



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11 Пусть тогда $\exists k, p, m$ такие, что:

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m$$

$$ac = 2^{15} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot m \cdot p \cdot k$$

чтобы это число являлось полным квадратом
(степени у 2, 3 и 5-должны быть четными)
произведение $m \cdot p \cdot k$ должно содержать множитель
 $5 \cdot 5$.

К примеру $(abc)^2 : (ac)^2 \Rightarrow$ уберем степень

$$\text{минимум } 7 : \sqrt{5^{53} \cdot 5^7} = \sqrt{5^{60}} = 5^{30}$$

$$\text{тогда } \exists m \cdot p \cdot k = 3 \cdot 5^7 \Rightarrow (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Отсюда: } c = \frac{2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}}{m}$$

$$b = \frac{2^{2k} \cdot 3^3}{p}$$

$$a = \frac{2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}}{m}$$

Видно, что $\begin{cases} p=1 \\ p=3 \end{cases}$

$$\text{Тогда пусть } \begin{cases} p=3 \\ m=5^4 \\ k=5^3 \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} \\ b = 2^2 \cdot 3^2 \\ a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{13} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

тогда: $ac = 2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^{30}$

$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}$ - пример, удовлетворяет условию.

$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{17}$

$\Rightarrow \text{т.р.к.} = 3 \cdot 5^7$ - удовлетворяет условию

т.р.к. не может быть равно $3^i \cdot 5^j$, где $i < 7$

ведь тогда не будет выполняться условие

делимости $(abc)^2 \div (ac)^2$ и четности степеней 3 \Rightarrow

$\Rightarrow \text{т.р.к.} = 3 \cdot 5^7$ - минимальное

число abc минимальное = $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Ответ: $abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

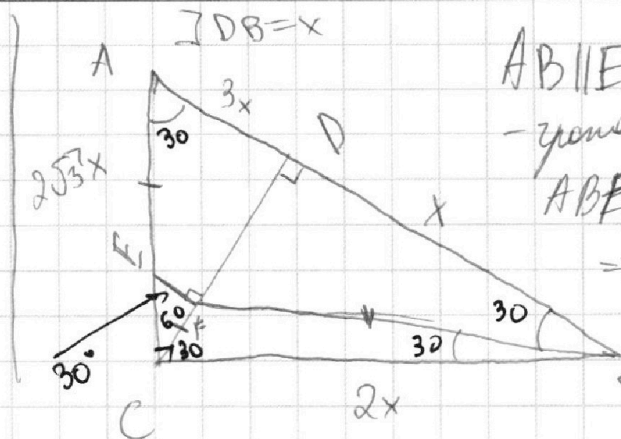
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AB \parallel EF$
 $AD:DB = 3:1$
 $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$



$AB \parallel EF$ - ABFE
 - трапеция
 $ABFE$ - вписана \Rightarrow
 $\Rightarrow ABFE$ - р/б
 трапеция \Rightarrow
 $\Rightarrow AE = BC$

$CD = \sqrt{3x^2 - x^2} = x\sqrt{3} \Rightarrow CB = 2x$
 $\angle ACB = 2\sqrt{3}x \Rightarrow \angle DCB = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FBC = 60 - 30 = 30^\circ \Rightarrow CF = FB$ (р/б треугол) $= AE = y$

$\angle CEF = 30^\circ \Rightarrow CF = \frac{CE}{2} \Rightarrow CE = 2y \Rightarrow AC = 2y + y = 3y =$
 $= 2\sqrt{3}x \Rightarrow y = \frac{2}{3}\sqrt{3}x$

$S_{ABC} = \frac{CD \cdot AB}{2} = x\sqrt{3} \cdot 2x = 2x^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}x^2$

$S_{CEF} = \frac{\sin 60^\circ \cdot CE \cdot CF}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}x \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}x}{2} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{9}x^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}x^2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{2\sqrt{3}}{9}x^2} = 9$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

Известно, что: $\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2} \quad y \in [-1; 1]$

$$\exists y = \cos x \quad \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

Тогда: $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\pi = 6x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда у этой касательной коэф при $x = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$
А у второй касат. в силу симметрии
коэф $\frac{5\sqrt{11}}{11}$. Тогда все прямые у которых
коэф $\in \left[-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11}\right]$ при x (назовем его c)

$$\begin{cases} c \leq -\frac{5\sqrt{11}}{11} \\ c \geq \frac{5\sqrt{11}}{11} \end{cases} - \text{не подходит} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{подходит } c \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$$

$$\text{то есть } \begin{cases} -\frac{a}{2} > -\frac{5\sqrt{11}}{11} \\ -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{10\sqrt{11}}{11} \\ a > -\frac{10\sqrt{11}}{11} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}, \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

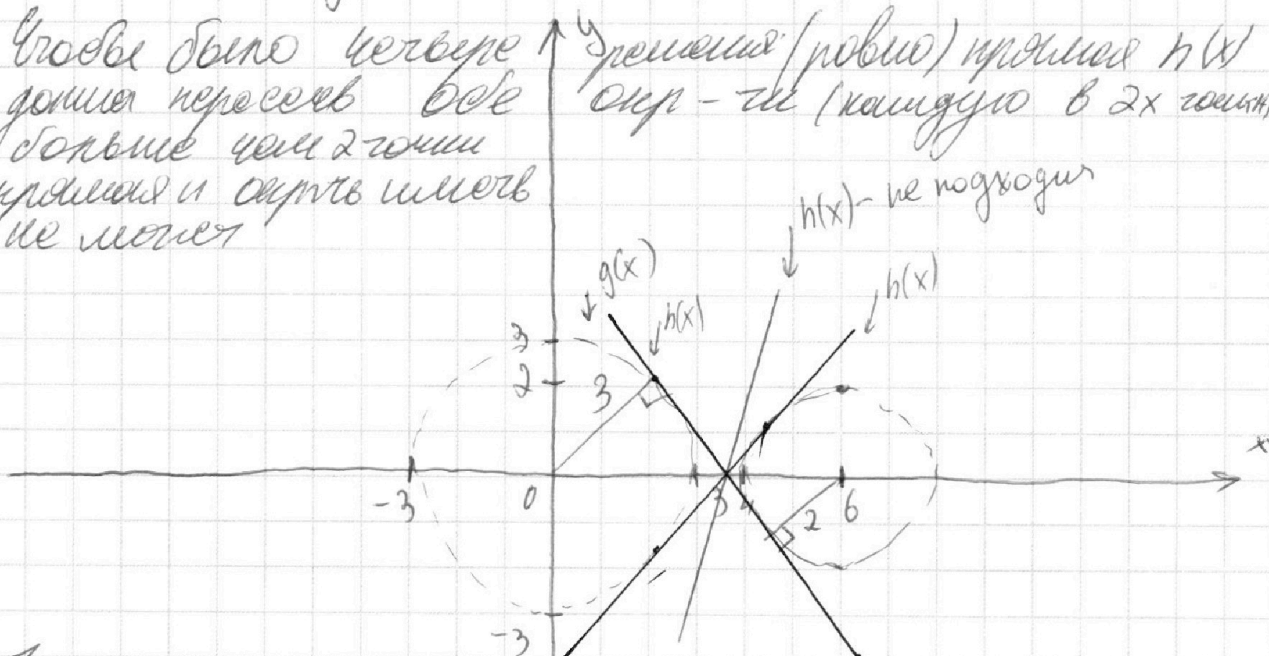


$$14 \quad \begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-ax+3b}{2} \\ x^2+y^2=3^2 \Leftrightarrow \\ (x-6)^2+y^2=2^2 \end{cases}$$

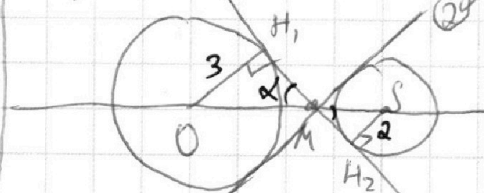
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b = h(x) \\ x^2+y^2=3^2 = g(x) \\ (x-6)^2+y^2=2^2 = f(x) \end{cases}$$

a - наклон прямой $h(x)$
 b - сдвиг прямой $h(x)$

Чтобы было четвере
точки пересек все
больше чем 2 точки
прямая и окружность
не может



Тогда крайнее положение прямой - их общие
касательные



$$\triangle OH_1M \sim \triangle MS \Rightarrow \frac{OM}{MS} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} OM+MS=6 \\ OM = \frac{18}{5} \\ MS = \frac{12}{5} \end{cases} \quad \text{①} \Rightarrow$$

$$\rightarrow MH_1 = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 9} = \frac{3}{5}\sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{OH_1}{MH_1} = \frac{3}{\frac{3}{5}\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{1}{2} \log_x 3^5 - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \log_3 x = a \\ \log_3(5y) = b \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{7}{2a} + 8 = 0 \quad a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 a^5 + 16a + 7 = 0 = f(a)$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^4 - \frac{7}{2b} + 8 = 0 \quad b \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2b^5 + 16b - 7 = 0 = g(b)$$

$$f'(a) = 10a^4 + 16a > 0 - f(a) \uparrow \text{ на всем } D_a$$

$$g'(b) = 10b^4 + 16 > 0 - g(b) \uparrow \text{ на всем } D_b$$

$\Rightarrow a$ и b при которых $f(a) = 0$; $g(b) = 0$ -

единственные.

$$\text{к тому же } f(-b) = -g(b) = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\text{значит } a + b = -b + b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3(5y) = \log_3(x \cdot 5y) = 0 \Rightarrow x + 5y = 1$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

$$5xy = 1 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$xy = \frac{1}{5}$ - единственное решение безы
а и б - единственные.
Ответ: $xy = \frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

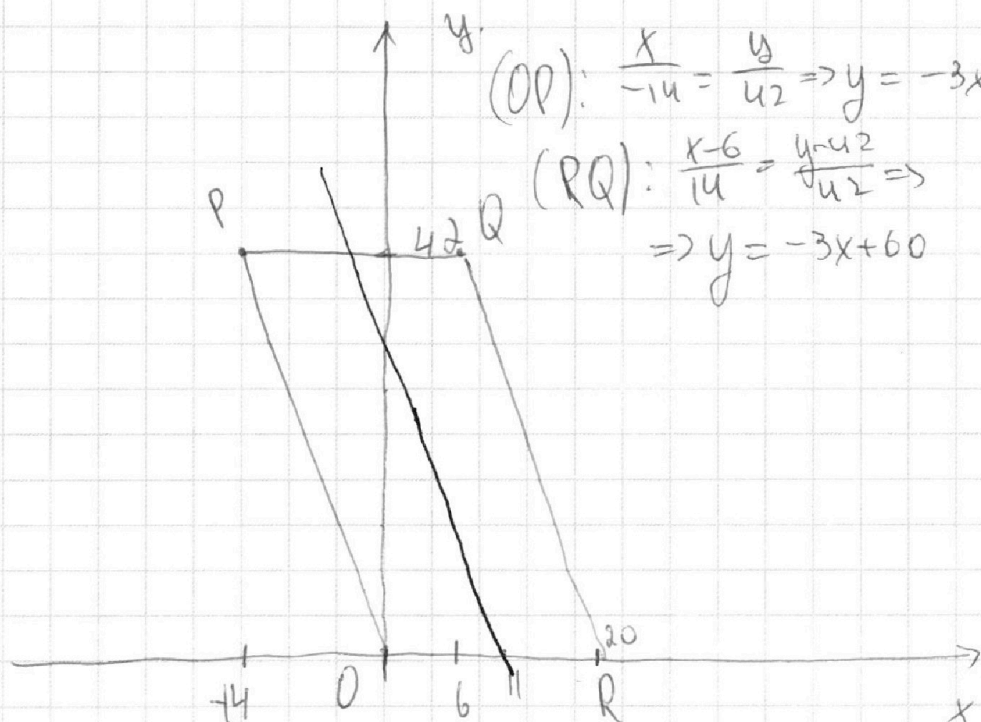


№ 0(0;0)

P(-14; 42)

Q(6; 42)

R(20; 0)



На $[OR]$ - 21 целая точка, если $(OP) \equiv y = -3x$; $RQ = -3x + 60$;
тогда на второй стороне 20 целых и на третьей 20 целых
а на четвертой опять 21 целая (в силу того, что $y \neq 3$)
Всего $42 + 1 = 43$ отрезки: $43 = 42 + 1 = 14 \cdot 3 + 1$

Тогда всего целых точек $(5+4+4) \cdot 14 + (21+20+20) \cdot 14 +$
 $+ 21 = 69 \cdot 14 + 21 = \del{826} = \del{827} = \del{847} = 875$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \quad \exists R(x_1; y_1) \quad M(x_2; y_2)$$

для точки $P(0;0)$ парными будут все целые точки
внутри параллелограмма, лежащие на прямой $y = -3x + 33$
Она проходит через точку $(11; 0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Всего целых точек на оси абсцисс (показано 3а и 4б) -
- 14 + 1 - 15 точек

Получается, что для каждой точки на оси
OX существует две прямые, все точки на
которых "портные" или, отсюда следует
что для всех точек на OX, кроме (0; 10)
существует ровно одна такая прямая лежащая
внутри параллелограмма для (0; 10) обе
эти прямые все (одна проходит через
(-1; 0) другая через (21; 0) паралл. отрезкам RQ и RD)
то есть для всех отрезков отрезков на паралл-не
ординатах ~~существует~~ которых: 3 будет 15 парных точек
для каждой точки (кроме центральной)

то.есть : $20 \cdot 15 \cdot 15 = 20 \cdot 15^2$ точек

На верхней и нижней границе по 20 точек
и будет подходить для каждой из них кроме
одной, тогда

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для второй стороны крайнее число

$$\frac{43-1}{3} = 14 \text{ целых точек}$$

Для третьей стороны $\frac{39}{3} = 13$ целых

тогда для второй: $(20-1) \cdot 14 = 19 \cdot 14$

для третьей: $(20-1) \cdot 13 = 13 \cdot 19$

Всего сторон точек (ордината $\equiv 1$): 14 штук

трех (ордината $\equiv 2$): 14 штук

Итого количество: $\frac{20 \cdot 15^2 + 19 \cdot 14^2 + 13 \cdot 15 \cdot 14}{2}$

Решим на 2-х к. координат QM и MR - одно и то же

Ответ: $2250 + 1862 + 1781 = 5893$ точек на кр

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 2250 \\ + 1862 \\ + 1781 \\ \hline 5893 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p$$

$$\begin{aligned}
 abc &= 10^{18} \cdot 30^7 \\
 ab \cdot ac \cdot bc &= \\
 &= (abc)^2 = m \cdot p \cdot k = 3 \cdot 5^7 \\
 &= 2^{42} \cdot 3^{44} \cdot 5^{53} \cdot m \cdot p \cdot k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 abc &= 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \\
 c &= \frac{2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13}}{2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}} = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\begin{aligned}
 \log ab + \log bc &= \\
 b &= \frac{2 \cdot 3^4}{m} \\
 a \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot p^{13} &= \frac{2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3}
 \end{aligned}$$

$$a = \frac{2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}}{m \cdot p \cdot k}$$

$$a \cdot b = \frac{2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}}{m \cdot p \cdot k} = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

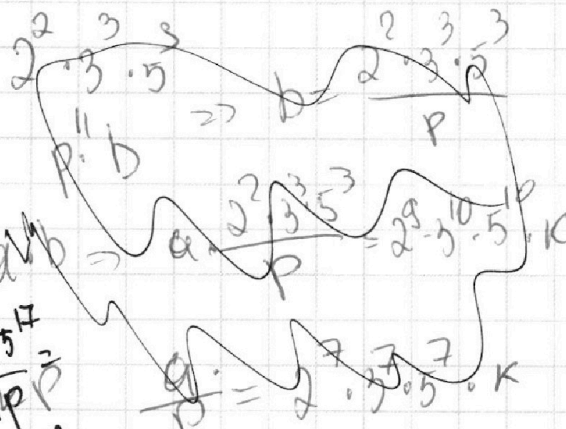
$$ac = \frac{2^{19} \cdot 3^{19} \cdot 5^{37}}{m \cdot p \cdot k} = m \cdot p \cdot k$$

$$am \cdot bp = m \cdot p \cdot k = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}$$

$$mpk \cdot mpk \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}$$

$$am \cdot bp = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \cdot 2 \cdot 3^3 = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} = m \cdot p \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$mpk = 3 \cdot 5^7$$



$$\begin{aligned}
 a \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot m &= 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \\
 am &= 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \\
 b \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p &= 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\left(\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \right)$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$a^4 + \frac{7}{2a} + 8 = 0$$

$$b^4 - \frac{7}{2b} + 8 = 0$$

$$2a^5 + 7a + 8 = 0$$

$$2b^5 - 7b + 16 = 0$$

$$a^5 + 8a = -\frac{7}{2}$$

$$b^5 + 8b = \frac{7}{2}$$

$$2(a^5 + b^5) + 7a + 8 = 0$$

$$2(a^5 + b^5) + 16 \log_3(5y) + \frac{7}{2} + 8 = 0$$

$$6 - \frac{5}{2a} + \frac{7}{2a} + 8 = 0$$

$$b^5 - \frac{7}{2b} + 8 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3(xy)$$

$$x \cdot y = z$$

$$5xy = 5z$$

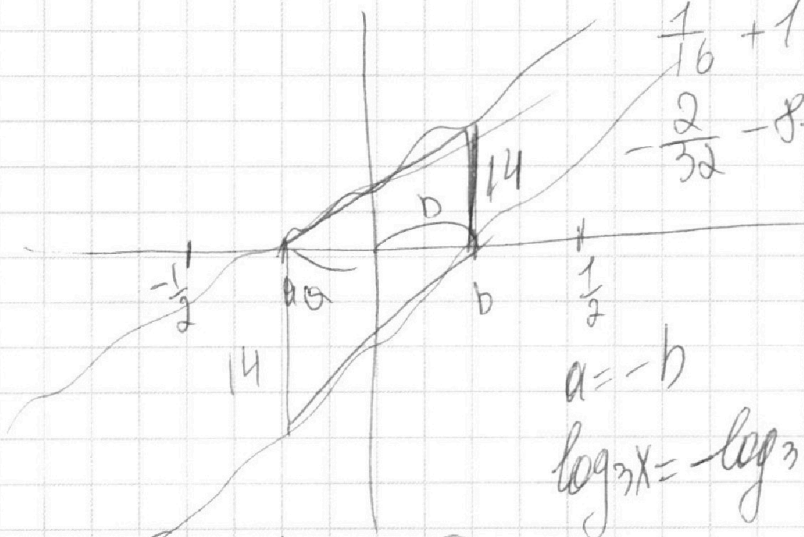
$$\log_3(xy) = \log_3(5z)$$

$$-\frac{2 \cdot 1}{4^5} z - 4 + 7 = 0$$

$$\frac{2}{32} + \frac{16}{2} - 7 - \frac{2}{2^{10}} + 3 = 0$$

$$\frac{1}{16} + 1 = 0$$

$$-\frac{2}{32} - 8 + 7 = 0$$



$$-2b^5 + 16b + 7 = 0$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y$$

$$x =$$

$$a + b = -b + b = 0$$

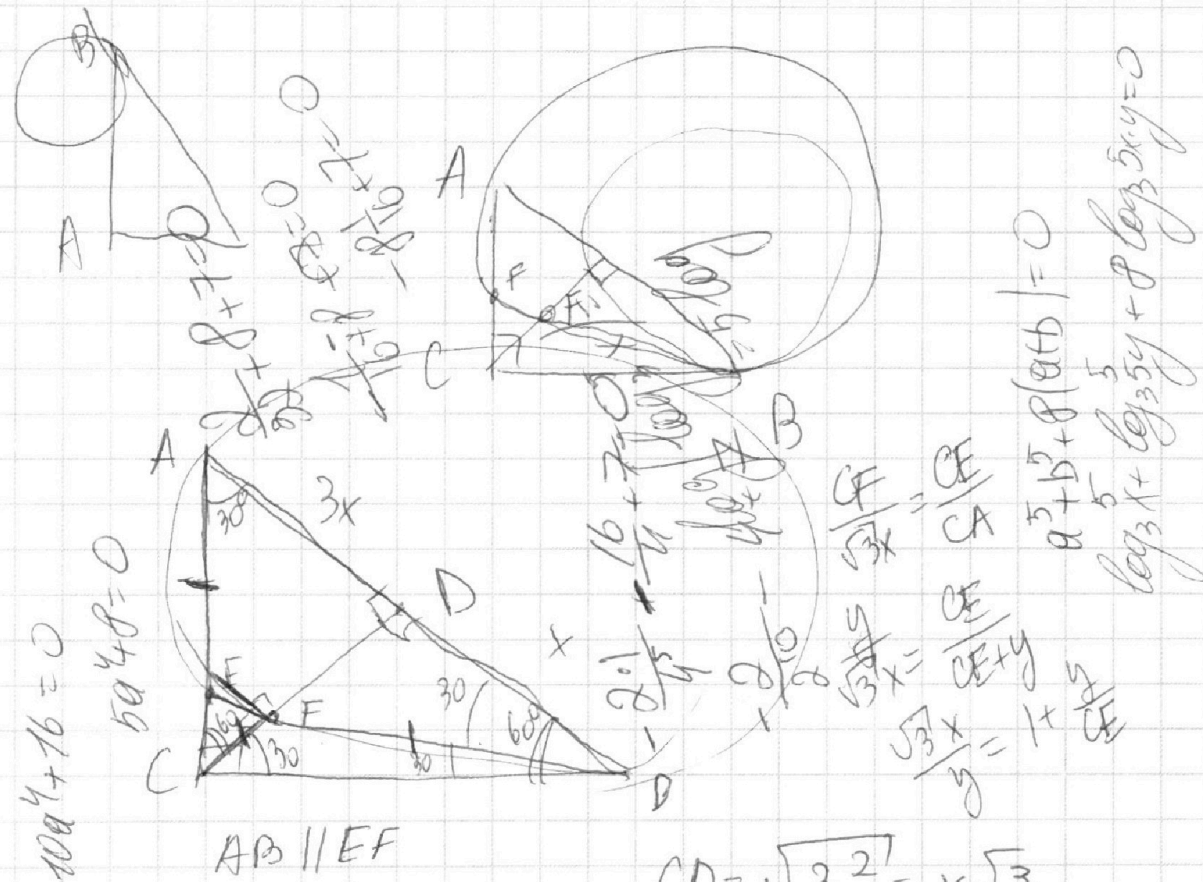
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

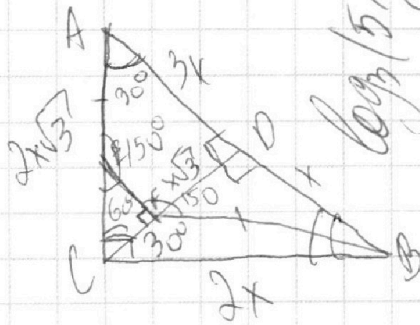


$AB \parallel EF$

$AD:DB = 3:1$

$CD = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABD}}{S_{CEF}}$



$3x^2 + x^2 = 2x$

$9x^2 + 3x^2 =$

$2x^2$

$= x\sqrt{12} = 2x\sqrt{3}$

$\frac{3}{2}y = 2x\sqrt{3}$

$y = \frac{4x\sqrt{3}}{3}$

$\frac{AC}{CE} = \frac{3x}{y}$

$S_{ABC} = 2x \cdot x\sqrt{3}$

$S_{CEF} = 3y = 2x\sqrt{3}$
 $y = \frac{2}{3}x\sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\arcsin(\sqrt{1-x^2})$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi + 3\pi}{6}$$

$$\frac{4\pi}{2} = 6x$$

$$x = \frac{2\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$5 \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$$

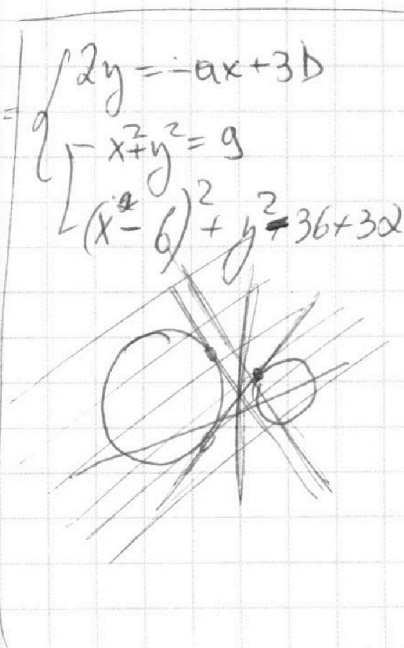
$$\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}$$

$$5 \arcsin$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi + 3\pi}{6}$$

$$= \sqrt{\frac{9-\pi^2}{9}}$$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} x^2 - 12x + 36$$

$$\begin{cases} 2y = -ax + 3b \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 36 + 3a \end{cases}$$




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$243 = 3^5$$

$$243 \overline{) 3}$$

$$81 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3$$

$$6 \cdot 229$$

$$243$$

$$243$$

$$\frac{OM}{MS} = \frac{3}{2} \quad OM + MS = 6$$

$$OM = \frac{3}{2} \cdot MS \quad \frac{3}{2}MS + MS = 2,5MS = 6$$

$$MS = \frac{6 \cdot 2}{5} = \frac{12}{5}$$

$$OM = \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3 \cdot 6}{5} = \frac{18}{5}$$

$$OM = \frac{18}{5}$$

$$OM \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 9} = \sqrt{\frac{18^2}{25} - 9} =$$

$$= \sqrt{\frac{324 - 225}{25}} =$$

$$= \sqrt{\frac{99}{25}} = \frac{3}{5} \sqrt{11}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5 \sqrt{11}} = \frac{3}{5 \sqrt{11}}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \cdot 18 \\ \hline 108 \\ + 18 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$360$$

$$-360$$

$$49$$

$$\frac{49}{5}$$

$$4$$

$$-25$$

$$225$$

$$-225$$

$$99$$

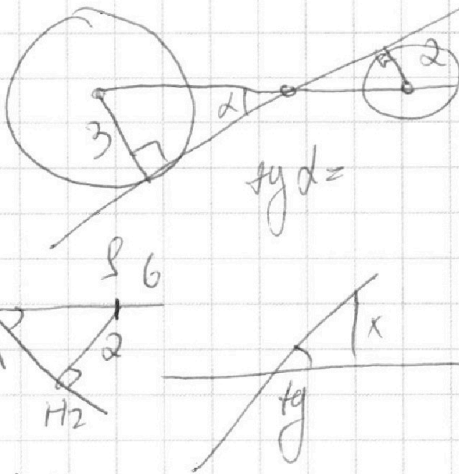
$$y = -100x$$

$$\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$$

$$\frac{a}{2} > -\frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$a > -\frac{10\sqrt{11}}{11}$$



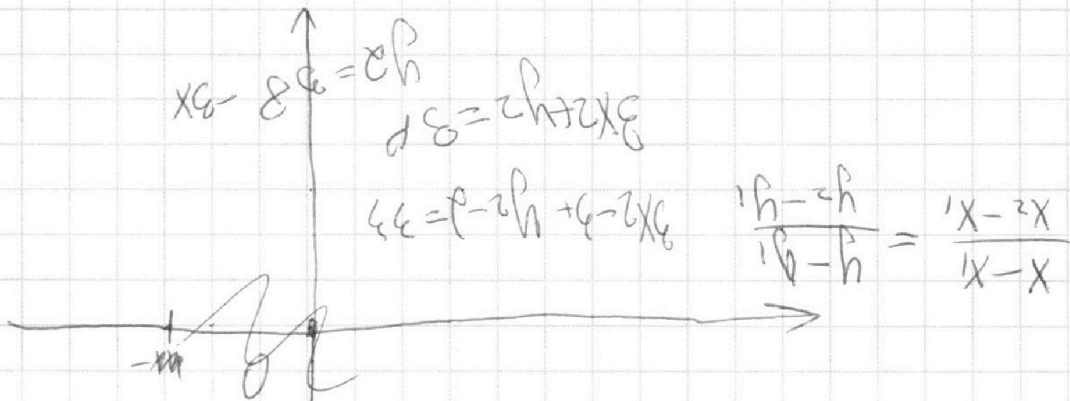
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 + y^2 = 33$$

$$y^2 = 33 - 3x^2$$

$$x \cdot y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{x}$$

$$3x^2 + \left(\frac{11}{x}\right)^2 = 33$$

$$3x^2 + \frac{121}{x^2} = 33$$

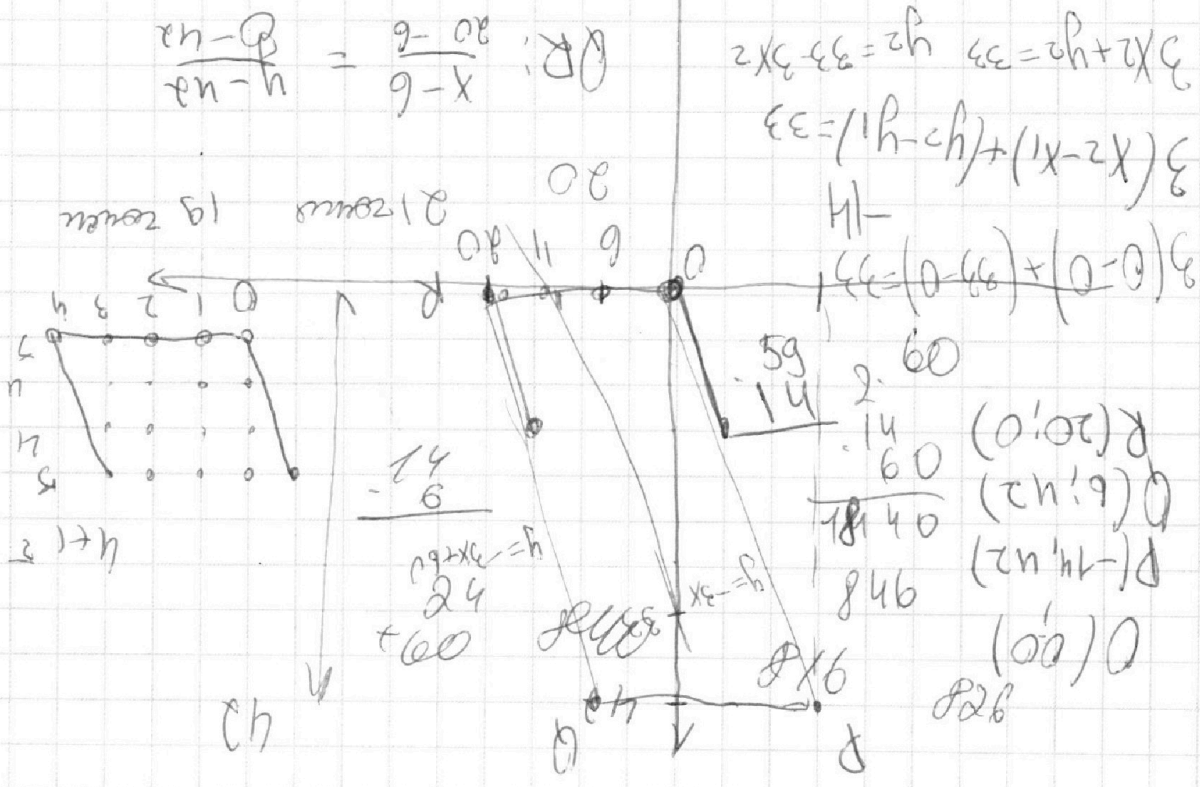
$$3x^4 + 121 = 33x^2$$

$$3x^4 - 33x^2 + 121 = 0$$

$$x^2 = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 3 \cdot 121}}{2 \cdot 3}$$

$$x^2 = \frac{33 \pm \sqrt{1089 - 1488}}{6}$$

$$x^2 = \frac{33 \pm \sqrt{-399}}{6}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-3x + 3y = 33$$

$$P(x_2; y_2)$$

$$PH = ($$

$$H(x_1; y_1)$$

$$-3x_2 + y_2 = 33$$

$$3x_2 - 30 + y_2 - 0 = 33$$

$$y_2 = 63 - 3x_2$$

12

ок

$$3x_2 - 6 - y_2 - 0 = 33$$

$$y_2 = 39 - 3x_2$$

$$13 \quad (0; 1)$$

$$3x_2 - 0 + y_2 - 1 = 33$$

$$3x_2 + y_2 = 34$$

$$y_2 = 34 - 3x_2$$

$$33 = 11$$

$$36 = 12 \quad 60 = 20$$

$$39 = 13$$

$$-3x_1 - y_1 = 33$$

$$y_1 = -3 + 3x_1 \quad y_1 + 3x_1 = 33$$

$$y_1 = 33 - 3x_1$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1$$

$$+ 1 = 34 - 3x_2$$

$$-33 = -3x_2$$

$$x = 3$$

$$30 - 3x_1 + 0 - y_1 = 33$$

$$30 - 3x_1 - y_1 = 33$$

$$3x_1 + y_1 = -3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

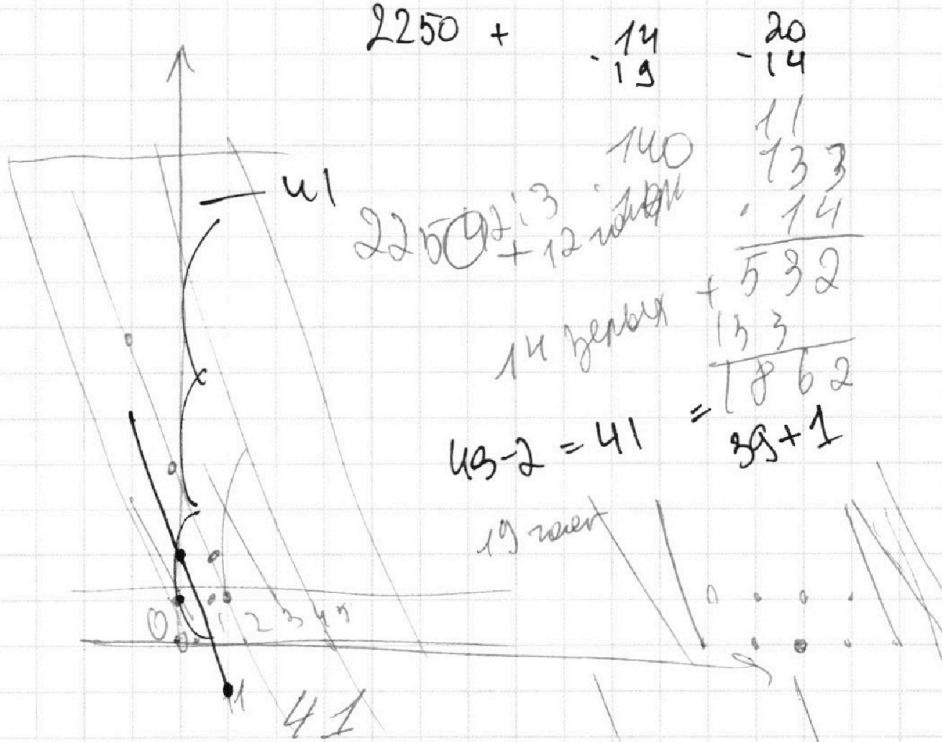
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2250 + 7 \cdot 14 \cdot 19 + 19 \cdot 13^2 - 2$$



$$2250 + \begin{matrix} -14 \\ 19 \end{matrix} - \begin{matrix} 20 \\ 14 \end{matrix}$$

$$2250 + 13 + 12$$

$$14 \text{ берем} + 532$$

$$43 - 2 = 41 = 38 + 1$$

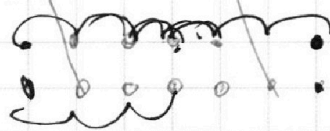
01:

$$3x_2 - 0 + y_2 - 1 = 33 \quad y_2 = 1$$

$$x = 11$$

$$3x_2 + y_2 = 34$$

$$y_2 = 34 - 3x_2$$



$$\begin{array}{r} 61 \\ - 14 \\ \hline 244 \\ + 61 \\ \hline 854 \\ + 21 \\ \hline 875 \end{array}$$

$$19 \cdot 13 - 7$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ - 13 \\ \hline 124 \end{array}$$

$$20 \cdot 14^2$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ - 13 \\ \hline 411 \\ + 137 \\ \hline 1781 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ - 13 \\ \hline 124 \\ + 277 \\ \hline 401 \end{array}$$