



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

Из условия: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6, \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 16 \end{cases}$ Сложив эти неравенства попарно, то $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$, т.е.

В произведении abc двоек будет хотя бы 18 штук. Записав аналогичную систему для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ получаем, что $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 29,5$, а т.к. $\beta_1 \in \mathbb{Z}, \beta_2 \in \mathbb{Z}, \beta_3 \in \mathbb{Z}$, то

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$.

Для $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ аналогично: $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 26$.

Тогда $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$. Заметим, что это число достигается, если

Заметим, что $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$ (из условия). Тогда

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 28$ (т.к. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0$).

Тогда $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$. Это число достигается. Пример:

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$

$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$

$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{15} = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$c = 2^4 \cdot 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$

$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}; 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

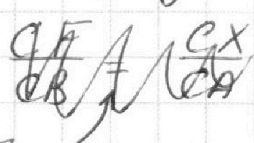
$$\sin \angle ABC = \sqrt{\frac{5}{7}} \quad \sqrt{2} \sin 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$7. \angle ABC = 90^\circ - \angle DCB = \angle ACD$$

$$\frac{XE}{CX} = \sin \angle ACD = \sin \angle ABC = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$XA = \sqrt{\frac{7}{2}} XE \quad (\text{из пункта 5}) \quad XA = \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot CX =$$
$$= \sqrt{\frac{5}{2}} CX.$$

$$= 1 + \frac{XA}{CX} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1.$$



$$\frac{CB}{CF} = \frac{CA}{CX} = \frac{CX + XA}{CX} =$$

т.к. прямые параллельны

8. Коэф. подобия между $\triangle CDA$ и $\triangle BDC$

$$k_1 = \frac{AC}{CB} = \operatorname{tg} \angle ABC = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Коэф. подобия между $\triangle CDB$ и $\triangle CEF$

$$k_2 = \frac{CB}{CF} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1$$

Тогда коэф. подобия между $\triangle CDA$ и $\triangle FEC$

$$k_3 = k_1 k_2 = \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}$$

Тогда отношение их площадей — это $k_3^2 = \frac{5}{2} + \frac{25}{4} +$

$$+ 2\sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{35}{4} + 5\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{35}{4} + 5\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

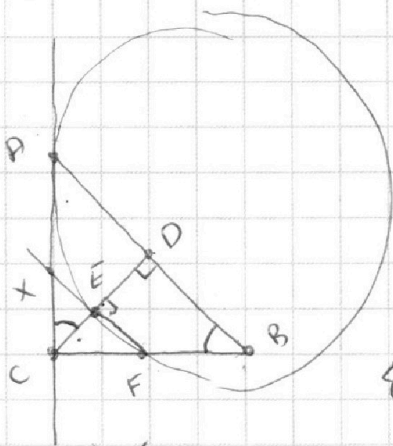
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2. мср 1 ч 2



1. Т.к. $FE \parallel BD$, то $\angle DEF = 90^\circ$.

2. Из св-ств степени точки X:

$$XA^2 = XE \cdot XF \quad (1)$$

3. Заметим, что $\frac{XF}{FE} = \frac{AB}{BD}$, т.к.

$XF \parallel BA$.

$$4. \frac{XF}{XE} = \frac{XE + EF}{XE} = 1 + \frac{EF}{XE}$$

$$\frac{XF}{FE} = \frac{XE + EF}{FE} = \frac{XE}{EF} + 1. \quad \frac{XE}{EF} = 1,4 - 1 = 0,4$$

$$\frac{EF}{XE} = \frac{5}{2} \quad \frac{XF}{XE} = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2} \quad XF = \frac{7}{2} XE$$

5. Подставим в (1) найдем:

$$XA^2 = \frac{7}{2} XE^2 \quad XA = \sqrt{\frac{7}{2}} XE$$

6. Т.к. $\triangle DCA \sim \triangle DBC$, то

$$\frac{DC}{DB} = \frac{CA}{BC} = \frac{AD}{CD} \quad CD^2 = AD \cdot DB$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AD + BD}{BD} = \frac{AD}{BD} + 1 = \frac{7}{5} \quad \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$$

$$CD^2 = AD \cdot \frac{2}{5} \cdot AD \quad CD = \sqrt{\frac{2}{5}} AD$$

$$\frac{CA}{BC} = \frac{AD}{CD} = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{При этом } \frac{CA}{BC} = \frac{CX}{CF}, \text{ т.к. } FE \parallel AB$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{CX \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}{AC} = \frac{CX \sqrt{\frac{2}{5}}}{AX + XC}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2} = \frac{1}{\cos^2 \angle ABC} \quad \cos^2 \angle ABC = \frac{2}{7} \quad \cos \angle ABC = \sqrt{\frac{2}{7}} \quad \text{(все углы острые)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3 (продолжение) лист 2.43.2

$$-10x = 8\pi + 2x \quad -12x = 8\pi \quad x = -\frac{8}{12}\pi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Подходит.

3. $x \in [-2\pi; -\pi]$ Тогда $\arccos \cos x = x + 2\pi$

$$10x + 20\pi = 8\pi + 2x \quad 8x = -12\pi \quad x = -\frac{3}{2}\pi.$$

Подходит.

4. $x \in [-3\pi; -2\pi]$ $\arccos \cos x = -(x + 2\pi)$

$$-10(x + 2\pi) = 8\pi + 2x \quad -12x = 28\pi \quad x = -\frac{28}{12}\pi =$$

5. $x \in [-4\pi; -3\pi]$. $\arccos \cos x = x + 4\pi = -\frac{7}{3}\pi$. Подходит.

$$10(x + 4\pi) = 8\pi + 2x \quad 8x = -32\pi \quad x = -4\pi.$$

Теперь заменим обратно $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x$ на x и получим.

Ответ: ~~$x = -\frac{\pi}{2}$~~ $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, 2\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{9}{2}\pi.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3. см. 1 и 2

Подставим вместо x - $\frac{\sqrt{2}}{2} - x$:

$$10 \arccos \left(\sin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x \right) \right) = 9\pi - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x \right)$$

$$10 \arccos (\cos x) = 8\pi + 2x.$$

Заметим, что $\arccos(\cos x) = x - 2\pi k$, где \arccos возвращает значение $\in [0, \pi]$. Тогда

~~$$8\pi + 2x \in [0, \pi] \Rightarrow 0 \leq 8\pi + 2x \leq \pi$$~~

~~$$-8\pi \leq 2x \leq -7\pi$$~~

~~$$-4\pi \leq x \leq -\frac{7}{2}\pi \quad x \in \left[-4\pi, -\frac{7}{2}\pi\right]$$~~

Заметим, что для таких x $\arccos(\cos x) =$

~~$$= x + 4\pi \quad (\text{ведь } \arccos \text{ возвращает значение } \in [0, \pi])$$~~

Тогда, что $\cos x = \cos(x - 2\pi k) = \cos(x + 2\pi k) = \cos x$, при этом $\cos(x + 2\pi k) =$

$= \cos x$). Решим получившееся уравнение:

~~$$10(x + 4\pi) = 8\pi + 2x$$~~

Тогда:

$$0 \leq 8\pi + 2x \leq 10\pi \quad -8\pi \leq 2x \leq 2\pi$$

$$-4\pi \leq x \leq \pi.$$

Разберём случаи:

1. $x \in [0, \pi]$. Тогда $\arccos \cos x = x$.

$$10x = 8\pi + 2x \quad 8x = 8\pi \quad x = \pi. \text{ Проверим.}$$

2. $x \in [-\pi; 0]$. Тогда $\arccos \cos x = -x$.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

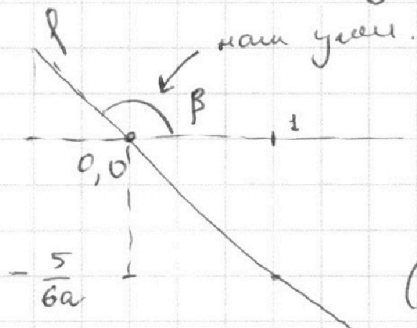
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для парабол касательной очевидно, что $\sqrt{130}$ $\sqrt{32}$ $\sqrt{7}$

$$\operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{130}}{7} \sqrt{\frac{32}{7}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Теперь найдём тангенс угла наклона прямой $5x + 6ay - b = 0$. Сдвиг на zero не влияет, поэтому $b = 0$: $5x + 6ay = 0$.

При $x = 0$, $y = 0$. При $x = 1$, $y = -\frac{5}{6a}$.



$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{5}{6a}$$

Теперь запишем условие на β : ($\beta \in [0, 180^\circ]$):

$\beta < \alpha \Rightarrow 1$. При $\beta < 90^\circ$:

$$\beta > \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha \quad -\frac{5}{6a} > \frac{\sqrt{130}}{7} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a < 0 \Rightarrow -\frac{5}{6} < \frac{\sqrt{130} \cdot 4\sqrt{2}}{7} \cdot a \quad a > -\frac{5 \cdot 7}{6\sqrt{130} \cdot 4\sqrt{2}}$$

и $a < 0$. При $\beta > 90^\circ$ $a > 0$ и необходимо проверить, что $\operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

$$-\frac{5}{6a} < -\frac{\sqrt{130}}{7} \quad \frac{5}{6} > \frac{\sqrt{130}}{7} a \quad a < \frac{5 \cdot 7}{\sqrt{130} \cdot 6 \cdot 4\sqrt{2}}$$

и $a > 0$. При $a = 0$ $\beta = 90^\circ$ и условие выполняется.

~~Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{130}}; +\frac{35}{6\sqrt{130}} \right)$.~~

Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}} \right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

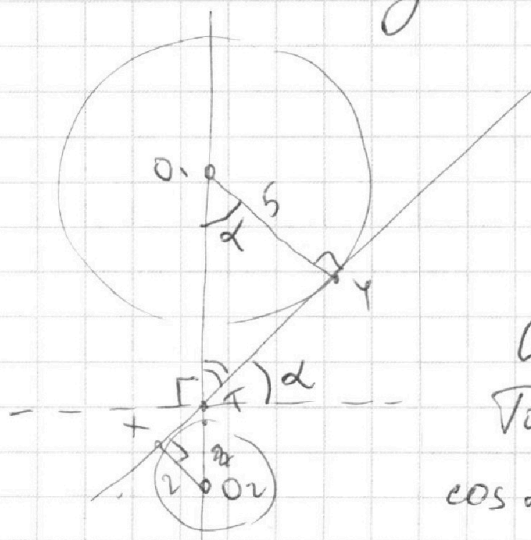
№4 лист 2 из 3

9 и горизонталью (отмечен на рисунке).
 В одну сторону это очевидно. Действительно, если прямая идёт "между" касательными в тех же точках m -та, то и окружности, то очевидно, что есть 4 точки пересечения, а значит и 4 решения (небольше, ведь у прямой и окр. ≤ 2 точек пересечения).

Если же угол между вертикалью и нашей прямой меньше α , то очевидно, что такая прямая не будет пересекать одну из окружностей, ведь она ~~не имеет~~ если эта прямая в точке T , то окр. лежат по разные стороны от неё. Тогда при изменении параметра в (т.е. параллельных прямой) она будет лишь в одной из полуш., а значит не пересекит вторую окр.

Если же угол $= \alpha$, то прямая аналогично предсказываему, но возможен ещё и случай касания двух окр. (тогда корней тоже не 4).

Возвращаем угол α :



Заметим, что $\triangle O_1YT \sim$

$\sim \triangle O_2XT$. Тогда

$$\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{O_1Y}{O_2X} = \frac{5}{2}$$

$$O_1T + O_2T = 9$$

$$\text{Тогда } O_1T = \frac{9}{7} = 5.$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\frac{9 \cdot 7}{7}} = \frac{5}{9}$$

$$\text{Тогда } \tan^2 \alpha = \frac{1}{\frac{49}{81}} - 1 = \frac{81}{49} - 1 = \frac{32}{49}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

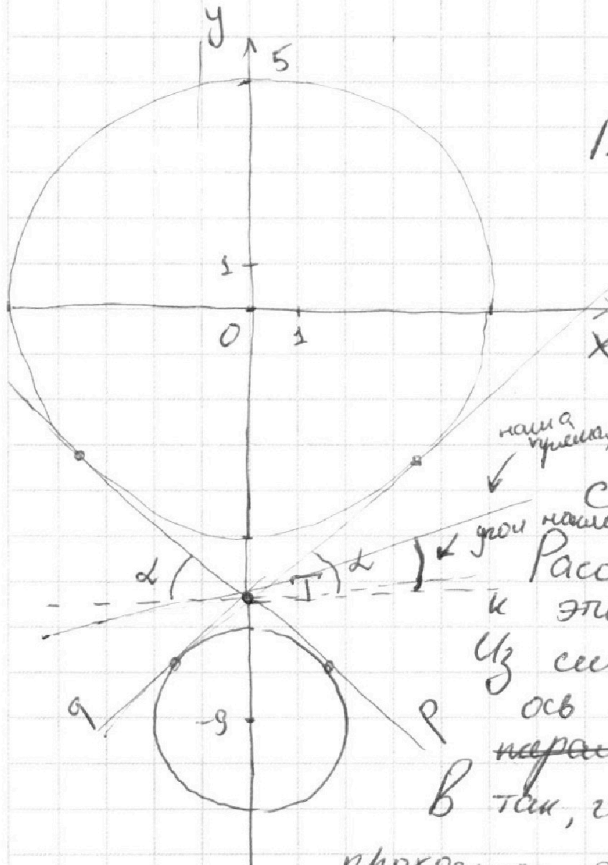


№4. шаг 1 из 3

Из второго уравнения следует, что

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

Это уравнения двух окружностей. Первая с центром в $(0, 0)$ и радиусом 5, вторая с центром в $(0, -9)$ и радиусом 2.



Уравнение $5x + 6ay - b = 0$ - это уравнение прямой.

Параметр a меняет её наклон, а b - сдвигает её вверх или вниз. Таким образом, нужно выяснить, при каких углах наклона прямая может иметь 4 пересечения с этими окр.

Рассмотрим общие касательные к этим окр: p и q .

Из симметрии они обе пересекают ось Oy в точке T . Подберём параметр b так, чтобы прямая $5x + 6ay - b = 0$ проходила через точку T (так можно сделать всегда).

Утв., что есть ровно 4 решения, тогда и только тогда, когда угол между $5x + 6ay - b = 0$ и горизонталью $\in (\alpha, 180 - \alpha)$, где α - угол между горизонталью и p, q .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5. мст 1. из 2.

Заметим $0,5y$ на y :

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x + \dots \\ \log_{11}^4 y + \log_y 11 = \log_{y^3} (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

Т.к. x и y стоят в основании \log , то
 $x, y > 0$, $x, y \neq 1$.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{1}{3} \cdot (-2) \log_x 11 - \log 5.$$

Пусть $\log_{11} x = p$, $\log_{11} y = q$. Получаем:

$$\begin{cases} p^4 - \frac{6}{p} = -\frac{2}{3p} - 5 \\ q^4 + \frac{1}{q} = -\frac{13}{3q} - 5. \end{cases} \quad \begin{matrix} p \text{ и } q \neq 0, \text{ т.к.} \\ x \text{ и } y \neq 1. \end{matrix}$$

Здесь p и $q \neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} p^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5p \\ q^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5q \end{cases} \quad \begin{cases} p^5 + 5p = \frac{16}{3} \quad (1) \\ q^5 + 5q = -\frac{16}{3} \quad (2) \end{cases}$$

Заметим, что все корни $q = (2)$ - это корни (1) ,
взятые с противоположными знаками. При этом

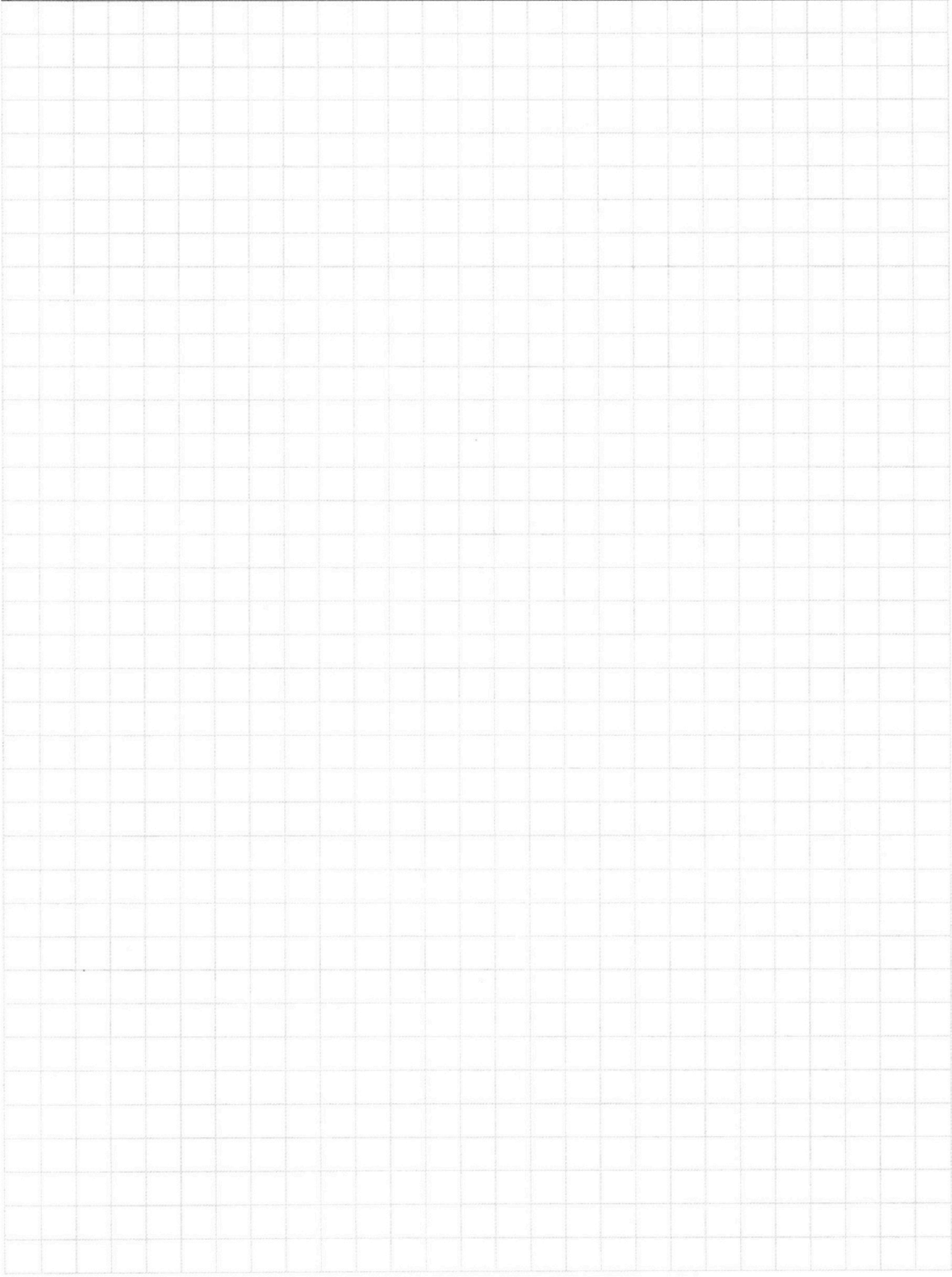
$p+q = \log_{11} x + \log_{11} y = \log_{11} xy$. Таким образом,
задача сводится к нахождению всех возможных значений
 $p+q$. Заметим, что $p^5 + 5p$ - строго возрастает.
Тогда у уравнения (1) - 1 корень. Пусть это
число t . Аналогично у уравнения (2) -
1 корень. Это число $-t$. Но тогда $\log_{11} xy$
 $p+q=0 \Rightarrow \log_{11} xy = 0 \Rightarrow xy = 1$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





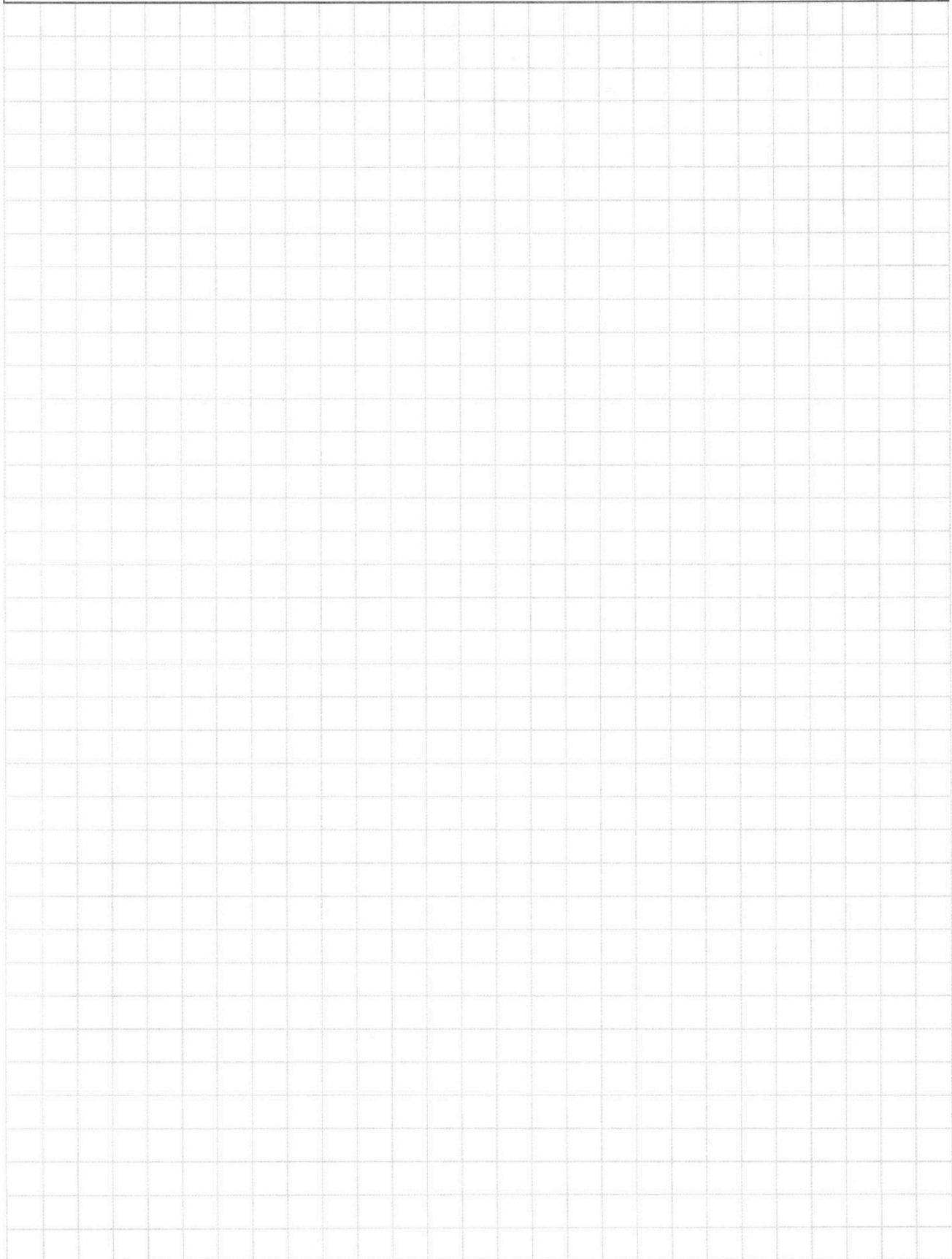
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



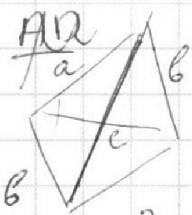
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



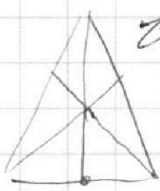
$$a^2 + b^2 + 2(a^2 + b^2 - c^2) =$$

$$= 3a^2 + 3b^2 - 2c^2 \quad (x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 480$$

$$p+q = \log_{11} xy$$



$$CD^2 = AD \cdot BD$$



$$4/2 = a^2 + b^2 - 2 \cos \dots \cdot ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cos \dots \cdot ab$$

$\triangle ACD \sim \triangle CBD$

$$k = \frac{AC}{CB} = \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$$

$$\frac{CX}{XA}$$

$$XA = \sqrt{\frac{12}{7}} XE$$

$$XA^2 = \frac{12}{7} XE^2$$

$$XF = \frac{12}{7} XE$$

$$= \frac{12}{7}$$

$$1,4 \quad \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \quad \frac{5}{7}$$

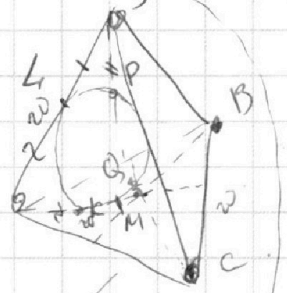
$$= 1 + \frac{EF}{XE} = 1 + \frac{XE}{14} = 1 + \frac{5}{7} =$$

$$\ln a + \ln b = \ln ab$$

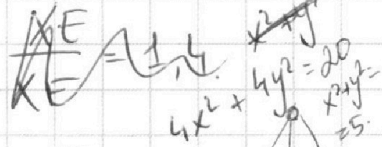
$$e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = e^{\ln ab}$$

$$p^5 + 5p = \frac{16}{3}$$

$$q^5 + 5q = -\frac{16}{3}$$



$$XA^2 = XE \cdot XF$$



$$\frac{XF}{XE} = 1,4$$

$$XA^2 = 1,4$$

$$\frac{XF}{XE} = 1,4$$

$$= XE + XEF$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The work includes:

- Initial calculations: $1+2=11$, $2+3=13$, $3+1=28$, 27 , $3-28$.
- Diophantine equations: $a+b=11$, $b+c=13$, $a+c=28$. Solution: $a=15, b=12, c=1$.
- Sum of divisors: $\Sigma = 26$. $ab \mid 26 \Rightarrow a \mid 26, b \mid 26, ac \mid 28$.
- AM-GM inequality: $abc \geq \sqrt[3]{2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{13+11+28}}$. Simplified to $2^{12} \cdot 3^{19} \cdot 5^{52}$.
- Prime factorization: $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$.
- System of inequalities: $d_1 + d_2 \geq 6$, $d_2 + d_3 \geq 14$, $d_3 + d_1 \geq 16$. Solution: $d_3 = 10, d_2 = 4, d_1 = 4$.
- Diophantine equation: $3p^5 + 15p = 16$. Solution: $p=1$.
- Other calculations: $15+0=11$, $13+0=11$, $15+13=28$, $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

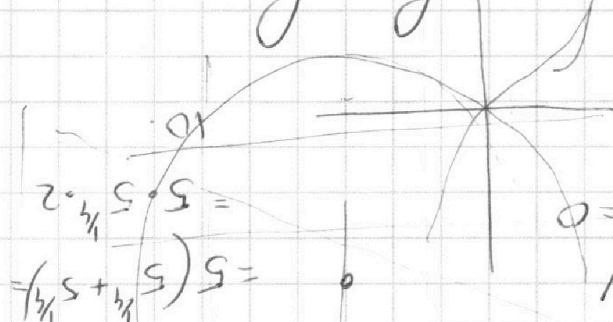


$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

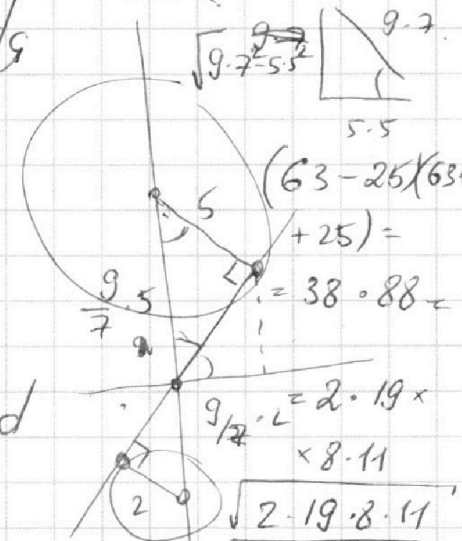
$$x^2 + (y + 9)^2 - 81 + 77 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \cos^2 + \sin^2 &= 1 \\ 1 + \frac{1}{\cos^2} &= \frac{1}{\cos^2} \end{aligned} \quad x^2 + (y + 9)^2 = 4$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \cdot \frac{9 \cdot 7}{5} \\ \frac{9}{7} \cos^2 x + 1 &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

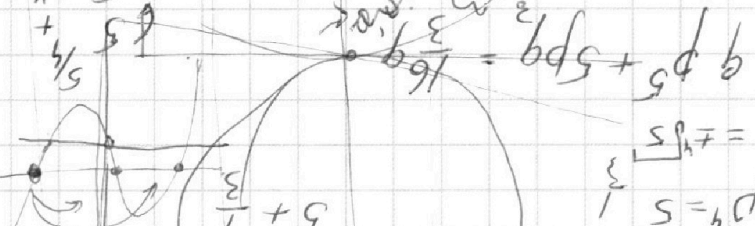


$$\begin{aligned} 5p + 5 &= d \\ 1 &= d \end{aligned}$$



$$\frac{1}{16} \left(\frac{3}{5} + 5 \right) \left(\frac{3}{5} - 5 \right) = \frac{1}{16} (p+q) \left(\frac{3}{5} - 5 \right) = \frac{1}{16} (p+q) \left(\frac{3}{5} - 5 \right)$$

$$\begin{aligned} (63 - 25)(63 + 25) &= 38 \cdot 88 \\ &= 2 \cdot 19 \cdot 8 \cdot 11 \\ &= \sqrt{2 \cdot 19 \cdot 8 \cdot 11} \end{aligned}$$

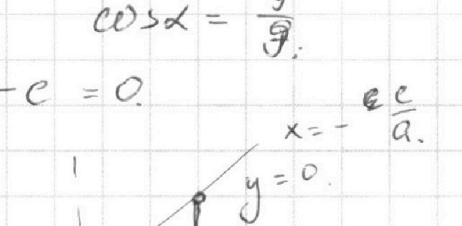


$$\begin{aligned} \sin 80^\circ - \alpha &= \frac{9}{7} \\ \frac{9}{7} \cdot 5 &= \frac{9}{7} \\ \cos \alpha &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2 - 5p + 5 &= 0 \\ p^2 - 5p + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{c}{a} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 25 - ax - by - c = 0$$



$$\begin{aligned} \frac{3}{91} &= \frac{3}{91} \\ \frac{3}{16} &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} by + c &= 0 \\ a, b, c, y &= -\frac{c}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2 - 5p - \frac{3}{2} &= 9 - d \\ d &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~arccos~~
 $\log_y \cdot \log_x = 1$
 $\log_x y = 1$

$\arccos(\sin x)$ $\frac{9 \cdot 5}{2}$
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\alpha = \arccos(\sin x)$
 $\cos \alpha = \sin x$
 $\sin \alpha = \frac{BD}{CB}$
 $\frac{CA}{CF} = \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$

$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$

$\arccos x$ $\arcsin x$
 $\frac{\pi}{2} - x$
 $\sin(90^\circ - x) = \cos x$

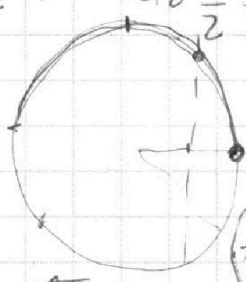
$10 \arccos(\cos x) = 9\pi - \pi + 2x$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$

$10x = 8\pi + 2x$

$CD = \frac{t}{2} BD$

$CD^2 = \frac{t}{2} BD^2$



$\frac{t}{2} = \frac{BD}{AD}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{6}\pi$

$\frac{AD}{BD} + 1 = \frac{5}{2} = \frac{EF}{EF}$

$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CB} = \frac{AD}{CD}$

$\frac{AD+DB}{BD} = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{AD}$

$\log^3 x - 6 \log x + 11 = 3 \log x + 11 - 5$

$\log^5 x - 0.5y$