



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

Обозначим за d_p - степень, в которой число (простое)
 p входит в a ; аналогично β_p - в число b , f_p -
число c .

Тогда 1) $ab : 2^7 \Leftrightarrow 2^{d_2} \cdot 2^{\beta_2} : 2^7 \Leftrightarrow d_2 + \beta_2 \geq 7$.
Аналогично $bc : 2^{13} \Leftrightarrow \beta_2 + f_2 \geq 13$ и
 $ac : 2^{14} \Leftrightarrow d_2 + f_2 \geq 14 \Rightarrow (d_2 + \beta_2) + (\beta_2 + f_2) + (d_2 + f_2) \geq$
 $\geq 7 + 13 + 14 = 34 \Rightarrow d_2 + \beta_2 + f_2 \geq 17$. ■

2) $ab : 3^{11} \Leftrightarrow 3^{d_3} \cdot 3^{\beta_3} : 3^{11} \Leftrightarrow d_3 + \beta_3 \geq 11$. Анало-
гично $bc : 3^{15} \Leftrightarrow \beta_3 + f_3 \geq 15$ и $ac : 3^{17} \Leftrightarrow d_3 + f_3 \geq 17$
 $\Rightarrow (d_3 + \beta_3) + (\beta_3 + f_3) + (d_3 + f_3) \geq 11 + 15 + 17 = 43 \Rightarrow$
 $\Rightarrow d_3 + \beta_3 + f_3 \geq 21,5$. Т.к. d_i, β_i, f_i - целые, то

$d_3 + \beta_3 + f_3 \geq 22$ ■
3) $ab : 5^{14} \Leftrightarrow 5^{d_5} \cdot 5^{\beta_5} : 5^{14} \Leftrightarrow d_5 + \beta_5 \geq 14$. Анало-
~~гично $bc : 5^{43} \Leftrightarrow \beta_5 + f_5 \geq 43$ и $ac : 5^{43} \Leftrightarrow d_5 + f_5 \geq 43$~~
 ~~$\Rightarrow (d_5 + \beta_5) + (\beta_5 + f_5) + (d_5 + f_5) \geq 14 + 43 + 43 = 100 \Rightarrow$~~
 ~~$d_5 + \beta_5 + f_5 \geq 43$~~ ■

Заметим, что $a \geq 2^{d_2} \cdot 3^{d_3} \cdot 5^{d_5}$, $b \geq 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5}$
и $c \geq 2^{f_2} \cdot 3^{f_3} \cdot 5^{f_5}$ (исходя из пр. d_i, β_i, f_i
числа $2^{\dots}, 3^{\dots}, 5^{\dots}$ входят в числа a, b, c)
 $\Rightarrow a \cdot b \cdot c \geq 2^{d_2 + \beta_2 + f_2} \cdot 3^{d_3 + \beta_3 + f_3} \cdot 5^{d_5 + \beta_5 + f_5} =$
 $= 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Воспользуемся тем, что $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$
Пример: $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{24}$, $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$, $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{19}$.
Действительно $abc = 2^{4+3+10} \cdot 3^{6+5+11} \cdot 5^{24+0+19} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$
 $ab = 2^{4+3} \cdot 3^{6+5} \cdot 5^{24} = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{24}$; $bc = 2^{3+10} \cdot 3^{5+11} \cdot 5^{0+19} =$
 $= 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{19}$; $ac = 2^{4+10} \cdot 3^{6+11} \cdot 5^{24+19} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$; $2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

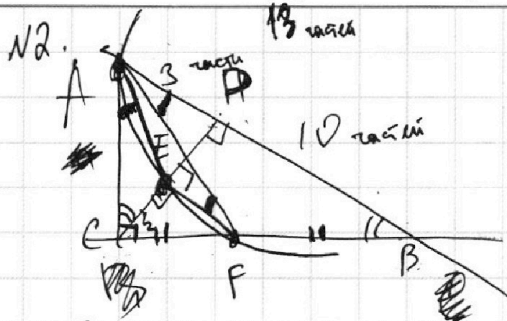
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~CD перпендикуляр AB~~ $\frac{AB}{AD} = \frac{13}{10} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{3}{10}$
 Вспомогательная линия CD
 (это отношение сторон и
 косинусов не является).

~~AC = 3, AB = 10, CD = ...~~

$\angle CAE = \angle EFA$ (угл. между кас-ой и хордой)
 $EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFA = \angle FAB, \Rightarrow \angle FAB = \angle EAC$.

$\angle ACD = 90^\circ, \angle CAD = 90^\circ - \angle CAB = \angle CBA$, т.е. $\angle ACD = \angle CBA$.

значит, $\triangle CEA \sim \triangle BFA$ по двум углам.

$EF \parallel DB \Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 90^\circ. \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$ по двум углам.

$\Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{BF}{BA}$ и $\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow BF = CE \cdot \frac{AB}{AC}, CF = CE \cdot \frac{CB}{CD}$.

по $\triangle ABC: \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin \angle B}$, по $\triangle CDB: \frac{CB}{CD} = \frac{1}{\sin \angle B} \Rightarrow$

$\Rightarrow BF = CE \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{CE}{\sin \angle B} = CE \cdot \frac{CB}{CD} = CF$, т.е. $BF = CF$.

$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DB} = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} CE \cdot EF}{\frac{1}{2} CD \cdot DB} =$
 $= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{EF}{DB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$\frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot DC}{\frac{1}{2} CD \cdot DB} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} : \frac{S_{ACD}}{S_{CDB}} = \frac{1}{4} : \frac{3}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{6}{5}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{arccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x &\Rightarrow \text{arccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \\ \sin x = \cos y &\Rightarrow \text{arccos}(\cos y) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow y = \pm \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin x = \cos \left(\pm \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right) \right) \end{aligned}$$

$$\sin x = \cos \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \right).$$

$$\sin x = \cos \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \right)$$

$$\sin x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \right) \right)$$

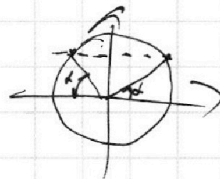
$$\sin x = \sin \left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \right). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2\pi k = \frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \\ x + 2\pi k = \pi - \left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{5} \right) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 2\pi k \\ \frac{4}{5}x = \frac{4\pi}{5} - 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \\ x = \pi - \frac{5\pi k}{2} \end{cases}$$

$$\frac{5\pi}{10} - \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$



$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} \text{ или } x = \pi - \frac{5\pi k}{2}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2 стр.) №4.

Тогда $l_1: y = kx + t_0$
 $l_2: y = -kx + t'_0$

t_0 таковой, что $x = -t$ при $y = 0$, т.е.
 $0 = kx + t_0 \quad t'_0: 0 = -k(-t) + t'_0$
 $0 = -kt + t_0 \quad t'_0 = -kt.$
 $t_0 = kb.$

т.е. $l_1: y = kx + kt$
 $l_2: y = -kx - kt.$

Найдем t, k .

~~уравнение~~
система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = kx + kt \end{cases}$ 1 решение, т.к. 1
линия. точка.

$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ y = kx + kt \end{cases}$ 1 решение аналогично.

$x^2 + (kx + kt)^2 = 9$

$x^2(k^2 + 1) + x(2k^2t) + k^2t^2 - 9 = 0$

1 решение \Rightarrow дискр. = 0. т.е. $(2k^2t)^2 - 4(k^2t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$
 $(k^2t)^2 - (k^2t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$
 $-k^2t^2 + 9k^2 + 9 = 0.$

$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ y = kx + kt \end{cases}$ аналогично $(x+7)^2 + (kx + kt)^2 = 4$

$x^2 + 14x + 49 + k^2x^2 + 2x \cdot k^2t + k^2t^2 - 4 = 0$

$x^2(k^2 + 1) + x(14 + 2k^2t) + k^2t^2 + 45 = 0$

$D = 0, \Rightarrow$ 1 решение $\Rightarrow (14 + 2k^2t)^2 - 4(k^2t^2 + 45)(1 + k^2) = 0$
 $(7 + k^2t)^2 = (k^2t^2 + 45)(1 + k^2)$

$49 + 14k^2t + k^4t^2 = k^2t^2 + k^4t^2 + 45 + k^2 \cdot 45$
 $4 + 14k^2t = k^2t^2 + 45k^2$

т.е. $\begin{cases} 4 + 14k^2t = k^2t^2 + 45k^2 \\ 9k^2 + 9 = k^2t^2 \end{cases}$ ~~$k^2(9 - t^2) = -9$~~

$4 + 14\left(\frac{-9}{9-t^2}\right)t = \frac{-9}{9-t^2}t^2 + 45\left(\frac{-9}{9-t^2}\right) \quad k^2 = \frac{-9}{9-t^2}$

$4(9-t^2) + 14 \cdot 9t = -9t^2 - 9 \cdot 45$

$36 - 4t^2 - 126t = -9t^2 - 405$

$5t^2 - 126t + 441 = 0$

$D = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 441 = 126^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 = (21 \cdot 6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 21^2 =$

$= 21^2(6^2 - 4 \cdot 5) = 21^2(36 - 20) = 21^2 \cdot 16 = (21 \cdot 4)^2 = 84^2.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

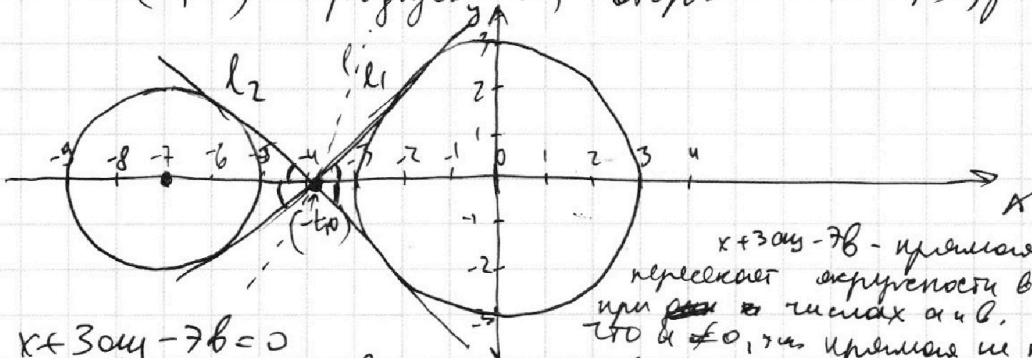


№4
(1 стр)

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

Нарисуем графики обеих окружностей: первая с ц. $(-7; 0)$ и радиусом 2, вторая с ц. $(0; 0)$, рад. 3.



$$\begin{aligned} x + 3ay - 7b &= 0 \\ y &= -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} \end{aligned}$$

$x + 3ay - 7b = 0$ - прямая, которая пересекает окружности в 4 точках при $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Следовательно, что $a \neq 0$, так как прямая не перпендикулярна к оси, иначе было бы только две точки пересечения.

~~$x + 3ay - 7b = 0$~~ - для всех a и b это - уравнение прямой. ~~$\frac{7b}{3a}$~~ коэффициент при x , т.е. tg наклона $-7b/3a$ задает, в какой точке пересечёт прямая с осью наклона оси.

Проверим общие кас-ые (внутренние) к окружностям. Из симметрии они пересекутся в точке на оси абсцисс, т.е. $(-t; 0)$, $t \geq 0$.

возможны: прямая l_1 и касательная l_2 к окружности в z_1 , вторую $-3a l_2$.

~~$x + t = ky$~~ ~~$y = \frac{1}{k}x + t$~~
 ~~$x + t = ky$~~ ~~$t = ky - x$~~ - уравнение прямой и ось y . Проверим, что ортогональны l_1 и l_2 .
 Если какая-то прямая l перпенд. к перпенд. к l_1 и l_2 , то
 $l \perp l_1$, но меньшим или равным, чем l_2 , l не
 может быть, что она не может пересекать
 обе окр. сразу, т.е. не может быть $l \perp l_1$
 прямой l она не такая. Если не такая, то
 будет 4 прямые l_1, l_2, l_3, l_4 и для каждой $l_i: x - z_i = -3ay$
 надо найти t, k .
 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ x + t = ky \end{cases}$ прямые т.е. вып. и окр! точка
 перес.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3 ар.) МН. $t = \frac{126 \pm 84}{5 \cdot 2}$. Нам нужен ~~действительный~~ ^{максимальный}

t , т.к. мы рассматриваем точку пересечения окружностей с осью абсцисс (внешний диаметр радиуса от центра)

$$t = \frac{126 - 84}{5 \cdot 2} = \frac{63 - 42}{5} = \frac{21}{5}$$

$$k^2 = -\frac{9}{9 - t^2} = \frac{9}{t^2 - 9} = \frac{9}{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 9} = \frac{1}{\left(\frac{7}{5}\right)^2 - 1} = \frac{5^2}{7^2 - 5^2}$$

$$= \frac{5^2}{2 \cdot 12} = \frac{5^2}{4 \cdot 6}$$

касательная касается пр. l_1 , поэтому $k > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

уравнение касательной ~~нам требуется~~ ^{у нас} ~~с коэфф. наклона~~

~~$(-k; k) \Rightarrow \frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}, \frac{5\sqrt{6}}{12} \right)$~~

~~$\frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}, \frac{5\sqrt{6}}{12} \right)$~~

~~$-\frac{5\sqrt{6}}{12} < \frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}$~~

~~$\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12}$~~

~~$\frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12}$~~

~~$\begin{cases} a > \frac{12}{3 \cdot 5\sqrt{6}} \\ \frac{1}{a} > -\frac{5\sqrt{6}}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} < 4$~~

~~$a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$~~

~~$a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$~~

~~$a > -\frac{4}{5\sqrt{6}}$~~

~~$a > -\frac{4\sqrt{6}}{5 \cdot 6} = -\frac{2\sqrt{6}}{15}$~~

~~Значит $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$.~~

Ответ: $\left(\frac{2\sqrt{6}}{15}, +\infty \right)$ (коэфф.)

Заметим, что если у прямой угол наклона будет $\geq k$, то она не сможет пересечь сразу 2 окружности (см. рис) или 2,



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

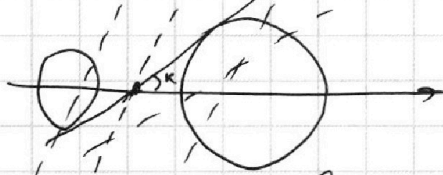
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4 стр.) и ч.
по касательная ~~область~~.



аналогично, если
коэф. угла наклона $\leq -k$,
то прямая не касается
ни ~~в~~ 4х точках.

Значит, коэф. ~~у~~ $d \in (-k; k)$.

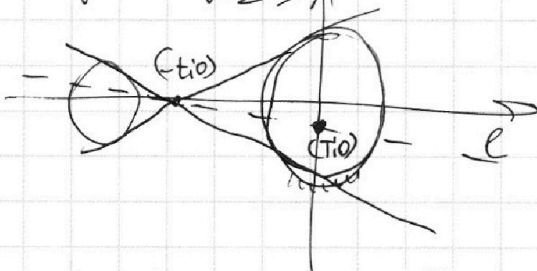
т.е. у нр. $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$

$$\begin{aligned} \text{Условие } -\frac{1}{3a} \in (-k; k) &\Rightarrow -k < -\frac{1}{3a} < k \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} -k < -\frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3a} < k \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} k > \frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3k} < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{3k} \\ a > -\frac{1}{3k} \end{cases}, \text{ т.е. } a > \frac{1}{3k} \\ \text{т.к. } k > 0 &\Rightarrow a > \frac{1}{3k} = \frac{1}{3 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{12}} = \frac{12}{3 \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{2\sqrt{6}}{15}. \end{aligned}$$

т.к. $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$, то $a \neq 0 \Rightarrow$ для любого.

а существ. $\frac{7b}{3a} = \frac{7b}{3a}$, поэтому мы сможем

привести тангенс прямой к виду $(-t; 0)$
с ~~этим~~ ~~этим~~ ~~этим~~ между внутр-кас:



$$l: y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

Ответ: $(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{N5. } \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4 \quad 6x > 0, t = 6x. \\ t \neq 1.$$

$$\log_7^4 t - 2 \log_{\frac{t}{6}} 7 = \frac{3}{2} \log_{\frac{t}{6}} 7 - 4$$

$$\log_7^4 t = 3,5 \log_{\frac{t}{6}} 7 - 4$$

$$\log_7^4 t = \frac{3,5}{\log_7 t} - 4$$

$$\text{и. л. } \log_x y \cdot \log_y x = 1.$$

$$\log_7^5 t = 3,5 - 4 \log_7 t \quad \bullet \quad (1)$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4.$$

$$\log_7^4 y = -3,5 \log_y 7 - 4$$

$$\log_7^5 y = -3,5 - 4 \log_7 y. \quad \bullet \quad (2)$$

Сложим (1) и (2):

$$\log_7^5 y + \log_7^5 t = -4 (\log_7 t + \log_7 y).$$

$$\log_7^5 (yt) = -4 \log_7 (yt). \quad \text{и. л.}$$

$$\log_7 (yt) (\log_7^4 (yt) + 1) = 0.$$

≥ 0 , и. л. ч. не равно

$$\log_7 (yt) = 0.$$

$$yt = 1.$$

$$t = 6x \Rightarrow 6x \cdot y = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\log_7(bx))^4 - 2 \log_7(bx) \cdot 7 = \frac{3}{2} \log_7(bx) \cdot 7 - 4$$

$$\log_7^4(bx) - 3.5 \log_7(bx) \cdot 7 = -4$$

$$\log_7^4 y = -3.5 \log_7 y \cdot 7 - 4$$

$$\log_7^4(t) = \frac{3.5}{\log_7 t} - 4$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$b \cdot a^{\log_b a} = a$$

$$\log_7^5 t = 3.5 - 4 \log_7 t$$

$$\log_7^5 y = -3.5 - 4 \log_7 y$$

$$\log_7^5 t + \log_7^5 y = -4 \log_7(ty)$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$b \cdot a^{\log_b a} = a$$

$$b \cdot b^{\log_b a} = a$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y \cdot 7 = \frac{5}{2} \log_7 y \cdot 7 - 4$$

$$\log_a a = \frac{a}{b} \cdot \log_a b$$

$$\log_a a = \log_a a$$

$$\log_a a = \log_a a - \log_a b$$

$$\log_a a + \log_a b = 1$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_a c - \log_a b = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$$

$$\log_7^5 y = -3.5 - 4 \log_7 y$$

$$\begin{cases} \log_7^4 y = -3.5 \log_7 y \cdot 7 - 4 \\ \log_7^4(t) = 3.5 \log_7 t \cdot 7 - 4 \end{cases}$$

$$\log_y 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 y} = \frac{1}{\log_7 y}$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = \log_a a = 1$$

~~$$\log_{ab} x = c$$~~
~~$$x = ab^c$$~~
~~$$x = a^c b$$~~

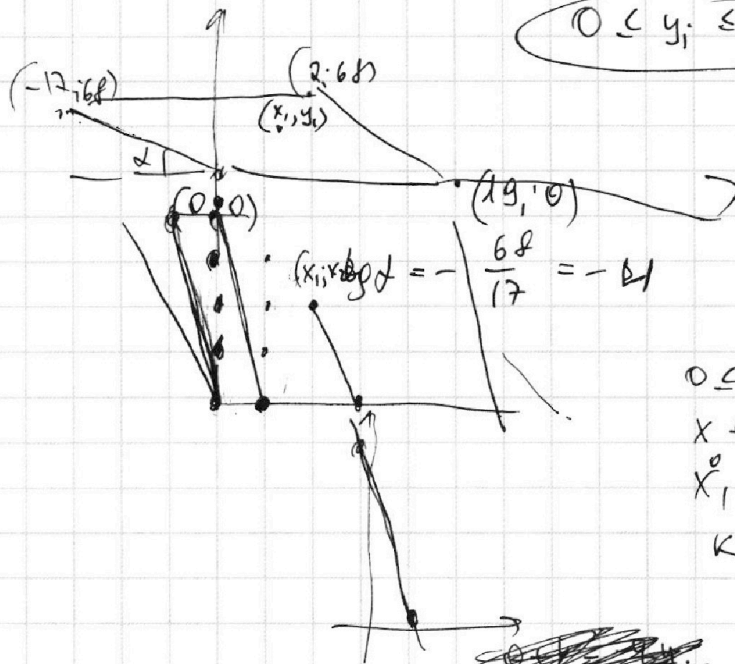
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$0 \leq y_1 \leq 68$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40.$$

$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40.$$

$$x_2 - x_1 \leq 19.$$

$$0 \leq k \leq 19$$

$$x + k = -4y.$$

$$x_1 + k = -4y_1.$$

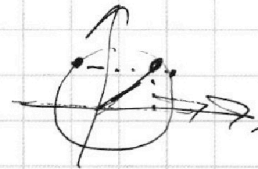
$$k =$$

~~4. x + 1 = -4y.~~

$$y =$$

$$\frac{441}{36} \Big| \frac{9}{49}$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \cdot (7 \cdot 3)^2 = 21^2.$$



$$\sin x = \cos y \quad 4(63^2 - 21^2 \cdot 5) =$$

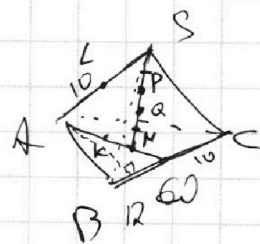
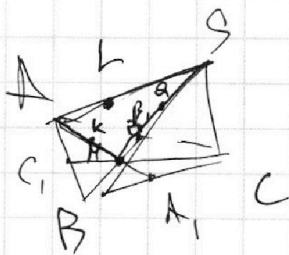
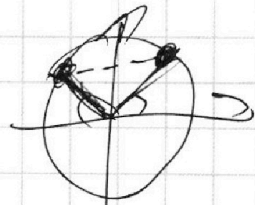
$$y = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \quad = 4 \cdot 96 \cdot 21^2 =$$

$$\frac{3\pi}{10}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) \quad 4((21 \cdot 3)^2 - 21^2 \cdot 5) =$$

$$= 4 \cdot 21^2(3^2 - 5) =$$

$$= 4 \cdot 21^2 \cdot 4$$



$$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} = \pi - \frac{5\pi k}{2} \cdot 6$$

$$\pi - 10\pi k = 6\pi - 15\pi k.$$

$$1 - 10k = 6 - 15k$$

$$5k = 5$$

$$k = 1.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4
(2 оп.)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x = ky - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (ky - t)^2 + y^2 = 9 \\ y^2(k^2 + 1) - 2kty + t^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

решение \Rightarrow дискр. $= 0 \Rightarrow (2kt)^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$
 $(kt)^2 - (t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$
 $-t^2 + 9k^2 + 9 = 0$
 $t^2 = 9k^2 + 9$

аналогично 1 решение y $\begin{cases} (k+7)^2 + y^2 = 4 \\ y = ky - t \end{cases}$

$$(ky - t + 7)^2 + y^2 = 4$$

$$y^2(k^2 + 1) - y(2kt + 14k) + t^2 + 7^2 - 4 + 14t = 0$$

$$D = 0, \text{ т.е. } (2kt + 14k)^2 - 4(t^2 + 14t + 45)(k^2 + 1) = 0$$

$$(kt + 7k)^2 - (t^2 + 14t + 45)(k^2 + 1) = 0$$

$$k^2t^2 + 14k^2t + 49k^2 - k^2t^2 - t^2 + 14k^2t + 14t - 45k^2 - 45 = 0$$

$$4k^2 - t^2 + 14t - 45 = 0$$

значит, $\begin{cases} t^2 = 9k^2 + 9 & | \cdot 4 \\ 4k^2 = t^2 + 14t + 45 & | \cdot 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^2 = 36k^2 + 36 \\ 36k^2 = 9t^2 + 9 \cdot 14t + 9 \cdot 45 \end{cases}$

$$4t^2 = 9t^2 + 9 \cdot 14t + 9 \cdot 45 + 36$$

$$5t^2 + 9 \cdot 14t + 9 \cdot 45 + 36 = 0$$

$$D = (9 \cdot 14)^2 - 4(9 \cdot 45 + 36)(5) = 9 \cdot 4(9 \cdot 7^2 - (45 + 4)(5)) =$$

$$= 9 \cdot 4 \cdot 7^2 (9 - 5) = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2$$

$$t = \frac{9 \cdot 14 \pm \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2}}{2 \cdot 5}$$

корень, т.е. общие касательные - внешние.

$$t = \frac{9 \cdot 14 - 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 7 - 3 \cdot 7 \cdot 2}{5} = \frac{63 - 42}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$$

$$9k^2 + 9 = t^2 = (4,2)^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2$$

$$k^2 + 1 = \left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$$k^2 = \frac{7^2 - 5^2}{5^2} = \frac{2 \cdot 12}{5^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6$$

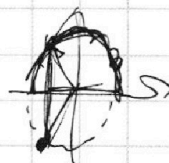
$$k > 0 \Rightarrow k = \frac{2}{5} \sqrt{6}$$

коэф. от т. до к и вектор нормали или нормаль.

$$\text{значит, } -3a \in \left(-\frac{2}{5}\sqrt{6}; \frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$$

$$a \in \left(-\frac{2}{15}\sqrt{6}; \frac{2}{15}\sqrt{6}\right)$$

$$\text{ответ: } a \in \left(-\frac{2}{15}\sqrt{6}; \frac{2}{15}\sqrt{6}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

1) $x = 0$ - решение.

$$\begin{cases} 3ay = 7b \\ (y^2 + 45)(y^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad y = \pm 3 \quad \pm 9a = 7b$$

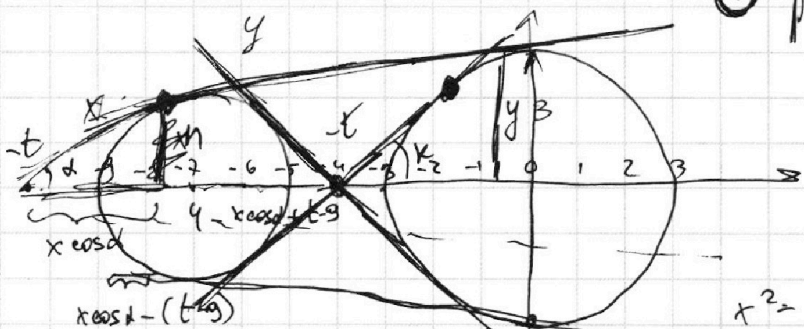
Есть ещё 2 решения $\Rightarrow y = 0$ тоже реш.

$$\begin{cases} x = 7b \\ (x^2 + 14x + 45)(x^2 - 9) = 0 \\ D = 14^2 - 4 \cdot 45 = 4^2(7^2 - 45) = 4 \cdot 4 \cdot (7+5)(7-5) \end{cases}$$

$$(x+5)(x+9)(x-3)(x+3) = 0 \quad \text{4 решения сдв. круга} \rightarrow x = ky - t.$$

\Rightarrow ЧП-кординаты.

$$\begin{cases} x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0 \\ (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$



$a \neq 0$, т.к. прямая не вертикальна

$$\begin{cases} x - 7b = -3ay \\ y = \frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{3}{t} \\ x^2 = (t-9)(t-5) \quad t^2 - 14t + 45 = x^2 \\ y^2 = (t-3)(t+3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 \cos^2 \alpha &= (x \cos \alpha - t \cos \alpha)(t \cos \alpha - x \cos \alpha) \\ &= xt \cos^2 \alpha - x^2 \cos^2 \alpha - 5x \cos \alpha + t^2 + x t \cos \alpha + 5t + 8t - 8x \cos \alpha - 45 \\ &= 2xt \cos \alpha - 14x \cos \alpha + 14t - t^2 - 45 \end{aligned}$$

$$1 = 2xt \cos \alpha - 14x \cos \alpha - x^2.$$

$$x - 7b = 3ay.$$

$$\begin{cases} x - t = ky \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \quad \text{прямая}$$

$$\begin{aligned} D &= kt^2 - (t-9)(kt^2) = \\ &= -t^2 + 9kt^2 + 9 = 0 \\ t^2 + 9k^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$(t+ky)^2 + y^2 = 9. \quad \text{прямая} \Rightarrow (ky + t)^2 + y^2 = 9.$$

$$\Rightarrow D = 0. \quad y^2(k^2 + 1) - 2kty + t^2 - 9 = 0.$$

$$\begin{aligned} y^2(k^2 + 1) - 2kty + t^2 - 9 &= 0. \quad D = (2kt)^2 + 4 \cdot 9(k^2 + 1) = \\ D &= (2kt)^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0. \quad = 4k^2t^2 + 4 \cdot 9k^2 + 4 \cdot 9 = \\ (kt)^2 - (t^2 - 9)(k^2 + 1) &= 0. \quad = 4((kt)^2 + (9k)^2 + 3^2). \\ -t^2 + 9k^2 + 9 &= 0 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{matrix} 2x & 3y & 5z \\ \alpha_2 + \beta_2 & \geq 7 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 & \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 & \geq 43 \end{matrix}$$

$$z \geq 43$$

$$y \geq 17.$$

$$\left| \begin{matrix} \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{64}{2} = 32. \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} \alpha_2 + \beta_2 = 7 \\ 7 - \beta_2 + \gamma_2 = 14 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \gamma_2 - \beta_2 = 7 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 43 \end{matrix} \left| + \right.$$

$$\begin{matrix} 2\gamma_2 = 50 \\ \gamma_2 = 25. \end{matrix}$$

$$\beta_2 = 18$$

$$a = 2 \cdot 4 \cdot 6$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$c = 2 \cdot 10 \cdot 19$$

$$\begin{matrix} 2x & 3y & 5z \\ \alpha_2 + \beta_2 & \geq 7 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 & \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 & \geq 13 \end{matrix}$$

$$\text{или } \alpha + \beta + \gamma \leq 19.$$

$$\text{(20) } (\alpha + \beta) + (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) \leq 38.$$

$$\geq 27 + 7 = 34.$$

$$\frac{AB}{CA} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CD}$$

$$\begin{matrix} \alpha_3 + \beta_3 & \geq 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 & \geq 17 \\ \beta_3 + \gamma_3 & \geq 15. \end{matrix}$$

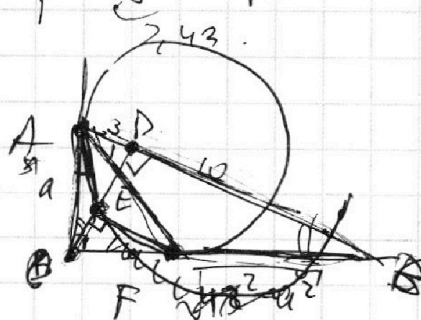
$$\begin{matrix} \alpha_2 + \gamma_2 + 2\beta_2 \geq 20. \\ \alpha_2 + \gamma_2 + \beta_2 + \beta_2 \geq 20. \end{matrix}$$

$$\frac{6}{11} \frac{5}{17} \frac{11}{15} = \frac{17}{2} = 12 + \frac{32}{2} = 22.$$

$$11 + 6 + 5 = 22$$

$$\begin{matrix} \alpha + \beta \geq 14 \\ \beta + \gamma \geq 18 \\ \alpha + \gamma \geq 43 \end{matrix}$$

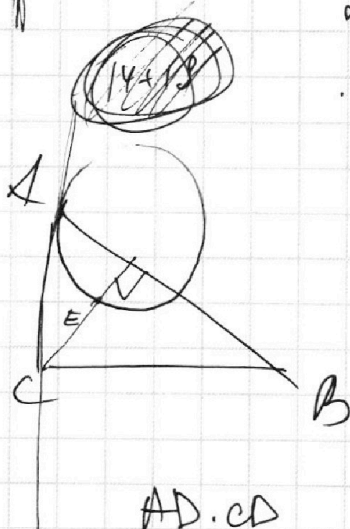
$$\alpha + \beta + \alpha + \gamma + 2\beta \geq 32$$



$$\begin{matrix} 5^2 - 3^2 = 12 \cdot 10 \\ 2 \cdot 2 = 2 \cdot 22 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} CD \cdot CB = a \sqrt{13^2 - a^2} \\ CD = \frac{a \sqrt{13^2 - a^2}}{13} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} CE = \frac{a^2}{CD} = \frac{a^2 \cdot 13}{a \sqrt{13^2 - a^2}} \\ = \frac{13a}{\sqrt{13^2 - a^2}} \end{matrix}$$



$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{CE \cdot EF}{CE \cdot EF}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEP}} = \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{CE \cdot EF}{CE \cdot EF} = 1$$

$$\frac{1}{3} = \frac{13}{10}$$

$$AC^2 = CE \cdot CD$$

$$\frac{CE}{EF} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow EF = \frac{CE \cdot DB}{CD} = \left(\frac{CD}{CE}\right)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_a b \cdot \log_b a$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$$

~~$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$~~

$$a^{\log_a b} = b$$

$$b = b \text{ (✓)}$$

$$\log_a^n b + \log_a^n c = \log_a^n (bc)$$

$$a^{\log_a^n b} \cdot a^{\log_a^n c} = a^{\log_a^n (bc)}$$

$$b^n \cdot c^n = (bc)^n$$

$$(bc)^n = (bc)^n$$