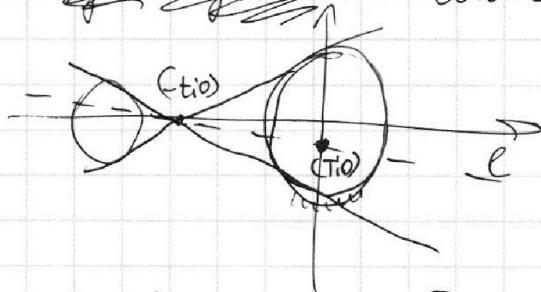
$$\Rightarrow \begin{cases} -k < -\frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3a} < k \end{cases} \quad \begin{cases} k > \frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3a} < a \end{cases} \quad \begin{cases} a > \frac{1}{3k} \\ a > \frac{1}{3k}, \text{ т.е. } a > \frac{1}{3k} \end{cases}$$

$$\text{т.к. } k > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{3k} = \frac{1}{3 \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{1^2}{3 \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{2\sqrt{6}}{15}.$$

т.к. $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$, то $a \neq 0 \Rightarrow$ линия маден.

a существует. $\frac{7b}{3a} = \text{const}$, поэтому мы можем

применить правило $(-t; 0)$
и находим a :



$$l: y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}.$$

Ответ: $\left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$15. \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4 \quad 6x > 0, 7t = 6x. \\ t \neq 1.$$

$$\log_7^4 t - 2 \log_t 7 = \frac{3}{2} \log_t 7 - 4$$

$$\log_7^4 t = 3,5 \log_t 7 - 4$$

$$\log_7^4 t = \frac{3,5}{\log_7 t} - 4 \quad \text{и} \cdot \log_x y \cdot \log_y x = 1.$$

$$\log_7^5 t = 3,5 - 4 \log_7 t \quad (1)$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 7 = \frac{5}{2} \log_7 y - 4.$$

$$\log_7^4 y = -3,5 \log_7 y - 4$$

$$\log_7^5 y = -3,5 - 4 \log_7 y. \quad (2)$$

Система (1) и (2) :

$$\log_7^5 y + \log_7^5 t = -4 (\log_7 t + \log_7 y).$$

$$\log_7^5(yt) = -4 \log_7(yt). \quad \cancel{\text{уравнение}}$$

$$\log_7(yt) \underbrace{(\log_7(yt) + 1)}_{\geq 0, \text{ т.к. } 4 \text{ нечетное}} = 0.$$

$$\log_7(yt) = 0.$$

$$yt = 1.$$

$$t = 6x \Rightarrow 6x \cdot y = 1$$

$$y = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{6}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\log_7(6x)\right)^4 - 2 \log_7(6x) + = \frac{3}{2} \log_7(6x)^2 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - 3,5 \log_7(6x) = -4.$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

$$b \cdot a \log_a b = a$$

$$\cancel{\log_a b} = \cancel{a}$$

$$x \cdot x \cdot x \cdot \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$b \cdot a \log_a b = a$$

$$a = b \log_a b$$

$$b \cdot b \log_b a = a.$$

$$\cancel{b} \cdot \cancel{a}^2 = a$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$a \log_a b = \frac{a}{b} \cdot \log_a b$$

$$a \log_a b = \frac{a}{b} \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \log_a a - \log_a b$$

$$\log_a b + \log_b a = 1$$

$$\log_a c \cdot \log_c b = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

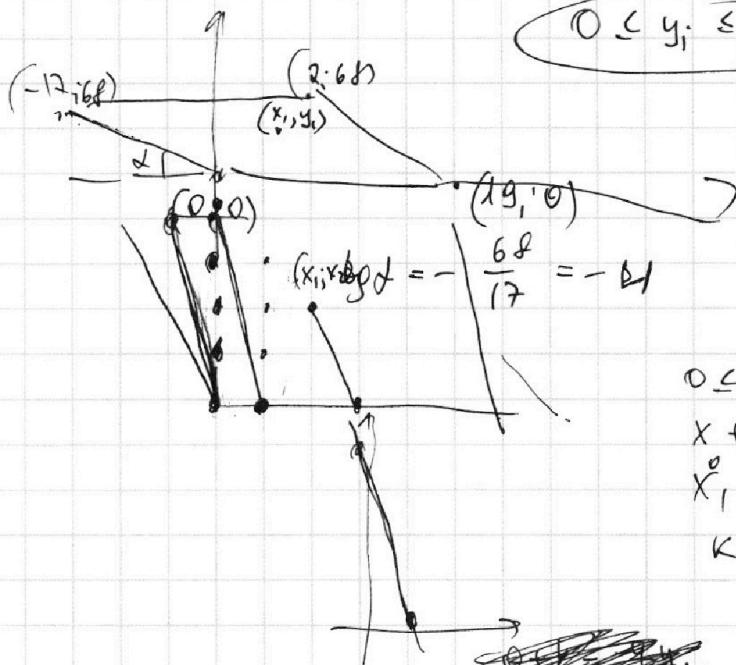
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40.$$

$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40.$$

$$x_2 - x_1 \leq 19.$$

$$0 \leq k \leq 19$$

$$x + k = -4y.$$

$$x_1 + k = -4y_1.$$

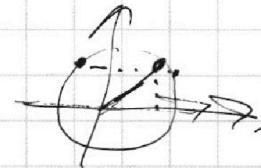
$$k =$$

$$-4. x + 1 = -4y.$$

$$y =$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ 36 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5}. (7 \cdot 3)^2 = 21^2. \\ 126^2 - 9 \cdot 21^2 =$$



$$\sin x = \cos y$$

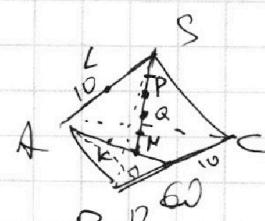
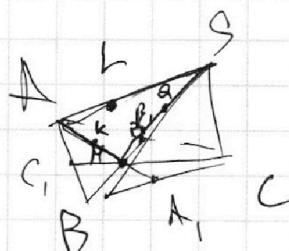
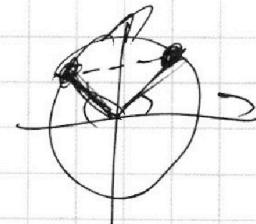
$$4(63^2 - 21^2 \cdot 5) =$$

$$\frac{3\pi}{10}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\right) 4((21 \cdot 3)^2 - 21^2 \cdot 5) =$$

$$= 4 \cdot 21^2 (3^2 - 5) =$$

$$= 4 \cdot 21^2 \cdot 4$$



$$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} = \pi - \frac{5\pi k}{2}/6$$

$$\pi - 10\pi k = 6\pi - 15\pi k. \\ 1 - 10k = 6 - 15k$$

$$\pi k = 5 \\ k = 1.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{(2 сп)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ x = ky - t \end{array} \right. \Rightarrow (ky - t)^2 + y^2 = 9 \\ & y^2(k^2 + 1) - 2kt y + t^2 - 9 = 0 \\ & (\text{решение} \Rightarrow \text{рискр.} = 0 \Rightarrow (2kt)^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0) \\ & (kt)^2 - (t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0 \\ & -t^2 + 8k^2 + 9 = 0 \\ & t^2 = 8k^2 + 9. \end{aligned}$$

аналогично 1 решение y $\left\{ \begin{array}{l} (k+7)^2 + y^2 = 4 \\ y = ky - t \end{array} \right.$

$$(ky - t + 7)^2 + y^2 = 4. \quad y^2(k^2 + 1) - y(2kt - 14k) + t^2 + 7^2 - 4 - 14t = 0.$$

$$D = 0, \text{ т.е. } (2kt - 14k)^2 - 4(t^2 + 14t + 45)(k^2 + 1) = 0 \\ (kt + 7k)^2 - (t^2 + 14t + 45)(k^2 + 1) = 0$$

$$k^2 t^2 + 14k^2 t + 49k^2 - k^2 t^2 - t^2 + 14k^2 t + 14t - 45k^2 - 45 = 0$$

$$4k^2 - t^2 + 14t - 45 = 0 \quad | \cdot 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} 4t^2 = 36k^2 + 36 \\ 36k^2 = 9t^2 + 8 \cdot 14t + 8 \cdot 45 \end{array} \right.$$

$$4t^2 = 9t^2 + 9 \cdot 14t + 9 \cdot 45 + 36$$

$$5t^2 - 9 \cdot 14t + 845 + 36 = 0$$

$$D = (9 \cdot 14)^2 - 4(9 \cdot 45 + 36) = 9 \cdot 4(9 \cdot 7^2 - (45 + 4) \cdot 5) = \\ = 9 \cdot 4t^2 \left(\frac{9 \cdot 5}{2^2 \cdot 5} \right) = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2$$

$$t = \frac{9 \cdot 14 \pm \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2}}{2 \cdot 5}$$

. Используя т.ч. квадратичные корни, т.е. оба эти выражения получим

$$t = \frac{9 \cdot 14 - 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 7 - 3 \cdot 7 \cdot 2}{5} = \frac{63 - 42}{5} = \frac{21}{5} = 4,2.$$

$$9k^2 + 9 = t^2 = (4,2)^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2.$$

$$k^2 + 1 = \left(\frac{21}{5}\right)^2.$$

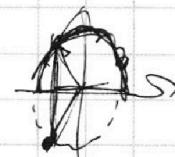
$$k^2 = \frac{7^2 - 5^2}{5^2} = \frac{2 \cdot 12}{5^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6$$

~~когда от $k \neq 0$ и вспоминаешь что подкорень~~

$$\text{значит, } -3a \in \left(-\frac{2}{5}\sqrt{6}; \frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$$

$$a \in \left(-\frac{2}{15}\sqrt{6}; \frac{2}{15}\sqrt{6}\right)$$

Оконч: $a \in \left(-\frac{2}{15}\sqrt{6}; \frac{2}{15}\sqrt{6}\right)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$

1) $x=0$ - решение.

$$\begin{cases} 3ay = 7b \\ (y^2+45)(y^2-9)=0 \\ y=\pm 3 \end{cases}$$

$$\pm 9a = 7b$$

Есть еще 2 решения $\Rightarrow y=0$ тоже реш.

$$\begin{cases} x=7b \\ (x^2+14x+45)(x^2-9)=0 \\ D = 14^2 - 4 \cdot 45 = \frac{1}{4}(7^2 - 45) = 4 \cdot 4 (k+5)(k+9) \end{cases}$$

$$(x+5)(x+9)(x-3)(x+3) = 0 \quad \text{Чтобы } k \text{ не было} \Rightarrow x = ky - t.$$

\Rightarrow 4D-коэффициент.

$$x^2 + 14x + 45 + y^2 - 9 = 0$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 2a^2$$

x



$\alpha \neq 0$. Чертеж

$$x - 7b = -3ay \quad y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

$$bpd = \frac{3}{t}$$

$$x^2 = (t-3)(t+3) \quad t^2 - 14t + 45 = x^2$$

$$y^2 = (t-3)(t+3)$$

$$1 - x^2 \cos^2 \alpha = (xt \cos \alpha - t+3)(t+xt \cos \alpha - 3) \quad -5x \cos \alpha - t^2(x+t \cos \alpha) + 5t +$$

$$+ 8t - 8x \cos \alpha - 45 \quad 1 = 2xt \cos \alpha - 14x \cos \alpha + \frac{t^2 - 14t + 45}{-x^2}$$

$$1 = 2xt \cos \alpha - 14x \cos \alpha - x^2.$$

$$x - 7b = 3ay$$

$$\begin{cases} x-t = ky \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \quad \text{Применение}$$

$$D = \frac{k^2 t^2 - (t^2 - 9)(k^2 + 1)}{-t^2 + 9k^2 + 9} =$$

$$t^2 + 8k^2 + 9.$$

$$(t+ky)^2 + y^2 = 9. \quad 1 \text{ реш} \Rightarrow (ky + t)^2 + y^2 = 9.$$

$$\Rightarrow D = 0. \quad y^2(k^2 + 1) - 2kt y + t^2 - 9 = 0.$$

$$y^2(k^2 + 1) - 2kt y + t^2 - 9 = 0. \quad D = (2kt)^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0.$$

$$D = (2kt)^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0. \quad = 4k^2 t^2 + 4 \cdot 9(k^2 + 1) =$$

$$(kt)^2 - (t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0. \quad = 4((kt)^2 + (3k)^2 + 9^2).$$

$$-t^2 + 8k^2 + 9 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ & d_2 + \beta_2 \geq 7 \\ & d_2 + f_2 \geq 14 \\ & \beta_2 + f_2 \geq 43 \end{aligned}$$

$$\beta_2 = 18$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot 3 \\ b &= 2^3 \cdot 3^5 \\ \bar{c} &= 2^{10} \cdot 3^{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 + \beta_3 &\geq 11 \\ \alpha_3 + f_3 &\geq 17 \\ \beta_3 + f_3 &\geq 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &\geq 14 \\ \beta + f &\geq 18 \\ \alpha + f &\geq 43 \\ 14 + 18 &= 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^2 - 3^2 &= 12^2 - 10^2 \\ 25 - 9 &= 2 \cdot 22 \end{aligned}$$

$$CB \cdot 13 = a \sqrt{13^2 - a^2}$$

$$CD = \frac{a \sqrt{13^2 - a^2}}{13}$$

$$CE = \frac{Ac^2}{CD} = \frac{a^2 \cdot 13}{a \sqrt{13^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{13a}{\sqrt{13^2 - a^2}}$$

$$\begin{aligned} & 2 \geq 43 \\ & d_2 + \beta_2 \geq 17 \\ & \alpha + \beta_2 + f_2 \geq \frac{64}{2} = 32. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 + \beta_2 &= 7 \\ 7 - \beta_2 + f_2 &= 14 \\ \cancel{\beta_2} & \cancel{\beta_2} \end{aligned}$$

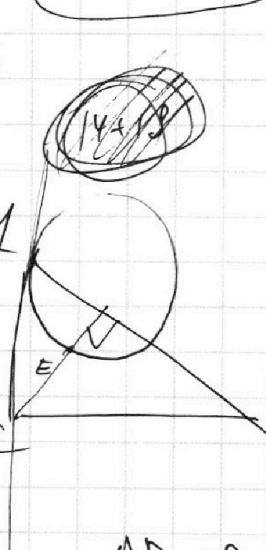
$$\begin{aligned} f_2 - \beta_2 &= 7 \\ \beta_2 + f_2 &= 43 \\ 2f_2 &= 50 \\ f_2 &= 25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta_2 + f_2 &\cancel{=} 19. \\ (1) + (2) + (3) &\leq 38. \\ 27 + 7 &= 34. \end{aligned}$$

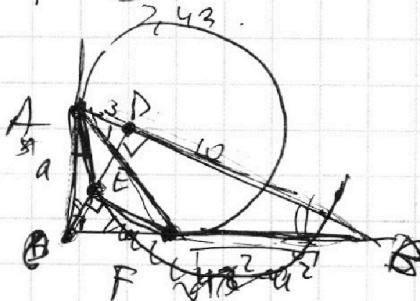
$$\begin{aligned} & 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ & d_2 + \beta_2 \geq 7 \\ & d_2 + f_2 \geq 14 \\ & \beta_2 + f_2 \geq 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 + f_2 &\geq 2\beta_2 \geq 20. \\ d_2 + f_2 + \beta_2 &\geq 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 6 \quad 5 \quad 11 \quad 17 \\ & \alpha_3 + \beta_3 + f_3 \geq \frac{11+17+15+1}{2} = 12 + \frac{32}{2} = 22. \\ & 11+6+5=22 \end{aligned}$$



$$\alpha + \beta + \gamma \geq 32$$



$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

$$\begin{aligned} & \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = ? \\ & \frac{AD^2}{CE^2} \cdot \frac{CD}{EF} = ? \\ & \frac{CD}{CE} \cdot \frac{CE}{EF} = ? \\ & AC^2 = CE \cdot CD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{CE \cdot EF}{EF} = ? \\ & CE = ? \\ & \frac{CE}{EF} = ? \\ & \frac{CE}{EF} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow EF = \frac{CE \cdot DB}{CD} \left(\frac{CD}{CE} \right)^2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_a b \cdot \log_b a$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$$

$$\cancel{a} \cancel{\log_a b} \cancel{b} \\ \cancel{c} \cancel{\log_c a}$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$b = b \text{ (P)}$$

$$\log_a^n b + \log_a^n c = \log_a^n (bc)$$

$$a^{\log_a^n b} \cdot a^{\log_a^n c} = a^{\log_a^n (bc)}$$

$$b^n \cdot c^n = bc^n$$

$$(bc)^n = (bc)^n$$