



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8xz} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{yz} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

если $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ то $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot n, n \in \mathbb{N}$

аналогично $bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot k, k \in \mathbb{N}$

$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot m, m \in \mathbb{N}$

$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} \cdot n \cdot m \cdot k$

т.е. $(abc)^2 \vdots 3^{55}$

значит $abc \vdots 3^{55}$ так $55 \div 2$

т.е. $(abc)^2 \vdots 3^{110}$

~~также~~ значит $(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{110} \cdot 5^{68} \cdot p, p \in \mathbb{N}$

~~то $(abc)^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{110} \cdot 5^{68}$~~

~~$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{34}$~~

т.е. $abc = 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{34} \cdot z, z \in \mathbb{N}$

т.е. $ac \vdots 5^{39}$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39} \cdot r, r \in \mathbb{N}$

$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

пусть $a = 2^5 \cdot 5^{12} \cdot 3^2$

$b = 2^3 \cdot 5^0 \cdot 3^{12}$

$c = 2^9 \cdot 5^{22} \cdot 3^{41}$

значности выполняются и $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

укажем наименьшее значение abc соответственно;

$2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

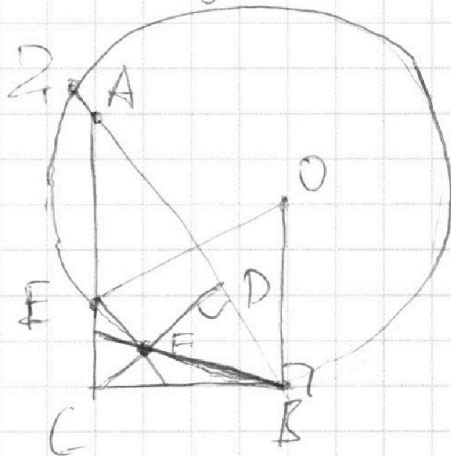
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2 (мсм1)



1) Пусть $\angle CBF = \alpha$

т.к. CB - кас к окр, то угол между
касатой BF и радиусом OB ($\angle CBF$) = $\frac{1}{2} \angle BOF$

O - центр окр

CB - кас $\Rightarrow OB \perp CB$

2) ~~$\angle E$~~

1) $EF \parallel CB \Rightarrow \angle EFB = \angle FCB$

тогда $\angle CBF = \alpha \neq \angle EFB$
(углы между касатой и хордой)

$\angle CBF = \angle FCB = \angle EFB = \angle EBF$

2) $\triangle ABC \sim \triangle CDB$
($\angle CBA$ - общий и \parallel)

$\angle DCB = \angle CAB$

$\triangle EBA \sim \triangle CFB$

($\angle CAB = \angle DCB$; $\angle CBF = \angle EBA$)

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CE}{EA}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3) $\triangle CAB$ - туп (Задана $\sqrt{2}$ (и см 2))
($\angle D$ - высота)

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

пусть $AD = 5x$ и $DB = 2x$

$$CD = \sqrt{10}x$$

$$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}x$$

($\triangle CDB$ - туп)

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}x$$

$$4) \frac{CB}{AB} = \frac{CF}{EA} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

пусть $EA = y$

$$y \cdot \frac{\sqrt{14}}{7} = CF \Rightarrow CF = \frac{\sqrt{14}y}{7}$$

5) $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = \angle CAB$ (как соответственные углы)

$\triangle CEF \sim \triangle CAD$

$\angle CEF = \angle CAB$, $\angle C$ - общий

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{AC}$$

$$\frac{CF}{\sqrt{10}x} = \frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}x} \Rightarrow \frac{\sqrt{14}y}{7} = \frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}x}$$

$$\frac{\sqrt{14}y}{35x} = \frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}x} \Rightarrow \frac{\sqrt{14}y}{35} = \frac{\sqrt{35}x - y}{\sqrt{35}}$$

$$7\sqrt{10}xy = 35\sqrt{35}x - 35y \Rightarrow 14\sqrt{10}y = 35\sqrt{35}x - 35y$$

$$7\sqrt{10}y = 5\sqrt{35}x - 5y \Rightarrow y(7\sqrt{10} + 5) = 5\sqrt{35}x$$

$$y = \frac{5\sqrt{35}x}{7\sqrt{10} + 5}$$

$$y = \frac{35\sqrt{14}x}{14\sqrt{10} + 35} = \frac{35\sqrt{7}x}{14\sqrt{5} + 35}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2 (линия 3)

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ADC}} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \quad (\text{из подобия})$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot \sqrt{10} \cdot x = \frac{5\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$CF = \frac{7\sqrt{10} \cdot 5x \cdot 5\sqrt{10}x}{7(\sqrt{10} + 5) \cdot 25 \cdot 10 \cdot x^2} = \frac{7\sqrt{10} \cdot 5x \cdot 5\sqrt{10}x}{7(\sqrt{10} + 5) \cdot 25 \cdot 10 \cdot x^2} = \frac{5\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$S_{\triangle CEF} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{25 \cdot 10 \cdot x^2}{(25\sqrt{10} + 10\sqrt{10}) \cdot 10 \cdot x^2} \cdot \frac{5\sqrt{10}}{2} \cdot x^2 = \frac{25 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot x^2}{(35 + 10\sqrt{10}) \cdot 2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{35} \cdot \sqrt{14} x^2 = \frac{7\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{28 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot x^2}{(35 + 10\sqrt{10}) \cdot 2 \cdot \frac{7\sqrt{10}}{2} x^2} = \frac{125}{248 + 70\sqrt{10}}$$

$$CF = \frac{35\sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \cdot x}{14\sqrt{5} \cdot 7} = \frac{5 \cdot 7\sqrt{2}x}{14\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{2} x$$

$$S_{\triangle CEF} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{5x^2}{2 \cdot 10 \cdot x^2} \cdot 2 \cdot \frac{5\sqrt{10}x^2}{2} = \frac{5\sqrt{10}x^2}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{35} \cdot \sqrt{14} x^2 = \frac{7\sqrt{10}}{2} x^2$$

$$6) \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{5\sqrt{10}x^2 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot \sqrt{10}x^2} = \frac{5}{28} \cdot \frac{7\sqrt{10}x^2 \cdot 8}{2 \cdot 5\sqrt{10}x^2} = \frac{28}{5}$$

Ответ: $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3 (матр 1)

$$10 \arcsin(\sin(\cos x)) = \sqrt{2} - 2x$$

$$x = \frac{-10 \arcsin(\sin(\cos x)) + \sqrt{2}}{2}$$

$$x = -5 \arcsin(\sin(\cos x)) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{5}{2}\sqrt{2} \leq -5 \arcsin(\sin(\cos x)) \leq \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} \leq -5 \arcsin(\sin(\cos x)) \leq 3\sqrt{2}$$

т.е. $-2\sqrt{2} \leq x \leq 3\sqrt{2}$

$$10 \arcsin(\sin(\cos x)) = 10 \arcsin(\sin(\frac{\sqrt{2}}{2} - x))$$

1) $-2\sqrt{2} \leq x \leq -\sqrt{2}$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\sqrt{2}}{2} - x - 2\sqrt{2})) = \sqrt{2} - 2x$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - x - 2\sqrt{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$10(\frac{\sqrt{2}}{2} - x - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 2x$$

$$-16\sqrt{2} = 8x$$

$$x = -2\sqrt{2}$$

2) $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\sqrt{2}}{2} + x)) = \sqrt{2} - 2x$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$10(\frac{\sqrt{2}}{2} + x) = \sqrt{2} - 2x$$

$$4\sqrt{2} = -12x$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

3) $0 \leq x \leq \sqrt{2}$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\sqrt{2}}{2} - x)) = \sqrt{2} - 2x$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$10(\frac{\sqrt{2}}{2} - x) = \sqrt{2} - 2x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3 (лист 2)

$$5\sqrt{4} - 10x = \sqrt{4} - 2x$$

$$4\sqrt{4} = 8x$$

$$x = \frac{4\sqrt{4}}{2}$$

4) $\sqrt{4} \leq x \leq 2\sqrt{4}$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{4}}{2} + x - 2\sqrt{4}\right)\right) = \sqrt{4} - 2x$$

$$-\frac{\sqrt{4}}{2} \leq \frac{\sqrt{4}}{2} + x - 2\sqrt{4} \leq \frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$10\left(\frac{\sqrt{4}}{2} + x - 2\sqrt{4}\right) = \sqrt{4} - 2x$$

$$5\sqrt{4} + 10x - 20\sqrt{4} = \sqrt{4} - 2x$$

$$-16\sqrt{4} = -12x$$

$$x = \frac{4\sqrt{4}}{3} \quad \left[\frac{\sqrt{4}}{2}, 2\sqrt{4} \right] \quad x = \frac{4}{3}\sqrt{4}$$

5) $2\sqrt{4} \leq x \leq 3\sqrt{4}$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{4}}{2} - x + 2\sqrt{4}\right)\right) = \sqrt{4} - 2x$$

$$-\frac{\sqrt{4}}{2} \leq \frac{\sqrt{4}}{2} - x + 2\sqrt{4} \leq \frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$10\left(\frac{\sqrt{4}}{2} - x + 2\sqrt{4}\right) = \sqrt{4} - 2x$$

$$5\sqrt{4} - 10x + 20\sqrt{4} = \sqrt{4} - 2x$$

$$24\sqrt{4} = 8x$$

$$x = 3\sqrt{4}$$

Ответ: $x = \frac{4}{3}\sqrt{4}, x = -2\sqrt{4}, x = -\frac{4}{3}, x = \frac{\sqrt{4}}{2}, x = 3\sqrt{4}$

Ответ: $-2\sqrt{4}, -\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{4}}{2}, 3\sqrt{4}, \frac{4}{3}\sqrt{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

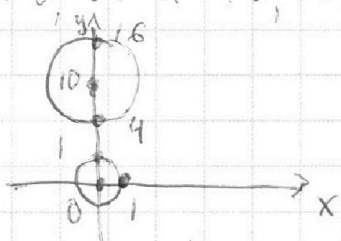


Задача №4 (школа)

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (2) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (1) \end{cases}$$

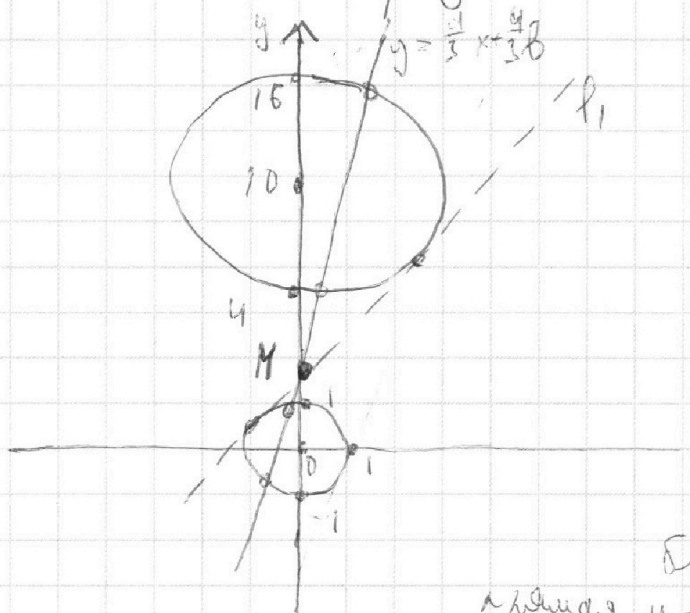
$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

Это две окр с радиусами 1 и 5 и центрами $(0; 0)$ и $(0; 10)$ соответственно



$$(2) y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

это семейство прямых, как вращающаяся ось $(0; \frac{4}{3}b)$, для $a \geq 0$!



1) при $a = 0$
≤ 2 решения

2) $0 < \frac{a}{3} \leq k$,

где k — угловой коэффициент прямой l_1 (касательной к обеим окр.)

тоже ≤ 2 решения
3) $\frac{a}{3} > k$

будет 4 реш, если прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ пройдет через M

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



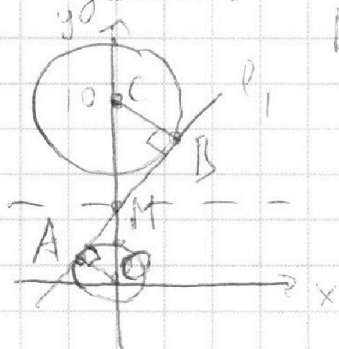
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (см. стр. 2)
 где M - точка пересечения l_1 и Ox , т.е. $3b = \sqrt{3} \cdot y_M$
 l_2 - ось симметрии если подходить $a_1 \geq 0$,
 то подходить $a - a_1$

Итак имеем:

$$\begin{cases} \frac{d}{3} > k \\ -\frac{d}{3} < k \end{cases} \quad \begin{cases} d > 3k \\ d < -3k \end{cases}$$

Найдем k !



$BC = OB \cdot OA = 1$
 $\triangle CBM \sim \triangle OAM$
 $\frac{OM}{CM} = \frac{OA}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha \text{ CM} = \sqrt{3} \cdot OM$
 $CM + MO = 10$
 $\sqrt{3} \cdot OM = 10$
 $OM = \frac{10}{\sqrt{3}}$

$k = \tan(90^\circ - \angle CMB) = \cot \angle CMB = \frac{MB}{CB}$

$CM = \sqrt{3} \cdot OM = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10$

$MB = \sqrt{CM^2 - CB^2} = \sqrt{100 - 1} = 10\sqrt{1}$

$= \sqrt{\frac{3600}{49} - 36} = 6\sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{6\sqrt{51}}{7}$

$k = \frac{6\sqrt{51}}{7 \cdot 6} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$\begin{cases} a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \end{cases}$

Ответ: $a \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}, +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 (лист 1)

1) $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$
 $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$
 $3 \log_5^4(2x) = 13 \log_{2x} 5 - 9$

2) $\log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = \log_y 3(0,2) - 3$
 $\log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3$
 $3 \log_5^4(y) + 12 \log_y 5 = -\log_y 5 - 9$
 $3 \log_5^4(y) = -13 \log_y 5 - 9$

(1) пусть $t = \log_5^4(2x)$

$$3t^4 = 13t - 9$$

$$3t^4 = \frac{13}{t} - 9$$

$$\frac{3t^5 + 9t - 13}{t} = 0$$

$$3t^5 + 9t - 13 = 0$$

пусть $f(m) = 3m^5 + 9m - 13$

$$f(\log_5^4(2x)) = 0$$

(2) пусть $k = \log_5^4(2x) \leftarrow \log_y k = -\log_5 y$

$$3k^4 = \frac{13}{k} - 9$$

$$\frac{3k^5 + 9k - 13}{k} = 0$$

$$3k^5 + 9k - 13 = 0$$

$$f(-\log_5 y) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 (лист 2)

$$f(m) = 3m^5 + 9m - 13$$

$$f'(m) = 15m^4 + 9 > 0 \text{ при всех } m$$

т.е. $f(m)$ возрастает

$$f(\log_5(2x)) = 0 = f(-\log_5 y)$$

$$\text{так как } \log_5 2x = -\log_5 y$$

$$\log_5(2xy) = 0$$

$$2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

~~это возможно при $x=1$ и $y=\frac{1}{2}$~~

Ответ: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Задача №3 (исход)~~

~~$10 \arcsin(\cos x) = \bar{u} - 2x$~~

~~$10 \arcsin(\cos x) = \frac{\bar{u}}{2}$~~

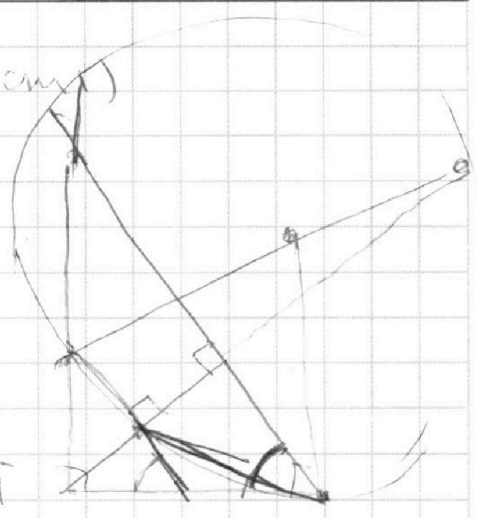
~~$x = \frac{-10 \arcsin(\cos x) + \bar{u}}{2}$~~

~~$x = -5 \arcsin(\cos x) + \frac{\bar{u}}{2}$~~

~~$-\frac{5}{2}\bar{u} \leq -5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5}{2}\bar{u}$~~

~~$-2\bar{u} \leq -5 \arcsin(\cos x) \leq 3\bar{u}$~~

~~т.е. $-2\bar{u} \leq x \leq 3\bar{u}$~~



$10 \arcsin(\cos x) = 10 \arcsin(\sin(\frac{\bar{u}}{2} - x))$

1) $-2\bar{u} \leq x \leq -\bar{u}$

$10 \arcsin(\sin(\frac{\bar{u}}{2} - x)) = \bar{u} - 2x$

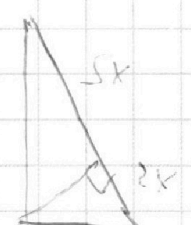
$-\frac{\bar{u}}{2} \leq \frac{\bar{u}}{2} - x \leq \frac{\bar{u}}{2}$

$10(\frac{\bar{u}}{2} - x - 2\bar{u}) = \bar{u} - 2x$

$5\bar{u} - 10x - 20\bar{u} = \bar{u} - 2x$

$-16\bar{u} = 8x$

$x = -2\bar{u}$



$2\bar{u} \leq x \leq 3\bar{u}$

$\frac{\bar{u}}{2} - x + 2\bar{u}$

$-3\bar{u} \leq -x \leq -2\bar{u}$

$-\bar{u} \leq -x \leq 0$

2) $-\bar{u} \leq x \leq 0$

$10 \arcsin(\sin(\frac{\bar{u}}{2} + x)) = \bar{u} - 2x$

$-\frac{\bar{u}}{2} \leq \frac{\bar{u}}{2} + x \leq \frac{\bar{u}}{2}$

$10(\frac{\bar{u}}{2} + x) = \bar{u} - 2x$

$5\bar{u} + 10x = \bar{u} - 2x$

$4\bar{u} = -12x$

$x = -\frac{\bar{u}}{3}$

$25 + 10$

$35x$

$\bar{u} \quad 2\bar{u}$

$-2\bar{u} \leq -x \leq -\bar{u}$

$-x + 2\bar{u} \leq$

$\frac{\bar{u}}{2} + x - 2\bar{u}$

$-\bar{u} \leq x \leq 0$

$-5\bar{u}$

3) $0 \leq x \leq -\bar{u}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including several geometric diagrams and algebraic calculations.

Top Left: Logarithmic calculations:
 $\log_5^4 2 - 3 \log_2 5$
 $\frac{1 - 5/9}{\log_2 5} \cdot 5$
 $\frac{2}{3} \log_2 5 - 3$

Top Right: Geometric diagram of a triangle with vertices A, B, C, D, E, F. Angles are labeled as $5x$, $2x$, $90^\circ - \alpha$, and $180^\circ - \alpha$.

Middle: A large circle with points A, B, C, D, E, F on its circumference. Angles are labeled as $5x$, 2α , and $90^\circ - \alpha$. A calculation shows $CF = \frac{EB\sqrt{14}}{5}$.

Bottom Left: Algebraic calculations:
 $\frac{CF}{\sqrt{10}x} = \frac{CE}{\sqrt{35}x}$
 $\frac{CF}{CE} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}}$
 $CF = \frac{y\sqrt{10}}{\sqrt{35}}$

Bottom Right: Geometric diagram with a calculation: $\frac{CF}{\sqrt{35}x - y} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^2} 625 - 3 \quad \frac{165}{15} \Big/ 11$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{1}{3} \log_{2x} 5^4 - 3 \quad \frac{15}{15}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \log_5(2x) - 3$$

$$t = \log_5 2x \quad ; \quad x \neq \frac{1}{2} \quad \log_5 2x + \log_5 y = 0$$

$$t^2 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} t - 3 \quad 2xy = 1$$

$$3t^3 - 9 - 4t + 9t = 0 \quad 3t^3 - 4t - 9 = 0$$

$$t^3 = \frac{13}{3} \quad 3t^3 + 9t - 13 = 0$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{13}{3}} \quad t \neq 0 \quad (6t^2 + 3t - (3t^3 - 13 + 2t))$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_5 5 - 3 \quad 6t^2 - 3t^2$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3 \quad \frac{3t^2 - 13}{t^4} > 0$$

$$\log_5^4 y = \log_5^4(2x) =$$

$$3 \log_5^4(2x) = 4 \log_{2x} 5 + 5 \log_{2x} 5 - 3$$

$$3 \log_5^4 y = -\log_y 5 - 12 \log_4 5 - 3$$

$$3 \log_5^4(2x) = 13 \log_{2x} 5 - 3$$

$$3 \log_5^4 y = -12 \log_y 5 - 3$$

$$3(\log_5^4 2x - \log_5^4 y) = 13(\log_{2x} 5 - \log_y 5)$$

$$3t^2 + 3t - 13 = 0 \quad f(\log_5 2x) = \quad 3t = \frac{13}{t} - 3$$

$$165 \quad f(\log_5 y) \quad \frac{3t^2 - 13 + 3t}{t} = 0$$

$$\log_5 2x = -\log_5 y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3 \log_5^4(2x) = \frac{13}{\log_2 x} - 9$$

$$3 \log_5^4(y) = -\frac{13}{\log_2 y} - 9$$

$$3(\log_5^2(2x) - \log_5^2(2y))(\log_5^2 2x + \log_5^2 2y) =$$

$$= 13 \left(\frac{\log_2 y}{5} - \frac{\log_2 x}{5} \right) \cdot 16$$

$$f(t) = 3t^4 - \frac{13}{t} + 9$$

$$= \frac{3t^5 + 9t - 13}{t}$$

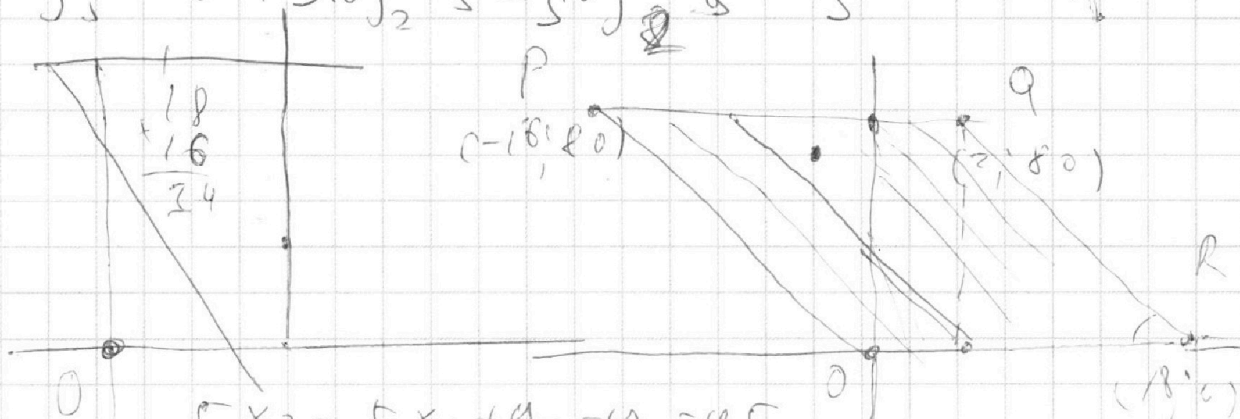
$$\log_5 2x$$

$$3t^5 + 9t - 13 = 0$$

$$15t^4 + 9 = 0$$

$$x = 1, \quad y = \frac{1}{2}$$

$$\log_5^4 2 = 3 \log_2 5 = \frac{4}{3} \log_2 5^4 - 3$$



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45.5$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$y = -5x + 5x_2 + y_2 - 45$$

$$y = 5x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y = 3x + 1$
 $x = -\frac{1}{3}$
 $- \frac{a}{3}$
 -1
 $(5\sqrt{3})$

$y = ax + 4b$
 $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$
 $(-\frac{5\sqrt{3}}{3})$
 $(\frac{5\sqrt{3}}{3})$
 $10 \text{ arcsin}(\cos(x)) = \pi - 2x$
 $10 \text{ arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$
 $(\frac{\pi}{2} - x)$
 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi$
 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$

$x^2 + y^2 = 1$
 $x^2 + (y-10)^2 = 36$
 16
 $\frac{4}{12}$
 $\frac{4}{3\sqrt{3}}$
 C
 B

$-2\sqrt{3} \leq x \leq 3\sqrt{3}$
 $-\frac{10}{2\sqrt{3}}$
 $-5\sqrt{3} \leq x \leq 5\sqrt{3}$
 $-6\sqrt{3} \leq x \leq 4\sqrt{3}$
 $-2\sqrt{3} \leq x \leq 3\sqrt{3}$

$\frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$
 $-\sqrt{3} \leq -x \leq 0$
 $1) 0 \leq x \leq \sqrt{3}$
 $2) \sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}$
 $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$
 $+ \pi$
 $\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{3} - \pi$
 $\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
 $\frac{\pi}{2} + x$
 $y^2 - 20y + 100$
 $+ x^2 - 36$
 $\frac{5\sqrt{3}}{3} / \frac{2}{12}$
 $100 - 45$
 $5\sqrt{3}$
 $(15\sqrt{3} + 9) - 3 + 5 - 7(6 + 2\sqrt{3})$
 $5\sqrt{3} - 12\sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot 29$
 $bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$
 $ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{19}$
 $(abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$
 $(abc)^2: 2^1 \cdot 3^{17} \cdot 5^{27} \cdot 29$
 $abc: 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{17}{2}} \cdot 5^{\frac{27}{2}} \cdot \sqrt{29}$

$\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 27 \cdot x = 1 \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{9} > \sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$
 $\frac{c}{a} = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$2a = 34$
 $a = 17$
 $c = 55$
 $(abc)^2 = 3^{55}$

$a+b = 12$
 $b+c = 12$
 $a+c = 20$
 $a-b = 22$
 $abc = 1 \cdot 3$
 $abc^2 = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
 $2a = 55$

$abc \geq 2 \cdot 3 \cdot 5$
 $a = 2 \cdot 5 = 10$
 $b = 2 \cdot 3 = 6$
 $c = 2 \cdot 5 = 10$

$\frac{c}{a} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot d$
 $\frac{c}{b} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot b$

$a+b+c = 12$
 $a+b = 8$
 $b+c = 12$
 $a+c = 14$
 $d-b = 2$

$ab = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{22}$
 $a^2 = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$
 $a \cdot 5^{10} = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$2a = 10$
 $a = 5$
 $b = 3$
 $2a = 15$

$abc = a \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^{22} \cdot a \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot a$
 $abc = a^3 \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{27}$

$\sqrt[3]{39} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a$
 $a^2 = 2^{11} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$

$a+b+c = 55$
 $a+b = 14$
 $a^2 = 2^{11} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$
 $b = 0$
 $a = 12$
 $c = 27$

$a+b+c = 39$
 $a+c = 39$