МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть $a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3}\cdot \cancel{3^{\beta_3}} \times 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}$

Из условия: (т.к. $ab \vdots 2^6, \dots$) $\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 6, \\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_3+\alpha_1 \geq 16 \end{cases}$ Сложив эти нер-ва получаем, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 18$, т.е. в произведение abc двойка входит хотя бы в 18 степени.

Записав аналогичную систему для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ получаем, что $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 29{,}5$, а т.к. $\beta_1 \in \mathbb{Z}, \beta_2 \in \mathbb{Z}, \beta_3 \in \mathbb{Z}$, то $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 30$.

~~Для $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ аналогично: $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 26$.~~

~~Тогда $abc \geq 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$. Заметим, что это число достигается, ведь $a = 2^4\cdot 3^9\cdot 5$; $b =$~~

Заметим, что $\gamma_1+\gamma_3 \geq 28$ (из условия). Тогда

$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 28$ (т.к. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0$).

Тогда $abc \geq 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$. Это число достигается. Пример:

$a = 2^4\cdot 3^9\cdot 5^{13}$ $\quad ab = 2^6\cdot 3^{13}\cdot 5^{13} \vdots 2^6\cdot 3^{13}\cdot 5^{11}$

$b = 2^2\cdot 3^4\cdot 5^0$ $\quad bc = 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{15} \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{13}$

$c = \cancel{2^4}\cdot 2^{12}\cdot 3^{17}\cdot 5^{15}$ $\quad ac = 2^{16}\cdot 3^{26}\cdot 5^{28} \vdots 2^{16}\cdot 3^{25}\cdot 5^{28}$

Ответ: $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sin\angle ABC = \sqrt{\frac{5}{7}}$ №2 лист 2 из 2.

7. $\angle ABC = 90 - \angle DCB = \angle ACD$

$$\frac{XE}{CX} = \sin\angle ACD = \sin\angle ABC = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

$XA = \sqrt{\frac{7}{2}}\, XE$ (из пункта 5) $XA = \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot CX =$

$= \sqrt{\frac{5}{2}}\, CX.$ $\cancel{\frac{CA}{CB}} \cancel{=} \cancel{\frac{CX}{CA}}$ $\frac{CB}{CF} = \frac{CA}{CX} = \frac{CX+XA}{CX} =$

т.к. прямые пар-ны

$= 1 + \frac{XA}{CX} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1.$

8. Коэф. подобия между $\triangle CDA$ и $\triangle BDC$

$$k_1 = \frac{AC}{CB} = tg\angle ABC = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Коэф. подобия между $\triangle CDB$ и $\triangle CEF$

$$k_2 = \frac{CB}{CF} = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1$$

Тогда коэф. подобия между $\triangle CDA$ и $\triangle FEC$

$$k_3 = k_1 k_2 = \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}.$$

Тогда отношение их площадей – это $k_3^2 = \frac{5}{2} + \frac{25}{4} +$

$+ 2\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{4} + 5\sqrt{\frac{5}{2}}.$

Ответ: $\frac{35}{4} + 5\sqrt{\frac{5}{2}}.$

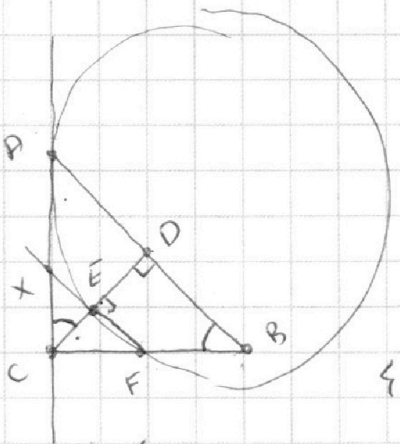
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2. лист 1 из 2



1. Т.к. $FE \parallel BD$, то $\angle DEF = 90^\circ$.

2. Из св-ств степени точки X:

$XA^2 = XE \cdot XF$. (1)

3. Заметим, что $\dfrac{XF}{FE} = \dfrac{AB}{BD}$, т.к. $XF \parallel BA$.

4. $\dfrac{XF}{XE} = \dfrac{XE+EF}{XE} = 1 + \dfrac{EF}{XE}$ ~~при~~

$\cancel{XE}$ $\dfrac{XF}{FE} = \dfrac{XE+EF}{FE} = \dfrac{XE}{EF} + 1$. $\dfrac{XE}{EF} = 1{,}4 - 1 = 0{,}4$

$\dfrac{EF}{XE} = \dfrac{5}{2}$ $\dfrac{XF}{XE} = \dfrac{5}{2} + 1 = \dfrac{7}{2}$. $XF = \dfrac{7}{2}XE$

5. Подставим в (1) получаем:

$XA^2 = \dfrac{7}{2}XE^2$ $XA = \sqrt{\dfrac{7}{2}}XE$.

6. Т.к. $\triangle DCA \sim \triangle DBC$, то

$\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{CA}{BC} = \dfrac{AD}{CD}$ $CD^2 = AD \cdot DB$

$\cancel{\dfrac{AD}{BD}}$ $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AD+BD}{BD} = \dfrac{AD}{BD} + 1 = \dfrac{7}{5}$ $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{2}{5}$.

$CD^2 = AD \cdot \dfrac{2}{5} \cdot AD$ $CD = \sqrt{\dfrac{2}{5}}AD$

$\dfrac{CA}{BC} = \dfrac{AD}{CD} = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ При этом $\dfrac{CA}{BC} = \dfrac{CX}{CF}$, т.к. $FE \parallel AB$

$\dfrac{CF}{AC} = \dfrac{CX \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}{AC} = \dfrac{CX\sqrt{2/5}}{AX+XC}$

$\dfrac{AC}{BC} = tg\angle ABC = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ $tg^2\angle ABC + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\angle ABC}$

$\dfrac{5}{2} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\angle ABC}$ $\cos^2\angle ABC = 2/7$ $\cos\angle ABC = \sqrt{2/7}$ (все углы острые)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 (продолжение) лист 2.4 з 2

$-10x = 8\pi + 2x \quad -12x = 8\pi \quad x = -\frac{8}{12}\pi = -\frac{2}{3}\pi.$

Подходит.

3. $x \in [-2\pi; -\pi]$. Тогда $\arccos \cos x = x + 2\pi$

$10x + 20\pi = 8\pi + 2x \quad 8x = -12\pi \quad x = -\frac{3}{2}\pi.$

Подходит.

4. $x \in [-3\pi; -2\pi] \quad \arccos \cos x = -(x + 2\pi)$

$-10(x + 2\pi) = 8\pi + 2x \quad -12x = 28\pi \quad x = -\frac{28}{12}\pi =$

$= -\frac{7}{3}\pi$. Подходит.

5. $x \in [-4\pi; -3\pi]$. $\arccos \cos x = x + 4\pi$

$10(x + 4\pi) = 8\pi + 2x \quad 8x = -32\pi \quad x = -4\pi.$

Подходит.

Теперь заменим обратно ~~x~~ $\frac{\pi}{2} - x$ на x и получим:

Ответ: ~~x~~ $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, 2\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{9}{2}\pi.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3. лист 1 из 2

Подставим вместо x — $\frac{\pi}{2}-x$:

$$10\arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = 9\pi - 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$10\arccos(\cos x) = 8\pi + 2x.$$

Заметим, что ~~$\arccos(\cos x) = x - 2\pi k$~~, где $\arccos$ возвращает значения $\in [0, \pi]$. Тогда

~~$8\pi+2x \in$ $0 \le 8\pi + 2x \le \pi$~~

~~$-8\pi \le 2x \le -7\pi$~~

~~$-4\pi \le x \le -\frac{7}{2}\pi$ $x \in \left[-4\pi, -\frac{7}{2}\pi\right]$~~

~~Заметим, что для таких x $\arccos(\cos x) =$ $= x + 4\pi$ (ведь $\arccos$ возвращает значение $\alpha \in [0, \pi]$ такое, что $\cos x = \cos x =$ $\cos\alpha = x$, при этом $\cos(x+2\pi k) = \cos x$)). Решим получившееся уравнение:~~

~~$10(x+$~~

Тогда:

$$0 \le 8\pi + 2x \le 10\pi \qquad -8\pi \le 2x \le 2\pi$$

$$-4\pi \le x \le \pi.$$

Разберём случаи:

1. $x \in [0, \pi]$. Тогда $\arccos\cos x = x$.

$10x = 8\pi + 2x \qquad 8x = 8\pi \qquad x = \pi$. Подходит.

2. $x \in [-\pi; 0]$. Тогда $\arccos\cos x = -x$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

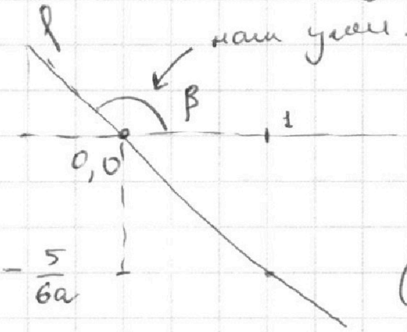
МФТИ

Для параллельной касательной очевидно, что №4 лист 3 из 3

$tg\alpha > 0 \Rightarrow tg\alpha = \cancel{\frac{\sqrt{130}}{7}}\ \sqrt{\frac{32}{7}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

Теперь найдём тангенс угла наклона прямой $5x+6ay-b=0$. Сдвиг на него не влияет, поэтому $b=0$: $5x+6ay=0$.

При $x=0$, $y=0$. При $x=1$, $y=-\frac{5}{6a}$.



$tg\,\beta = -\frac{5}{6a}$

Теперь запишем условия на β: $(\beta \in [0, 180^\circ))$:

~~$\beta > \alpha \Rightarrow$~~ 1. При $\beta < 90^\circ$:

$\beta > \alpha \Rightarrow tg\beta > tg\alpha \quad -\frac{5}{6a} > \frac{\cancel{\sqrt{130}}\ 4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow a < 0 \Rightarrow -\frac{5}{6} < \frac{\cancel{\sqrt{130}}\ 4\sqrt{2}}{7}\cdot a \quad a > -\frac{5\cdot 7}{6\cancel{\sqrt{130}}\cdot 4\sqrt{2}}$

и $a<0$. При $\beta > 90$ $a>0$ и необходимо проверить, что $tg\beta < tg(180-\alpha) = -tg\alpha$

$-\frac{5}{6a} < -\frac{\cancel{\sqrt{130}}\ 4\sqrt{2}}{7} \quad \frac{5}{6} > \frac{\cancel{\sqrt{130}}\ 4\sqrt{2}}{7}a \quad a < \frac{5\cdot 7}{\cancel{\sqrt{130}}\ 4\sqrt{2}\cdot 6}$

и $a>0$. При $a=0$ $\beta=90^\circ$ и условие выполняется.

~~Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{130}}; +\frac{35}{6\sqrt{130}}\right)$.~~

Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$

№4 лист 2 из 3

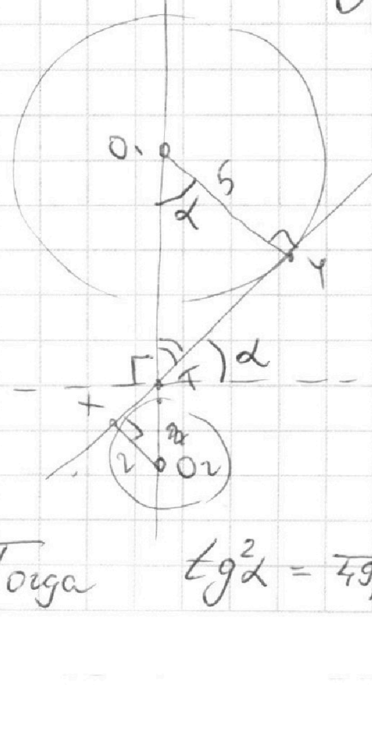
g и горизонталью (отмечен на рисунке).

В одну сторону это очевидно. Действительно, если прямая идёт "между" касательными в тех же частях пл-ти, что и окружности, то очевидно, что есть 4 точки пересечения, а значит и 4 решения (не больше, ведь у прямой и окр ≤ 2 точек пересечения).

Если же угол между вертикалью и нашей прямой меньше α, то очевидно, что наша прямая не будет пересекать одну из окружностей, ведь ~~она не может~~ если эта прямая в точке T, то окр. лежат по разные полуплоскости от неё. Тогда при изменении параметра b (т.е. пар-ном сдвиге прямой) она будет лишь в одной из полупл., а значит не пересечёт вторую окр.

Если же угол $= \alpha$, то ~~прям~~ аналогично предыдущему, но возможен ещё и случай касания двух окр. (тогда корней тоже не 4).

Вычислим угол α:



Заметим, что $\triangle O_1YT \sim \triangle O_2XT$. Тогда

$$\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{O_1Y}{O_2X} = \frac{5}{2}$$

$$O_1T + O_2T = 9$$

Тогда $O_1T = \frac{9}{7} \cdot 5$.

$$\cos\alpha = \frac{5}{\frac{9}{7}\cdot 5} = \frac{7}{9}.$$

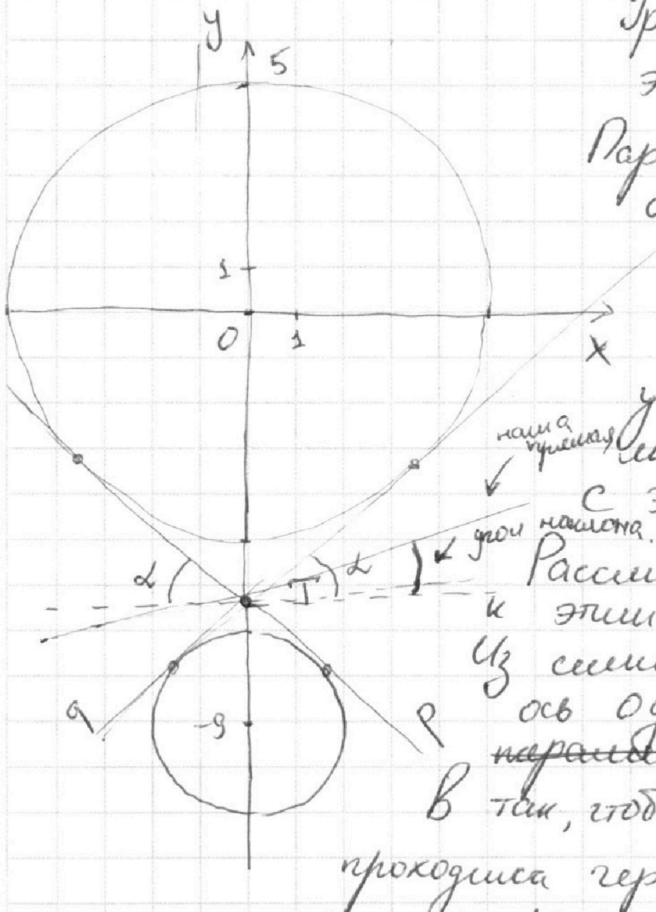
Тогда $tg^2\alpha = \frac{1}{49/81} - 1 = \frac{81}{49} - 1 = \frac{32}{49}.$

№4. лист 1 из 3

Из второго уравнения следует, что

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2-25=0 \\ x^2+y^2+18y+77=0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=5^2 \\ x^2+(y+9)^2=2^2 \end{array}\right.$$

Это уравнения двух окружностей. Первая с центром в $(0,0)$ и радиусом 5, вторая с центром в $(0,-9)$ и радиусом 2.



Уравнение $5x+6ay-b=0$ — это ур-ние прямой. Параметр a меняет её наклон, а b — сдвигает её вверх или вниз. Таким образом, нужно выяснить, при каких углах наклона прямой она может иметь 4 пересечения с этими окр.

Рассмотрим общие касательные к этим окр: p и q. Из симметрии они обе пересекают ось Oy в точке T. ~~Подберём параметр~~ Зафиксируем параметр b так, чтобы прямая $5x+6ay-b=0$ проходила через точку T (так можно сделать всегда). Утв., что есть ровно 4 решения, тогда и только тогда, когда угол между $5x+6ay-b=0$ и горизонталью $\in(\alpha, 180-\alpha)$ ~~$\in(\alpha, 180-\alpha)$~~, где α — угол между ~~горизонталью и p, q~~.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 лист 2 из 2

Заметим, что такое произведение достигается. Действительно, очевидно, что $t \neq 0 \Rightarrow$ числа $x = 11^t$ и $y = 11^{-t}$ подходят. и $(x, y > 0;\ x, y \neq 1)$

$xy = 1.$

Ответ: $\underline{1}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5. лист 1 из 2.

Заменим $0{,}5y$ на y:

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x + \ldots \\ \log_{11}^4 y + \log_y 11 = \log_{y^3}(11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

Т.к. x и y стоят в основании $\log$, то $x, y > 0$, $x, y \neq 1$.

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \cancel{2}\ \frac{1}{3}\cdot(-2)\log_x 11 - \cancel{\log}\ 5.$$

Пусть $\log_{11} x = p$, $\log_{11} y = q$. Получим:

$$\begin{cases} p^4 - \frac{6}{p} = -\frac{2}{3p} - 5 \\ q^4 + \frac{1}{q} = -\frac{13}{3q} - 5. \end{cases}$$

p и $q \neq 0$, т.к. x и $y \neq 1$.

~~Пусть p и $q \neq 0$. Тогда~~

$$\begin{cases} p^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5p \\ q^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5q \end{cases} \qquad \begin{cases} p^5 + 5p = \frac{16}{3} \quad (1) \\ q^5 + 5q = -\frac{16}{3} \quad (2) \end{cases}$$

Заметим, что все корни ~~q~~ (2) — это корни (1), взятые с противоположным знаком. При этом

$p + q = \log_{11} x + \log_{11} y = \log_{11} xy$. Таким образом, задача сводится к нахождению всех возможных значений $p+q$. Заметим, что $p^5 + 5p$ — строго возрастает. Тогда у уравнения (1) — 1 корень. Пусть это число t. Аналогично у уравнения (2) — 1 корень. Это число $-t$. Но тогда ~~$\log_{11} xy$~~

$p + q = 0 \Rightarrow \log_{11} xy = 0 \Rightarrow xy = 1.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a^2+b^2+2(a^2+b^2-c^2)=$

$=\sqrt{3a^2+3b^2-2c^2}$

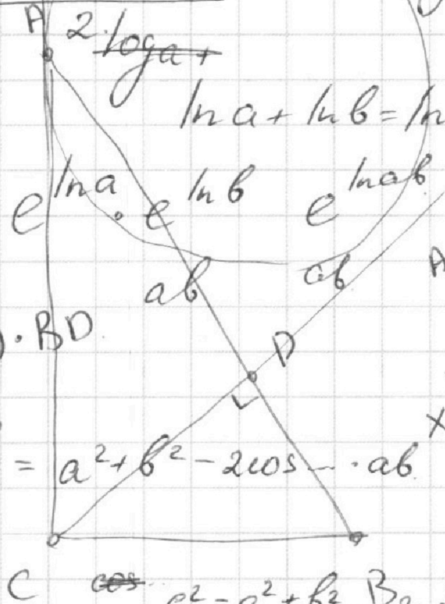
$(x_2-x_1)+y_2-y_1=480$

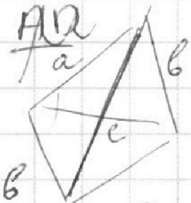
$p+q=\log_{11}x+y$

$\ln a+\ln b=\ln ab$

$e^{\ln a}\cdot e^{\ln b}\quad e^{\ln ab}$

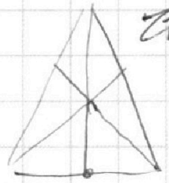
$ab\quad ab$





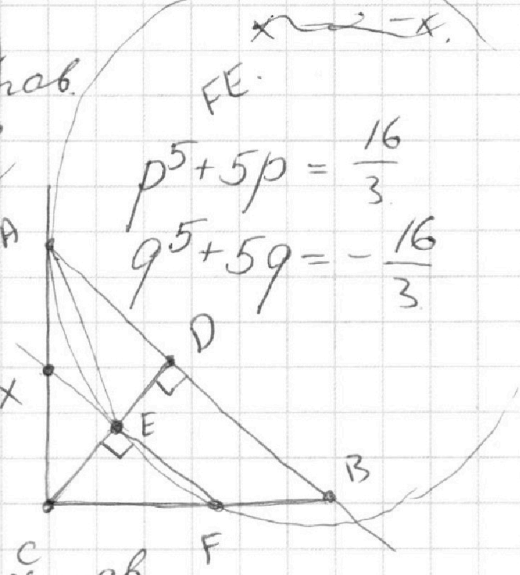
$CD^2=AD\cdot BD$

$4l^2=a^2+b^2-2\cos\ldots\cdot ab$



$p^5+5p=\frac{16}{3}$

$q^5+5q=-\frac{16}{3}$

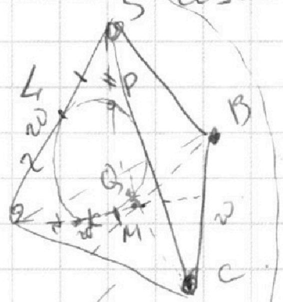


$c^2=a^2+b^2-2\cos\ldots ab$

$\triangle ACD\sim\triangle CBD$

$\cos\ldots=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$k=\frac{AC}{CB}=\frac{CD}{BD}=\frac{AD}{CD}$



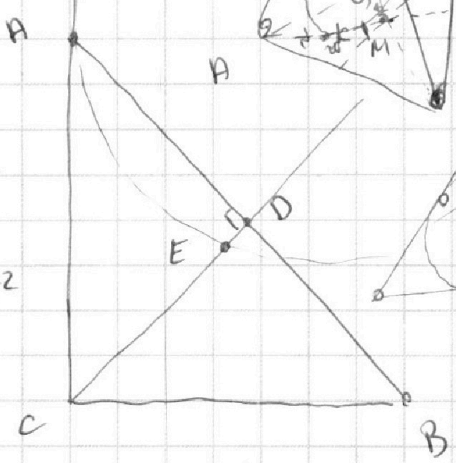
$XA^2=XE\cdot XF$

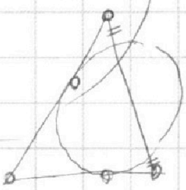
$\frac{CX}{XA}$

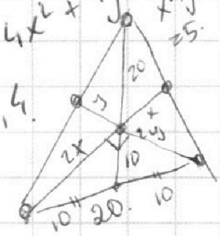
$\frac{XE}{KE}=1{,}4$

$4x^2+4y^2=20$

$x^2+y^2=5$







$XA=\sqrt{\frac{12}{7}}XE$

$\frac{XF}{XE}=1{,}4$

FE

$XA^2=\frac{12}{7}XE^2$

$XF=\frac{12}{7}XE$

$9xy$

$\frac{XF}{XE}=$

$1{,}4\quad\frac{14}{10}=\frac{7}{5}\quad\frac{5}{7}$

$=\frac{XE+EF}{XE}=$

$=\frac{12}{7}$

$=1+\frac{EF}{XE}=1+\frac{1}{1{,}4}=1+\frac{5}{7}=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2^6\ 3^{13}\ 5^{11}$

$\frac{11+13+28}{2} = 14+12 = 26$

$1+2 - 11$

$2+3 - 13$

$3+1 - 28$

$\Sigma = 26 \quad ab \geq \quad bc \geq \quad ac \geq$

$34+25=59 \qquad 24+28=52$

$abc \geq \sqrt[3]{2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{13+11+28}} = \sqrt[3]{2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}} = 2^{12} \cdot 3^{19}$

$tg^2 = \frac{1}{\cos^2} - 1$

$\geq 2^{16} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28}$

$\boxed{15 \quad 13}$ ab

$15+0-11$

$13+0-11$

$15+13-28$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq \frac{21+25+13}{2} = \frac{46+13}{2} = \frac{59}{2} = 29{,}5$

≥ 30

$6 \quad 14 \quad 16$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \qquad \alpha_1+\alpha_2 \geq 6$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \qquad \alpha_2+\alpha_3 \geq 14$

$\alpha_3+\alpha_1 \geq 16$

12 13
23 21
31 25

$p^5+5p=\frac{16}{3}$

$q^5+5q=-\frac{16}{3}$

$p^5+q^5+5p+5q=0$

$p^5+q^5+5(p+q)=0$

$(p+q)(\ldots)$

$p=-q$

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 36 \qquad \geq 18$

$2x+1=0 \qquad x=-\frac{1}{2}$

$3 - 17$

$2 - 4$

$1 - 9$

$p^5+5p=\frac{16}{3} \qquad \alpha_3 = 12 \quad \alpha_2 = 2 \quad \alpha_1 = 4$

$3p^5+15p=16 \qquad 58 = 3\cdot 19$

$\frac{3\cdot 2^5}{3^5} + \frac{15\cdot 2}{3} = \frac{32}{3^5}+10$

$3p^5+15p-16=0$

$\frac{3}{32}+\frac{15}{2} = \frac{3\cdot19\cdot4\cdot17}{5}$

$(63-5)(63+5) = 58\cdot 68 = 58\cdot 34\cdot 2$

$\frac{1}{3} \qquad \frac{3}{3^5}+\frac{15}{3} \qquad 0$

$3p^5 \sqrt{\frac{9^2\cdot 7^2}{5^2}-5^2}$

$\frac{\sqrt{(9\cdot 7)^2-5^2}}{5}$

$\frac{9\cdot 7}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} 5x+6ay-6=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+77=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$x^2+(y+9)^2-81+77=0$

$\cos^2+\sin^2=1$

$1+tg^2=\frac{1}{\cos^2}$

$x^2+(y+9)^2=4.$

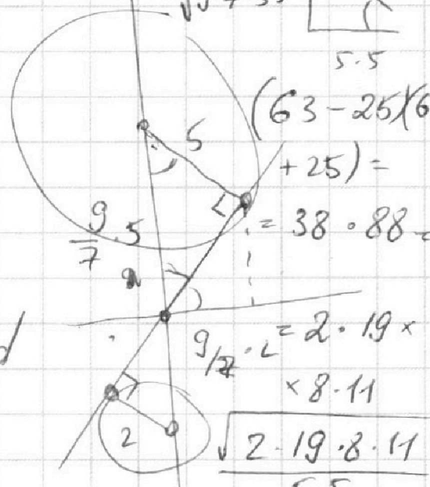
$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$tg^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$

$\sqrt{9\cdot 7^2-5\cdot 5^2}$

$(63-25)(63+25)=38\cdot 88=2\cdot 19\times 8\cdot 11$

$\frac{\sqrt{2\cdot 19\cdot 8\cdot 11}}{5\cdot 5}$



$\sin 90-\alpha=\frac{\frac{9}{7}\cdot 5}{5}=\frac{9}{7}$

$\frac{9}{7}\cdot 5$

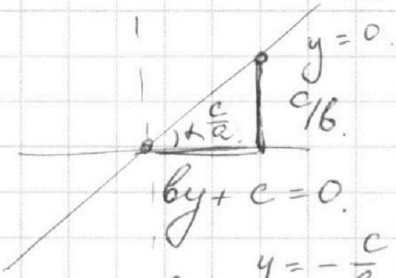
$\cos\alpha=\frac{9}{9}$

$x^2+y^2-25-ax-by-c=0.$

$x=-\frac{c}{a}.$

$y=0.$

$c/b.$



$by+c=0.$

$y=-\frac{c}{b}.$

$a, b, c.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~arc~~ $\arccos(\sin x)$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ $\quad \frac{EF}{AX}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\frac{CA}{CF} = \frac{AB}{BC} = \frac{CB}{BD} = \frac{AC}{CD}$

~~arccos~~ x $\quad \alpha = \arccos(\sin x)$

$\cos\alpha = \sin x$

~~$1-\sin^2\alpha$~~ ~~$\sin\alpha =$~~ $\frac{BD}{CB}$

~~$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$~~

$\arccos x \quad \arcsin x$

$\frac{\pi}{2} - x$

$\frac{\pi}{2} -$

$\sin(90^\circ - x) = \cos x$

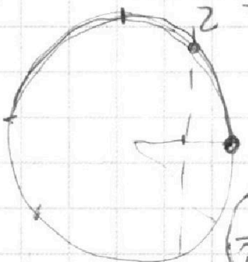
$10\arccos(\cos x) = 9\pi - \pi + 2x$

$\frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \frac{3+14}{6} = \frac{17}{6}$

$10x = 8\pi + 2x$

$\frac{\pi}{2} + \frac{7}{3}$

$> \frac{\pi}{2}$. ~~Пусть~~ $x < 0$. $\quad \frac{1}{2} + \frac{8}{2} = \frac{9}{2}$



Пусть $x > \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi$

$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \pi\left(\frac{3+4}{6}\right) = \frac{7}{6}$

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = 3\log_x \frac{1}{11^2} - 5$

$\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$

$\log_x y \cdot \log_y x = 1$

$\log_x x = 1$

$y \to 0{,}5y$