МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если хотя бы одно из чисел a, b и c делится на простое, отличное от $2, 3$ и 5, ~~(пусть а, не умаляя общности)~~ то можно ~~для~~ рассмотреть такую тройку a, b, c, где из разложения числа, в котором было это простое, это простое убрать. Тогда условие не нарушится, а произведение уменьшится.

Тогда $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$; $b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$; $c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$, где x_i, y_i и z_i – неотриц. целые числа

Из условия $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_1 + x_3 \geq 14 \end{cases}$ Если сложить все нер-ва, получим:

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 34 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 17$

Причём 17 достигается при $x_1 = 4$; $x_2 = 3$, $x_3 = 10$ (и все условия выполняются)

$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_3 + y_1 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 43 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 21.5$ $\Bigg| \Rightarrow$

Но это натуральное число

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 22$

Пример на 22: $y_1 = 7$; $y_2 = 5$; $y_3 = 10$

$\begin{cases} z_1 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_1 + z_3 \geq 43 \end{cases}$. Отсюда $\begin{matrix} z_1 + z_3 \geq 43 \\ z_2 \geq 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq 43$

Пример, когда достигается: $z_1 = 20$; $z_2 = 0$; $z_3 = 23$.

Т.о. $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$, причём равенство достигается.

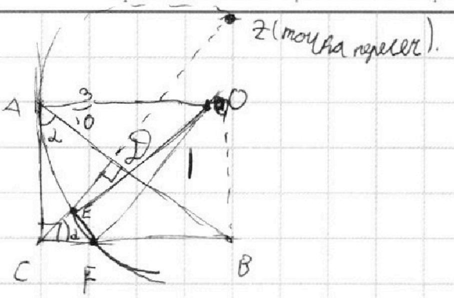
Ответ: наим знач. равно $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: CD - высота

$(AB) \parallel (EF)$

$\frac{|AD|}{|BD|} = 1.3.$

Найти: $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$ - ?

Т.к. нам не даны размеры, а лишь отношения, примем ~~сторону~~ отрезок BD за 1 для удобства. Тогда $|AD| = 0.3$

] $\hat{DCB} = \alpha$. Тогда в силу подобия $\hat{CAD} = \alpha$

Тогда $tg\,\alpha = \frac{|CD|}{0.3} = \frac{1}{|CD|} \Rightarrow |CD| = \sqrt{0.3} = \frac{\sqrt{30}}{10}$

Откуда $|BC| = \sqrt{0.3+1} = \frac{\sqrt{130}}{10}$

$|AC| = \sqrt{0.3+0.09} = \sqrt{0.39} = \frac{\sqrt{39}}{10}$

Но $(EF) \parallel (BD) \Rightarrow \hat{CEF} = \hat{CDB} = 90°$.

Значит, $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ (пусть с коэфф. k)

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ACD}}{k^2 S_{CDB}} = \frac{\frac{1}{2}|CD|\cdot|AD|}{k^2\cdot\frac{1}{2}\cdot|CD|\cdot|BD|} = \frac{0.3}{k^2}$$

Осталось найти k.

(AC) - кас-ся окр-ти $\Rightarrow (AO) \parallel (CB)$

$\hat{CEF} = 90° \Rightarrow \hat{FEZ}$ опирается на диаметр $\Rightarrow [FZ]$ - диаметр окр-ти.

Тогда $|EF| =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Известно, что $\forall_{x\in[-1;1]}$ $\arccos x \in [0;\pi]$. $\quad \arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2}-x))$

Тогда $\forall_{x\in[-1;1]}$ $5\arccos x \in [0;5\pi]$.

Тогда $\frac{3\pi}{2}+x \in [0;5\pi] \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$

Рассмотрим различные возможные ~~отрезки~~ интервалы:

1. $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)$

Тогда $\frac{\pi}{2}-x\in[2\pi;\pi)$. Ур-ие будет иметь вид:

$$5\arccos(\cos(\tfrac{\pi}{2}-x))=\frac{3\pi}{2}+x \overset{\frac{\pi}{2}-x\in[2\pi;\pi)}{\Leftrightarrow} 5\left(2\pi-\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=\frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow \frac{15\pi}{2}+5x=\frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{2}$

2. $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Тогда $\frac{\pi}{2}-x\in(0;\pi]$. Ур-ие будет иметь вид:

$$5\arccos(\cos(\tfrac{\pi}{2}-x))=\frac{3\pi}{2}+x \overset{\frac{\pi}{2}-x\in(0;\pi]}{\Leftrightarrow} 5\cdot\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)=\frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow \pi=6x \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

3. $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

Тогда $\frac{\pi}{2}-x\in(-\pi;0]$. Ур-ие будет иметь вид:

$$5\arccos(\cos(\tfrac{\pi}{2}-x))=\frac{3\pi}{2}+x \overset{\frac{\pi}{2}-x\in(-\pi;0]}{\Leftrightarrow} 5\cdot\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow 4x=4\pi \Leftrightarrow x=\pi$$

4. $x\in\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$

Тогда $\frac{\pi}{2}-x\in(-2\pi;-\pi)$. Ур-ие имеет вид:

$$5\arccos(\cos(\tfrac{\pi}{2}-x))=\frac{3\pi}{2}+x \overset{\frac{\pi}{2}-x\in(-2\pi;-\pi)}{\Leftrightarrow} 5\cdot\left(\tfrac{\pi}{2}-x+2\pi\right)=\frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow \frac{25\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}+6x \Leftrightarrow x=\frac{11\pi}{6}$$

5. $x\in\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$

Тогда $\frac{\pi}{2}-x\in(-3\pi;-2\pi)$. Ур-ие имеет вид:

$$5\arccos(\cos(\tfrac{\pi}{2}-x))=\frac{3\pi}{2}+x \overset{\frac{\pi}{2}-x\in(-3\pi;-2\pi)}{\Leftrightarrow} 5\cdot\left(x-\tfrac{\pi}{2}-2\pi\right)=\frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow \frac{-25\pi}{2}+5x=\frac{3\pi}{2}+x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Заметим, что мы проверили все возможные для x промежутки исходя из ограничения. Все найденные значения внутри интервалов и нам подходят.

Ответ: $\left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что условие $x+3ay-7b=0$ задаёт прямую, а

условие $(x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0$ – две окр-ти.

Тогда ровно 4 решения, если дискриминант каждого из этих двух

ур-ий окажется больше 0, после подстановки x, выраженного из ур-ия прямой.

У нас ~~не group~~ нет ограничений на a и b (целость и т.п.), тогда заменим для удобства $3a$ на a_1, $7b$ на b_1, а затем в конце решения перейдём обратно

Т.о. $x=b_1-a_1y_1$

1-ое ур-ие: $(b_1-a_1y_1+7)^2+y^2-4=0 \Leftrightarrow (b_1+7)^2-2(b_1+7)a_1+(a_1^2+1)y^2-4=0$

$$D_1=4(b_1+7)^2a_1^2-4((b_1+7)^2-4)\cdot(a_1^2+1)=4\cdot(4a_1^2-(b_1+7)^2+4)$$

$$D_1>0 \Leftrightarrow 2\sqrt{a_1^2+1}>|b_1+7| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+1}>\frac{|b_1+7|}{2}$$

2-ое ур-ие: $b_1^2-2a_1b_1y+y^2(1+a_1^2)-9=0$

$$D_2=4a_1^2b_1^2-4\cdot(b_1^2-9)\cdot(1+a_1^2)=4\cdot(9a_1^2-b_1^2+9)$$

$$D_2>0 \Leftrightarrow 9a_1^2-b_1^2+9>0 \Leftrightarrow 3\sqrt{a_1^2+1}>|b_1| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+1}>\frac{|b_1|}{3}$$

Заметим, что мы выбираем b_1, исходя из выбора a_1, но существует ограничение, что

$\sqrt{a_1^2+1}>\max\left(\frac{|b_1|}{3};\frac{|b_1+7|}{2}\right)$. Но в силу вида этих функций, максимум из них минимален в точке их п-ва, т.е. $\frac{|b_1|}{3}=\frac{|b_1+7|}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2|b_1|=3|b_1+7| \overset{b_1<0}{\underset{b_1>-7}{\Leftrightarrow}} -2b_1=3b_1+21 \Rightarrow b_1=-\frac{21}{5}$ – оптимальный выбор.

Тогда $\sqrt{a_1^2+1}>\frac{|b_{1\,opt}|}{3}=\frac{7}{5} \Rightarrow a_1^2+1>\frac{49}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1>\frac{2\sqrt6}{5} \\ a_1<-\frac{2\sqrt6}{5}\end{array}\right.$

Возвращаемся к a: $3a=a_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a>\frac{2\sqrt6}{15} \\ a<-\frac{2\sqrt6}{15}\end{array}\right.$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2\sqrt6}{15}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt6}{15};+\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим первое равенство:

ОДЗ: $x \neq \frac{1}{6}$, $x > 0$

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \overset{ОДЗ}{\iff}$$

$$\iff \log_7^4(6x) = 2\log_{6x} 7 + \frac{3}{2}\log_{6x} 7 - 4 \underset{ОДЗ}{\overset{\log_7 6x \leftrightharpoons t}{\iff}} t^4 = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{t} - 4 \overset{\text{по ОДЗ } t \neq 0}{\iff} 2t^5 + 8t - 7 = 0 \quad (1)$$

Теперь второе:

ОДЗ: $y \neq 1$, $y > 0$

$$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \iff \log_7^4 y = -\frac{7}{2}\log_y 7 - 4 \underset{ОДЗ}{\overset{a \leftrightharpoons \log_7 y}{\iff}}$$

$$\iff a^4 = -\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{a} - 4 \overset{\text{по ОДЗ } a \neq 0}{\iff} 2a^5 + 8a + 7 = 0 \quad (2)$$

Пусть a_1 и t_1 – корни ~~~~ полученных нами ур-ий.

Тогда $a_1 + t_1 = \log_7(6x_1y_1) \underset{ОДЗ}{\Rightarrow} 7^{a_1+t_1} = 6x_1y_1 \iff x_1y_1 = \frac{7^{a_1+t_1}}{6}$.

Значит, если мы найдём все возможные суммы a и t, то найдём и все возможные произведения x и y.

Сложим ур-ия (1) и (2), получим: $2a^5 + 2t^5 + 8a + 8t = 0 \iff$

$$\iff (a+t)(a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4) + 4(a+t) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a+t=0 \\ a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 = 0 \end{array}\right.$$

Докажем, что у второго ур-ия нет решений. Пусть, не умаляя общности, $|a| \geq |t|$.

1. $|a| < 1$

Тогда
$$\left.\begin{array}{l} a^4 \geq 0 \\ |-a^3t| < 1 \\ a^2t^2 \geq 0 \\ |-at^3| < 1 \\ t^4 \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 > -2 \Rightarrow a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 > 2 > 0$$

2. $|a| \geq 1$

Тогда
$$\left.\begin{array}{l} a^4 - a^3t \geq 0 \\ a^2t^2 - at^3 \geq 0 \\ t^4 \geq 0 \\ 4 > 0 \end{array}\right| \Rightarrow a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 > 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, в обоих случаях уравнение корней иметь не может.

Тогда необходимым условием, чтобы a и t были корнями ур-ий (2) и (1) является $a+t=0$. Заметим, что существуют a и t, удовл. ОДЗ.

Значит, единственным возможным вариантом (и он достигается) для суммы $a+t$ является $a+t=0$

Но тогда по доказанному ранее

$xy = \frac{7^{a+t}}{6} = \frac{1}{6}$, что и будет единственно возможным вариантом произведения.

Ответ: $\left\{\frac{1}{6}\right\}$

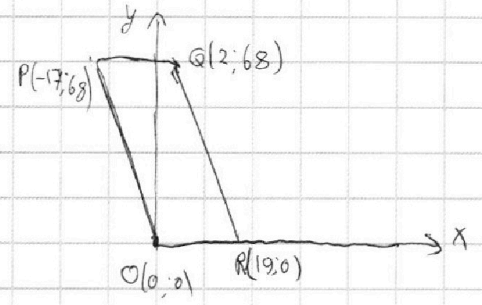
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Для точек $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$ нам известно, что

$$4x_2-4x_1+y_2-y_1=40. \quad (1)$$

Зафиксируем точку $A(x_1;y_1)$ и найдём для неё все подходящие точки $B(x_2;y_2)$

Пусть мы нашли какую-то подходящую точку $B(x_2;y_2)$

Тогда заметим, что нам подойдут также точки $C(x_3;y_3)$:

$y_3 = -4x_3 + y_2 + 4x_2$, т.е. прямая.

Заметим, что угловой коэффициент этой прямой равен угловым коэффициентам прямых (PO) и (QR), а значит наша прямая параллельна этим двум.

Тогда посмотрим на точку, лежащую на прямой и имеющую абсциссу 0.

Для неё: $x_4=0$

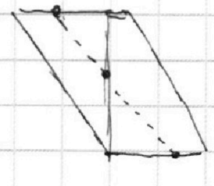
$$y_4 = -4x_4 + y_2 + 4x_2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} y_4 = -4x_4 + 40 + 4x_1 + y_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_4 = 0$, $y_4 = 40+4x_1+y_1$

Если $40+4x_1+y_1 \notin [0;68]$, то для данной точки $A(x_1;y_1)$ не существует подходящих (1) точек B, в силу парал-ти прямых.

Если же $40+4x_1+y_1 \in [0;68]$ рассмотрим два варианта:

1) $40+4x_1+y_1 \vdots 4$. Тогда подходящих нам точек B ровно 18



в силу делимости, точки на краях — целочисленные; при увеличении x на 1 получаем новую целочисленную точку на данной прямой, итого 18 целочисленных точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2) $40+4x_1+y_1 \not\vdots\, 4$

Тогда подходящих целочисленных точек на 2 меньше, т.е. 16 из-за того, что ~~при~~ на пересечении с (PQ) и (OR) — нецелые точки.

Теперь подсчитаем кол-во подходящих ~~пар~~ пар точек. Каждая из целочисленных точек лежит ровно на одной прямой вида $y=-4x+a$, где $a \in [0;76]$; $a \in \mathbb{Z}$

Чтобы к этой точке (x,y) была пара $40+4x_1+y_1 \in [0;68] \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{подх} \in [0;28]$

При этом для $a \vdots 4$ точек на данной прямой 18, и для каждой из них есть 18 подходящих им точек B.

Для $a \not\vdots\, 4$ точек на прямой 16, и им подходят 16 точек B.

Тогда всего пар: чисел, делящихся на 4 ~~всего~~ 8 штук, а неделящихся 21 штука. $S = 8 \cdot 18^2 + 21 \cdot 16^2 = 2592 + 5376 = 7968$

Ответ: 7968

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x = \frac{\pi + 5\pi k}{6}$ $k \in [-2; 4]$

1. $x = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$ 2. $x = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6}$

$5\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow$

5π

$\frac{7\pi}{2}$

1. $\frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi]$

$\Leftrightarrow$ $\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 6x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ $\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)$

2. $\frac{\pi}{2} - x \notin [0; \pi]$

$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x + \pi k$

-1

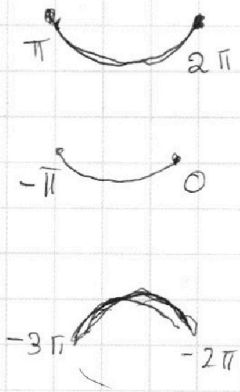
$\pi + 5\pi k = 6x$

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{7\pi}{6}$

$\frac{\pi}{2} - x \in$ $[2\pi; \pi)$

$-\frac{1}{2}$

$\frac{10\pi}{6} =$



$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{\pi}{3}$

$\frac{10\pi}{3}$ $\frac{11\pi}{6} + \frac{9\pi}{6} = \frac{20\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$; $b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$; $c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_3 + x_1 \geq 14 \end{cases}$ значения минимально при равенстве $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 + x_3 = 13 \\ x_3 + x_1 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 + x_2 = 7 \\ x_2 + x_3 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 + y_2 = 11 \\ y_2 + y_3 = 15 \\ y_3 + y_1 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = \end{cases}$ $y_2 = 5$, $y_1 = 7$, $y_3 = 10$

$\begin{cases} z_1 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_1 + z_3 \geq 43 \end{cases}$ $z_1 + z_2 + z_3 \geq \frac{75}{2}$ 38 $z_1 =$ $z_1 = 20$ $z_3 = 23$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5 \cdot \left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - x}_{\in[0;\pi]} + \pi k\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - 5x + 5\pi k = \frac{3\pi}{2} + x$

$\pi + 5\pi k = 6x$

$x = \frac{\pi + 5\pi k}{6}$

$\pi \geq \frac{\pi}{2} - x + \pi k \geq 0$

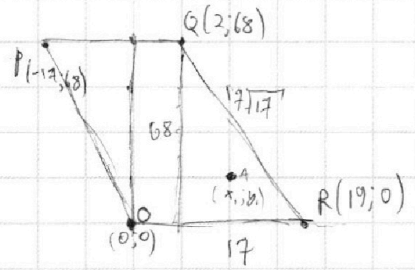
$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{6} \geq 0$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{6} \geq 0 \Leftrightarrow \pi k \geq -2\pi \Leftrightarrow k \geq -2$

$\pi \geq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{6} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \geq \frac{\pi k}{6} \Leftrightarrow 4\pi \geq \pi k \Leftrightarrow k \leq 4$

$O(0;0)$; $P(-17;68)$; $Q(2;68)$; $R(19;0)$.

$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$



$y_1 + 4x_1 \le 28$

18 · 18 = 144 + 18 = 324

324 · 8 = 2592

16 · 16 = 96 + 16 = 256

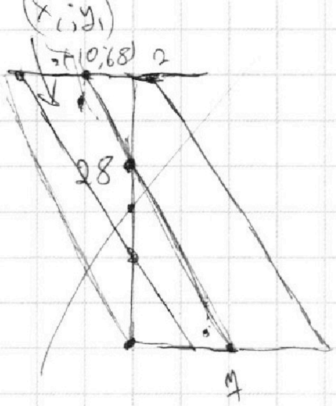
$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$

$y_3 = -4x_3 + b$

$y_2 = 40 + y_1 + 4x_1 - 4x_2$

$b = y_2 + 4x_2$

256 · 21 = 256 + 512 = 5376 + 2592 = 7968



$y = 28 - 4x$

$y_1 + 4x_1$

$y_2 = 40 + 4x_1 + y_1$

1.3

1.69

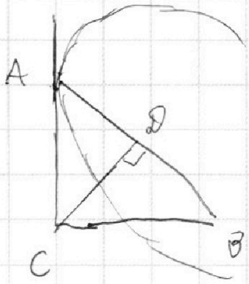
0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28

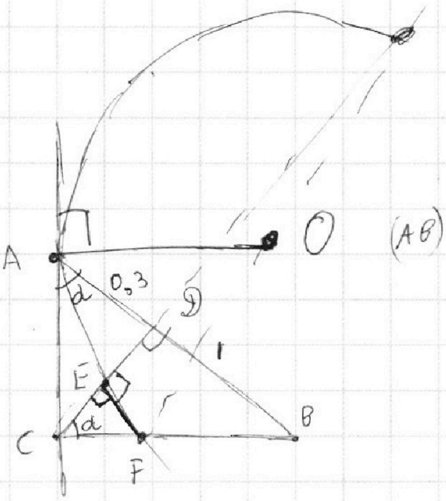
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$(AB) \parallel (EF)$

$\dfrac{|AB|}{|BD|} = 1,3$

$\dfrac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$

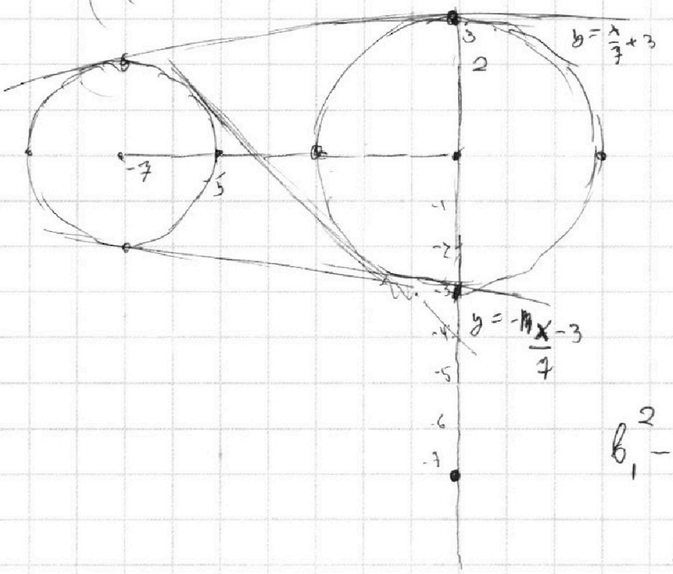
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\left((x+7)^2+y^2-4\right)(x^2+y^2-9)\right)=0$$

$x+a_1y-b_1=0 \Rightarrow x=b_1-a_1y$



1. $a_1=0$

верт. прямая - не подходит.

2. $a_1\neq 0$

$y=-\frac{x}{a_1}+\frac{b_1}{a_1}$

$b_1^2-2a_1b_1y+y^2(1+a_1^2)-9$

$D_1=4a_1^2b_1^2-4(1+a_1^2)\cdot(b_1^2-9)>0$

$(b_1+7-a_1y)^2+y^2-4=(b_1+7)^2-2(b_1+7)a_1+(a_1^2+1)y^2-4$

$D_2=4(b_1+7)^2a_1^2-4\cdot((b_1+7)^2-4)\cdot(a_1^2+1)>0$

$D_1>0 \Leftrightarrow a_1^2b_1^2-b_1^2+9-a_1^2b_1^2+9a_1^2>0 \Rightarrow 9a_1^2-b_1^2+9>0 \Leftrightarrow$

$D_2>0 \Leftrightarrow (b_1+7)^2a_1^2-(b_1+7)^2a_1^2-(b_1+7)^2+4a_1^2+4>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a_1^2-(b_1+7)^2+4>0 \Leftrightarrow \sqrt{4a_1^2+4}>|b_1+7| \Leftrightarrow 2\sqrt{a_1^2+1}>|b_1+7|$

$\Leftrightarrow \sqrt{9a_1^2+9}>|b_1| \Leftrightarrow 3\sqrt{a_1^2+1}>|b_1|$

$\sqrt{a_1^2+1}>\frac{|b_1+7|}{2}$

$\sqrt{a_1^2+1}>\frac{|b_1|}{3}$

$\frac{|b_1|}{3}=\frac{|b_1+7|}{2} \Leftrightarrow 2|b_1|=3|b_1+7| \Leftrightarrow$ $b_1\in(-7;0)$ $-2b_1=3b_1+21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_1=-\frac{21}{5}$

$\sqrt{a_1^2+1}>\frac{7}{5} \Leftrightarrow a_1^2+1>\frac{49}{25} \Leftrightarrow a_1^2>\frac{24}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1<-\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ a_1>\frac{2\sqrt{6}}{5}\end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$ и $\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$

Решим первое: ОДЗ: $x \neq \frac{1}{6}$, $x > 0$

ОДЗ: $\log_7^4(6x) = 2\log_{6x} 7 + \frac{3}{2}\cdot\log_{6x} 7 - 4 \Leftrightarrow$ $\log_7 6x = t$

$\Leftrightarrow \log_7^4(6x) = \frac{7}{2}\cdot\log_{6x} 7 - 4 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow t^4 = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{t} - 4 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^5 + 8t - 7 = 0$

$\log_7 y = a$ $\qquad 2a^5 + 8a + 7 = 0$

$a + t = \log_7 6xy \Rightarrow$

$7^{a+t} = 6xy \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = \frac{7^{a+t}}{6}$

$f(x) - 7$

$f(x) + 7$ $\qquad f(x) = 2a^5 + 8a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

$2(a^5 + t^5) + 8(a + t) = 0 \Leftrightarrow (a+t)(a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4) + 4(a+t) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + t = 0 \\ a^4 - a^3t + a^2t^2 - at^3 + t^4 + 4 = 0 \end{array}\right.$

Пусть нашлись a_2 и t_2, удовл. данному условию и пусть, не умаляя общности, $|a| \geq |t|$.

1. $|a| < 1$

Тогда $a^4 \geq 0$

$|-a^3t| < 1$

$a^2t^2 \geq 0$