



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

если $a|bc$: $2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$, то $a|bc = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$

аналогично $b|c = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$

$a|c = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot m$, $m \in \mathbb{N}$

$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} \cdot n \cdot m \cdot k$

т.е. $(abc)^2 \vdash 3^{55}$

тогда и $a|bc \vdash 3^{55}$ т.к. $55 \neq 2$

т.е. $(abc)^2 \vdash 3^{110}$

~~также~~ тогда $(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{110} \cdot 5^{68} \cdot p$, $p \in \mathbb{N}$

т.е. ~~также~~ $\cancel{2^{34} \cdot 3^{110} \cdot 5^{68}}$

$a|bc \geq 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{34}$

т.е. $a|bc = 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{34} \cdot z$, $z \in \mathbb{N}$

т.е. $a|c \vdash 5^{39}$

$a|bc = 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39} \cdot r$, $r \in \mathbb{N}$

$a|bc \geq 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

т.е. $a = 2^5 \cdot 5^{12} \cdot 3^2$

$b = 2^2 \cdot 5^0 \cdot 3^{12}$

$c = 2^9 \cdot 5^{22} \cdot 3^{41}$

$17 \cdot 55 \cdot 39$

значности воспроизводятся и $a|bc \geq 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

Удвоим наименьшее значение $a|bc$ засчитываемо;

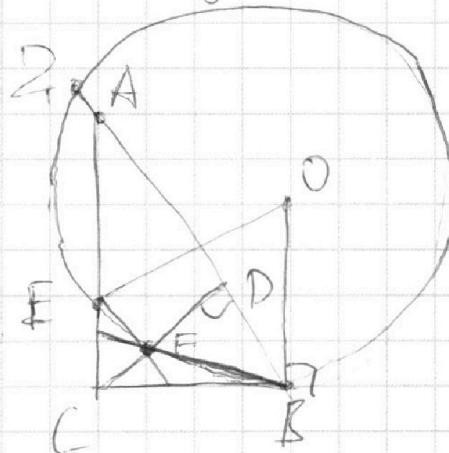
$2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

Очевидно: $2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

- | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 1 | <input checked="" type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 | <input type="checkbox"/> | 7 |
|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 (макс 1)



1) нужно $\angle CBF = \alpha$

м.к. $\angle CIB$ -расв. в окр, то угол между
хордой BF и всп. CIB $\angle CIB + \angle CBF = \frac{1}{2} \times \angle B$

O -центр окр

CIB -расв $\Rightarrow OB + CI$

2) ~~не F~~

1) $EF \parallel IB \Rightarrow \angle EFB = \angle FIB$

тогда $\angle CBF = \alpha + \angle FIB$
(угол между хордой и всп. в окр)

$\angle CBF = \angle FIB = \angle EFB = \angle EBA$

2) A

$\triangle AIB \sim \triangle CDB$

($\angle CDA$ -один и тры)

$\angle DCB = \angle CAB$

$\triangle EBA \sim \triangle CFB$

($\angle CAB = \angle DCB$; $\angle CBF = \angle FBA$)

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CF}{EA}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $\triangle CAB$ -锐角 (D -重心)

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

пусть $AD = 5x$ и $DB = 2x$

$$CD = \sqrt{10}x$$

$$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}x$$

($\triangle CDB$ -锐角)

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$$

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CF}{EA} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

пусть $EA = y$

$$\frac{y}{\sqrt{14}x} = \frac{CF}{7} \quad CF = \frac{\sqrt{14}y}{7}$$

5) $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = \angle CAB$ (нах сопоставлен -
办法)

$\triangle CEF \sim \triangle CAD$

($\angle CEF = \angle CAB$; $\angle ACD$ -共用)

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{AC}$$

$$\frac{CF}{\sqrt{35}x} = \frac{\sqrt{14}y}{\sqrt{35}x} \quad \frac{\sqrt{14}y}{7\sqrt{10}x} = \frac{\sqrt{35}x-y}{\sqrt{35}x} \quad 7\sqrt{10}xy = 35\sqrt{14}x - 7\sqrt{10}yx$$

$$\frac{\sqrt{14}y}{35x} = \frac{\sqrt{35}x-y}{\sqrt{35}x} \quad \cancel{y} \quad \cancel{\sqrt{35}x} \quad \cancel{y} \quad \cancel{\sqrt{35}x}$$

$$7\sqrt{10}xy = 35\sqrt{14}x - 35xy \quad 14\sqrt{10}y = 35\sqrt{14}x$$

$$7\sqrt{10}y = 5\sqrt{35}x - 35y \quad \cancel{y} \quad \cancel{7\sqrt{10}} \quad \cancel{5\sqrt{35}}$$

$$y \cancel{(\sqrt{10} + 5)} = 5\sqrt{35}x \quad y = \frac{5\sqrt{35}x}{\sqrt{10} + 5} = \frac{5\sqrt{35}x}{14\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{5\sqrt{35}x}{\sqrt{10} + 5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta ADC}} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \quad \text{Задача № 3}$$

(wy no добив)

$$S_{\Delta CEF} = S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot \sqrt{10} \cdot x = \frac{8\sqrt{10}}{2} x^2$$
$$CF = \frac{\sqrt{14} \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot x}{2 \cdot (\sqrt{10} + 5)} = \frac{7\sqrt{10} \cdot 5x}{2(\sqrt{10} + 5)} = \frac{35\sqrt{10}x}{2(\sqrt{10} + 5)} = \frac{35\sqrt{10}x}{20 + 10\sqrt{10}}$$

$$S_{\Delta CEF} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \cdot S_{\Delta ADC} = \frac{25 \cdot 10 \cdot x^2}{(25 + 10 + 10\sqrt{10}) \cdot 10 \cdot x^2} = \frac{5\sqrt{10}}{2 + \sqrt{10}} x^2$$
$$= \frac{25 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot x^2}{(35 + 10\sqrt{10}) \cdot 2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot IS_C = \frac{1}{2} \sqrt{55} \cdot \sqrt{14} \cdot x^2 = \frac{7\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$S_{\Delta CEF} = \frac{38 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot x^2}{(35 + 10\sqrt{10}) \cdot 2 \cdot \sqrt{10}} = \frac{125}{248 + 70\sqrt{10}}$$

$$CF = \frac{35\sqrt{14} \cdot \sqrt{10} \cdot x}{14\sqrt{5} \cdot 7} = \frac{5 \cdot 7 \cdot \sqrt{2} \cdot x}{14\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{8}}{2} x$$

$$S_{\Delta CEF} = \left(\frac{CF}{CD}\right) \cdot S_{\Delta ADC} = \frac{5x^2}{2 \cdot 10 \cdot x^2} \cdot 2 = \frac{5\sqrt{10}x^2}{20} = \frac{5\sqrt{10}x^2}{8}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot IS_C = \frac{1}{2} \sqrt{55} \cdot \sqrt{14} \cdot x^2 = \frac{7\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$6) \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{5\sqrt{10}x^2 / 8}{8 \cdot 7 \cdot \sqrt{10} \cdot x^2 / 28} = \frac{5}{2 \cdot 5 \sqrt{10} \cdot x^2} = \frac{28}{20 \cdot \sqrt{10} \cdot x^2} = \frac{28}{200} = \frac{7}{50}$$

Ответ: $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 (решение 4)

$$10 \arcsin(\sin(\cos x)) = \sqrt{1-2x}$$

$$x = \frac{-10 \arcsin(\sin(\cos x)) + \sqrt{1-2x}}{2}$$

$$x = -5 \arcsin(\sin(\cos x)) + \frac{\sqrt{1-2x}}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq -5 \arcsin(\sin(\cos x)) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-2\pi \leq -5 \arcsin(\sin(\cos x)) \leq 3\pi$$

$$\text{т.е. } -2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$10 \arcsin(\sin(\cos x)) = 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x))$$

$$1) \frac{-2\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x - 2\pi)) = \sqrt{1-2x}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x - 2\pi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi) = \sqrt{1-2x}$$

$$-16\pi = 8x$$

$$x = -2\pi$$

$$2) -\pi \leq x < 0$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \sqrt{1-2x}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$10(\frac{\pi}{2} + x) = \sqrt{1-2x}$$

$$4\pi = -12x$$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$3) 0 \leq x \leq \pi$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \sqrt{1-2x}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = \sqrt{1-2x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 (лист 2)

$$5\sqrt{u} - 10x = \sqrt{u} - 2x$$

$$4\sqrt{u} = 8x$$

$$x = \frac{\sqrt{u}}{2}$$

4) $\sqrt{u} \leq x \leq 2\sqrt{u}$

$$10 \arcsin(\sin(\pi/2 + x - 2\sqrt{u})) = \sqrt{u} - 2x$$
$$-\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} + x - 2\sqrt{u} \geq \frac{\pi}{2}$$

$$10(\frac{\pi}{2} + x - 2\sqrt{u}) = \sqrt{u} - 2x$$

$$5\sqrt{u} + 10x - 20\sqrt{u} = \sqrt{u} - 2x$$

$$-16\sqrt{u} = -12x$$

$$x = \frac{4}{3}\sqrt{u}$$

5) $2\sqrt{u} \leq x \leq 3\sqrt{u}$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x + 2\sqrt{u})) = \sqrt{u} - 2x$$
$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\sqrt{u} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x + 2\sqrt{u}) = \sqrt{u} - 2x$$

$$5\sqrt{u} - 10x + 20\sqrt{u} = \sqrt{u} - 2x$$

$$24\sqrt{u} = 8x$$

$$x = 3\sqrt{u}$$

Решено: ~~x = 2\sqrt{u}~~ * ~~x = \frac{4}{3}\sqrt{u}~~; $x = -2\sqrt{u}$; $x = -\frac{5}{3}\sqrt{u}$; $x = \frac{5}{2}\sqrt{u}$; $x = 3\sqrt{u}$

Ответ: $-2\sqrt{u}; -\frac{5}{3}\sqrt{u}; \frac{5}{2}\sqrt{u}; \frac{4}{3}\sqrt{u}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

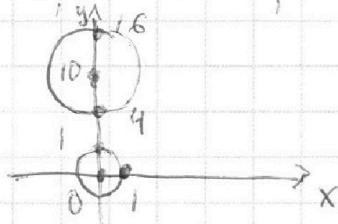
Задача №4 (решение)

$$x^2 - 2y + 48 = 0 \quad (2)$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \quad (1)$$

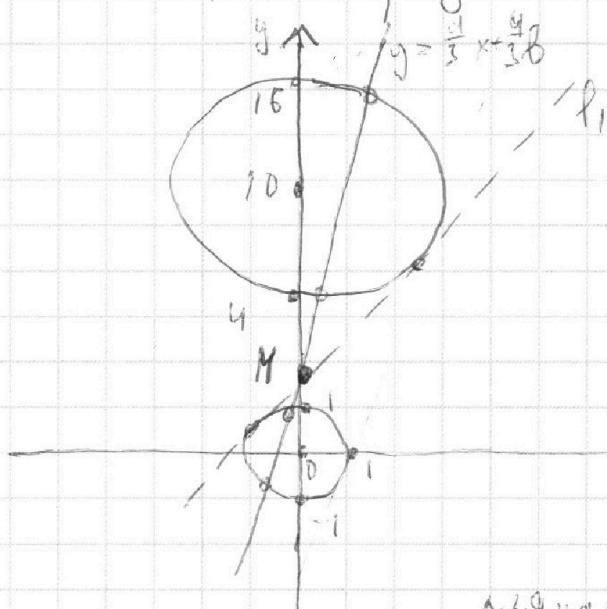
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

Это две окружности с радиусами 1 и 6 и центрами $(0, 0)$ и $(0, 10)$ соответственно.



$$(2) \quad y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

диск лежит симметрично относительно оси y , как в правиле
около $(0, \frac{4}{3}b)$; где $a \geq 0$!



$$1) \text{ при } a = 0$$

$\frac{d}{2} \leq r$ решетка

$$2) 0 < \frac{d}{2} \leq k,$$

т.е. $k - \frac{d}{2} \leq r$
коррекция
т.е. дистанции d
(расстояние до окружности)

также ≤ 2 решетка

$$3) \frac{d}{3} > k$$

Будем $\frac{d}{3}$ решетка

линия $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ пройдет через M

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (вариант 2)
Что M - это точка пересечения прямой Y и OX, m₂ 3B = 4Y

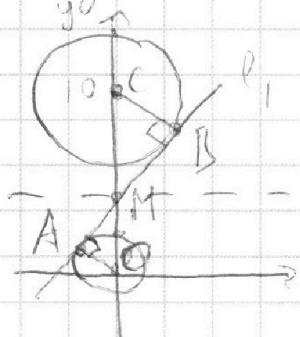
Чтобы задача симметрична если подходит a₁ > 0,
то подходит и -a₁.

Стараемся:

$$\begin{cases} \frac{a}{3} > k \\ -\frac{a}{3} < k \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 3k \\ a < -3k \end{cases}$$

Найдем k:



$$BC = 10, OA = 1$$

$\triangle ACM \sim \triangle OAM$:

$$\frac{OM}{CM} = \frac{OA}{BC} = \frac{1}{10}$$

$$OM \cdot CM = 10$$

$$OM + MO = 10$$

$$OM = \frac{10}{7}$$

$$MB$$

$$k = fg (90^\circ - \angle CMB) = Cf g \angle CMB = \frac{MB}{CB}$$

$$CM = \sqrt{OM^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{100}{49} + 1} = \frac{10}{7}$$

$$MB = \sqrt{CM^2 - CB^2} = \sqrt{\frac{10000}{49} - 100} = \frac{10\sqrt{51}}{7}$$

$$= \sqrt{\frac{3600}{49} - 36} = 6\sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{6\sqrt{51}}{7}$$

$$k = \frac{6\sqrt{51}}{7 \cdot 6} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\begin{cases} a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 (шестая)

$$1) \log_5^4(2x) + 3\log_{2x} 5 = \log_8_{x^3} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) + 3\log_{2x} 5 = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3$$

$$3\log_5^4(2x) = 12\log_{2x} 5 - 9$$

$$2) \log_5^4(y) + 4\log_y 5 = \log_3(0,2) - 3$$

$$\log_5^4(y) + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$$

$$3\log_5^4(y) + 12\log_y 5 = -\log_y 5 - 9$$

$$3\log_5^4(y) = -13\log_y 5 - 9$$

$$(1) \text{ нужно } t = \log_5(2x)$$

$$3t^4 = 13t - 9$$

$$3t^4 = \frac{13}{t} - 9$$

$$\frac{3t^5 + 9t - 13}{t} = 0$$

$$3t^5 + 9t - 13 = 0$$

$$\text{нуль } f(m) = 3m^5 + 9m - 13$$

$$f(\log_5(2x)) = 0$$

$$(2) \text{ нужно } K \neq \log_5(2x) \Rightarrow \log_y K = -\log_5 y$$

$$3K^4 = \frac{13}{K} - 9$$

$$\frac{3K^5 + 9K - 13}{K} = 0$$

$$3K^5 + 9K - 13 = 0$$

$$f(-\log_5 y) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 (лицем 2)

$$f(m) = 3m^5 + 9m - 13$$

$f'(m) = 15m^4 + 9 > 0$ при всех m
т.е. $f(m)$ возрастают

$$f(\log_5(2x)) = 0 = f(-\log_5 y)$$

$$\text{тогда } \log_5 2x = -\log_5 y$$

$$\log_5(2xy) = 0$$

$$2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

~~это возможно при $x=y=\frac{1}{2}$~~

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Sayara $\sqrt{3}$ (решено)~~

$$10 \arcsin(\sqrt{\cos x}) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$\arcsin(\sqrt{\cos x}) \leq \frac{\pi}{2}$$

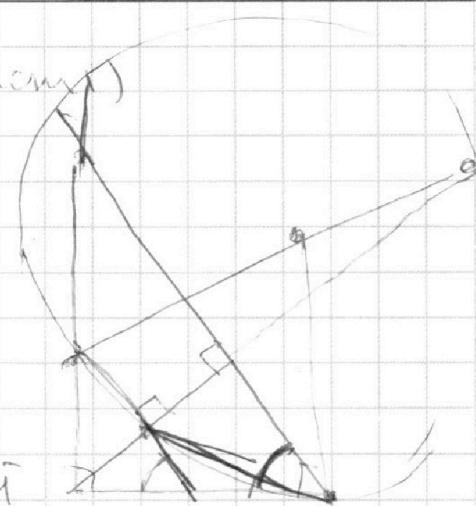
$$x = -10 \arcsin(\sqrt{\cos x}) + \sqrt{1 - 2x}$$

$$x = -5 \arcsin^2(\cos x) + \frac{\sqrt{1 - 2x}}{2}$$

$$-\frac{5\sqrt{1 - 2x}}{2} \leq -5 \arcsin^2(\cos x) \leq \frac{5\sqrt{1 - 2x}}{2}$$

$$-2\sqrt{1 - 2x} \leq -5 \arcsin^2(\cos x) \leq 3\sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{т.е. } -2\sqrt{1 - 2x} \leq x \leq 3\sqrt{1 - 2x}$$



$$10 \arcsin(\sqrt{\cos x}) = 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$$

$$1) -2\sqrt{1 - 2x} \leq x \leq 3\sqrt{1 - 2x}$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq -x \leq \pi$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x - 2\sqrt{1 - 2x}) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$\frac{\pi}{2} - x + 2\sqrt{1 - 2x}$$

$$5\sqrt{1 - 2x} - 10x - 20\sqrt{1 - 2x} = \sqrt{1 - 2x}$$

$$-3\sqrt{1 - 2x} - 10x = \sqrt{1 - 2x}$$

$$-16\sqrt{1 - 2x} = 8x$$

$$-4\sqrt{1 - 2x} = x$$

$$x = -2\sqrt{1 - 2x}$$

$$\sqrt{10}x$$

$$2) -\sqrt{1 - 2x} \leq x \leq 0$$

$$\sqrt{1 - 2x} \leq x \leq 0$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + x)) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{1 - 2x}$$

$$(10(\frac{\pi}{2} + x)) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$-2\sqrt{1 - 2x} \leq -x \leq -\sqrt{1 - 2x}$$

$$5\sqrt{1 - 2x} + 10x = \sqrt{1 - 2x}$$

$$-x + 2\sqrt{1 - 2x} \leq 0$$

$$4\sqrt{1 - 2x} + 12x = 0$$

$$\sqrt{2}\sqrt{1 - 2x} + 12x = 0$$

$$4\sqrt{1 - 2x} = -12x$$

$$4\sqrt{1 - 2x} = -12x$$

$$x = -\frac{\sqrt{1 - 2x}}{3}$$

$$\sqrt{1 - 2x} \leq x \leq 0$$

$$3) 0 \leq x \leq -\sqrt{1 - 2x}$$

$$-\sqrt{1 - 2x} \leq x \leq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_2 9 = 3 \log_2 3 \quad \frac{1 - \sqrt{19}}{4} \cdot 5$$

$$\frac{4}{3} \log_2 3 - 3$$

A

$$5x \quad 12x$$

E

$$2x \quad 90^\circ - x$$

B

$$\sqrt{10}x \quad 10^{-10}$$

$$CF = \frac{\sqrt{13}\sqrt{14}}{5}$$

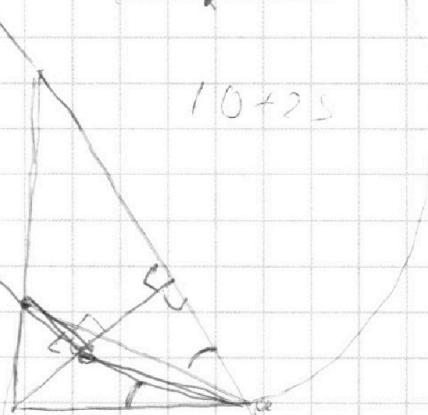
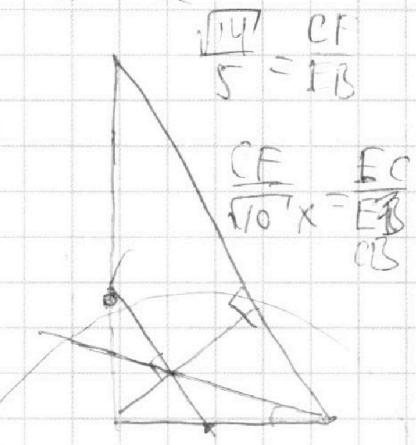
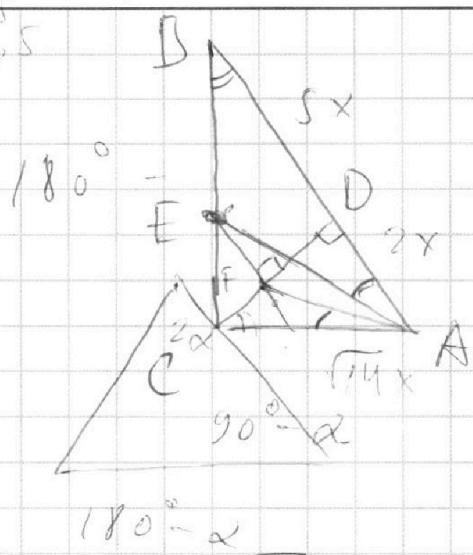
$$EBS^2 = ECx \cdot k$$

$$CF \quad CE$$
$$\sqrt{10}x = \sqrt{13}x$$
$$\frac{CF}{CE} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$$
$$y$$

$$180^\circ - 2x$$
$$\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{5}$$

$$CF =$$

$$P(x)$$



$$\frac{CF}{\sqrt{35}x - y} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3 \quad \frac{165}{15} / 33$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = 3 \log_{2x} 5^4 - 3 \quad \frac{15}{15}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \log_5(2x) - 3$$

$$t = \log_5 2x, \quad x \neq \frac{1}{2} \quad \log_5 2x + \log_5 y = 0$$

$$t^2 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3+t} - 3 \quad 2xy = 1$$

$$3t^3 + 9 - 4 = 0 \quad \frac{3t^3 + 9 - 4 + 9t}{3+t} = 0$$

$$t^3 = \frac{12}{3} \quad 3t^3 + 9t - 13 = 0$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{12}{3}} \quad t \neq 0 \quad (6t + 3t - (3t^2 - 13 + 3t))$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = 3 \log_5 5 - 3 \quad 6t^2 - 3t^2$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3 \quad \frac{7t^2 - 13}{t^4} > 0$$

$$\log_5^4 y = \log_5^4(2x) =$$

$$3 \log_5^4(2x) = 4 \log_{2x} 5 + 3 \log_{2x} 5 - 3$$

$$\frac{81}{27} \quad 3 \log_5^4 y = -\log_y 5 - 12 \log_y 5 - 3$$

$$\frac{27}{9} \quad 3 \log_5^4(2x) = 13 \log_{2x} 5 - 3$$

$$\frac{15}{5} \quad 3 \log_5^4 y = -12 \log_y 5 - 3$$

$$\frac{165}{15} \quad 3(\log_5^4 2x - \log_5^4 y) = 13(\log_{2x} 5 - \log_y 5)$$

$$3t^2 + 3t - 13 = 0 \quad t = \frac{13}{7} - 3$$

$$165 \quad t = \frac{13}{7} - 3 \quad 3t^2 - 13 + 3t = 0$$

$$\log_5 2x = -\log_5 y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \log_5^4(2x) = \log_2 x^5 - 3$$

$$3 \log_2^4(y) = -\frac{13}{\log_2 y} - 3$$

$$3(\log_5^2(2x) - \log_5^2(2x))(\log_5^2 2x + \log_5^2 y) =$$

$$= 13 \left(\frac{\log_2 y^5 - \log_2 x^5}{t} \right) 16$$

$$f(t) = 3t^4 - \frac{13}{t} + 9$$

$$= \frac{3t^5 + 9t - 13}{t} = 0$$

$$\log_5 2x \quad 3t_1^5 + 9t_1 - 13 = 0$$

$$x = 1, \quad y = \frac{1}{2}$$

$$\log_5^4 2 - 3 \log_2 5 = \frac{4}{3} \log_2 5^4 - 3$$

$$\begin{array}{c} 18 \\ 16 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$P(-18, 80)$$

$$Q(2, 80)$$

R

$$(18, 0)$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5(x_2 - \cancel{x_1}) + y_2 - y_1 = 45$$

≤ 80

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$y = -5x + 5x_2 + y_2 - 45$$

$$y = 5x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

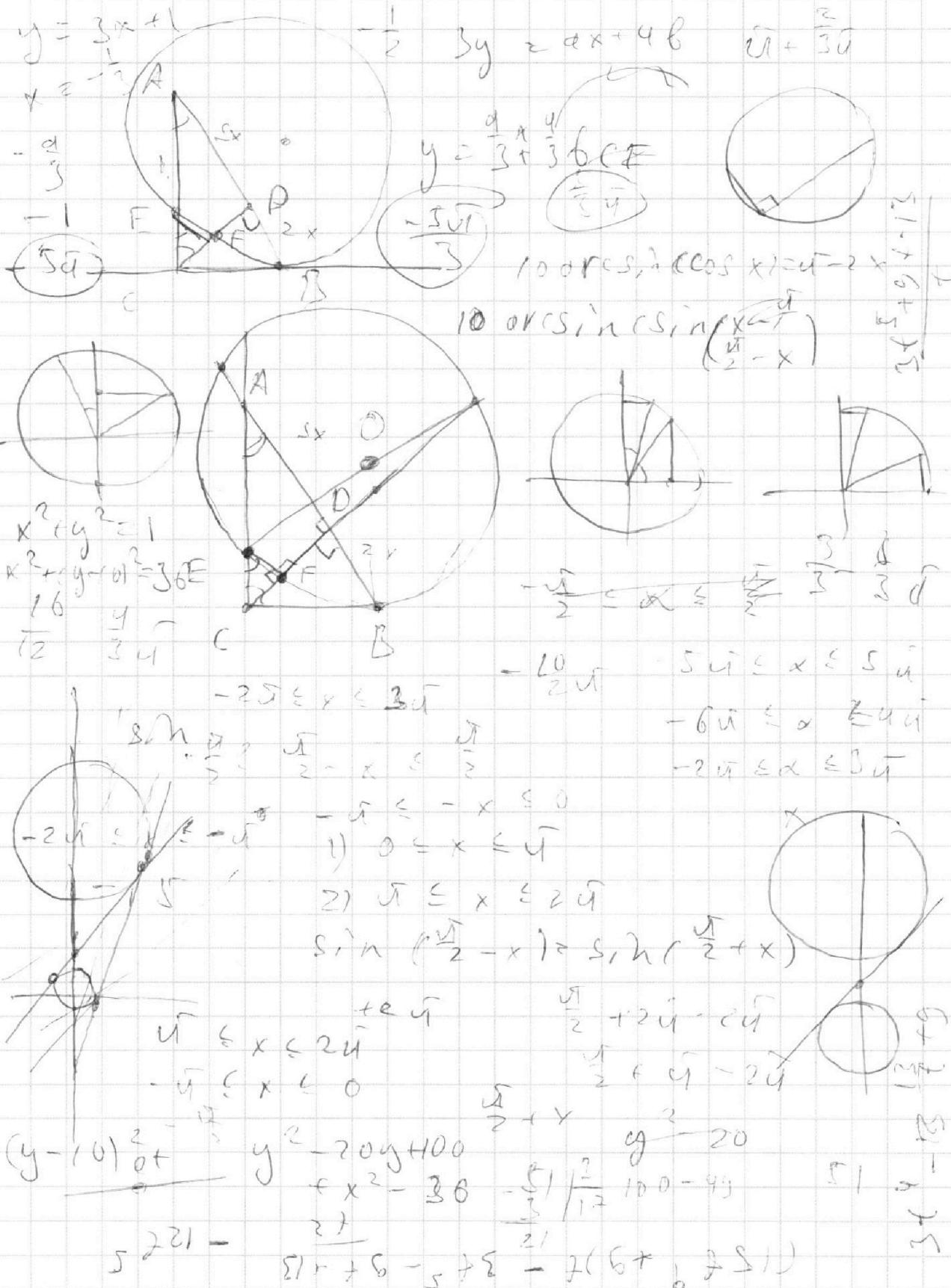
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{12} \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^{55} \cdot 6^8 \\ 3^9 (abc)^2 : 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \quad 1 \quad 17 \quad 27 \quad 34 \\ + 2^9 abc^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{28} \quad 41 \quad + 2^9 abc^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} \\ 5^3 \quad 33 \quad 68 \quad 27$$

$$2x \quad 2 \quad y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{8} : \frac{c}{8} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 27 \times 1 \quad \sqrt{5} = \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{5} \cdot \sqrt{4} = 2 \\ + 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad a+b = 12$$

$$+ 2^9 \quad 110 \quad (abc)^2 : 3^{55} \quad b+c = 12 \\ + 3^9 \quad a+b+c = 39$$

$$+ 2^8 \quad 55 \quad 2a = 34 \quad abc = n \cdot 3^{12} \quad a-b = 22 \\ 54 \quad 110 \quad a = 17 \quad abc^2 = n^2 \cdot 5^{22} : 3^{55} \\ + ab \cdot bc : 3 \quad c = 2a : 55$$

$$+ abc \geq 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{68}$$

$$\frac{a}{d} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{b}{d} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot d \quad a = 2^5 \cdot 5^{12} \\ a+b+c = 12 \quad b = 2^3 \cdot 5^0 \\ a+b = 8 \quad c = 2^9 \cdot 5^{27} \\ b+c = 12 \quad a+b+c = 14 \\ a+c = 14 \quad a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot q \quad b+c = 20 \\ a-b = 2 \quad \frac{b}{d} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot q \quad d+c = 21 \\ abc = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{22} \quad a^2 = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad a-b = 1 \\ 2a = 10 \quad a^2 \cdot 5^{10} = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot n \quad 2a = 15 \\ a = 5 \quad a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot n \quad \underline{\underline{21 - 5^{21}}} \\ b = 3 \quad a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^8$$

$$abc = d \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot q \quad 5^{23}$$

$$3^9 \quad 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot q \quad 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{22} \quad 34 \quad 2 \\ a^2 \quad a^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot q \quad 48 \quad 5^{17} \quad 1 \\ a+b+c = 55 \quad a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot q \quad 8 = 0 \\ a-b = 4 \quad a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot q \quad a = 12 \\ a+c = 39 \quad a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot q \quad c = 27 \quad 2^5$$