МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Докажем, что при минимальном произведении abc, $a = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$

Предположим противное: $\exists$ $a = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot t$, где $t > 1$, $t \in \mathbb{N}$, $(t;2)=1$; $(t;3)=1$; $(t;5)=1$

Тогда рассмотрим число $a' = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$. Оно удовлетворяет условиям, т.к. если $a \cdot b \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, т.е. $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot t \cdot b \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}$, то $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot b \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}$ (т.к. $(t;2)=1$; $(t;3)=1$; $(t;5)=1$), т.е. $a'b \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}$.

При этом $abc > a'bc \Rightarrow abc$ - не минимально ?!

Аналог.: $b = 2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{y_3}$; $c = 2^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot 5^{z_3}$.

Тогда:

$$ab \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 \geq 7 & (1.1) \\ x_2 + y_2 \geq 11 & (1.2) \\ x_3 + y_3 \geq 14 & (1.3) \end{cases} \qquad bc \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + z_1 \geq 13 & (2.1) \\ y_2 + z_2 \geq 15 & (2.2) \\ z_3 + y_3 \geq 18 & (2.3) \end{cases}$$

$$ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + z_1 \geq 14 & (3.1) \\ x_2 + z_2 \geq 17 & (3.2) \\ x_3 + z_3 \geq 43 & (3.3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1.1)+(1.2)+(1.3): \quad 2(x_1+y_1+z_1) \geq 34 \\ &(2.1)+(2.2)+(2.3): \quad 2(x_2+y_2+z_2) \geq 43 \\ &(3.1)+(3.2)+(3.3): \quad 2(x_3+y_3+z_3) \geq 75 \end{aligned}\right\} \Rightarrow abc = 2^{x_1+y_1+z_1} \cdot 3^{x_2+y_2+z_2} \cdot 5^{x_3+y_3+z_3} \geq$$

$$\geq 2^{17} \cdot 3^{\lceil \frac{43}{2} \rceil} \cdot 5^{\lceil \frac{75}{2} \rceil} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

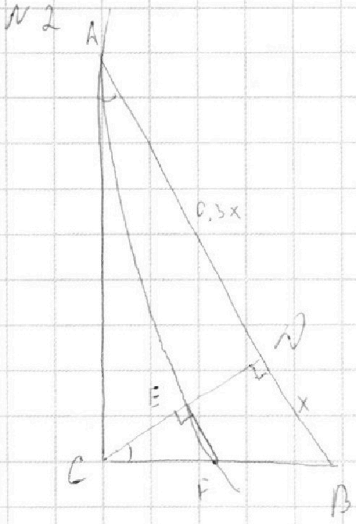
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



$\rceil BD = x \Rightarrow AB = 1{,}3x \Rightarrow AD = 0{,}3x$

$\left.\begin{array}{l}\angle CAD = \angle DCB \\ 90^\circ = \angle ADC = \angle CDB\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle CDB$

$\Downarrow$

$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow DC = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{\frac{3}{10}}$

$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{9}{100}x^2 + \frac{3}{10}x^2} = x\,\frac{\sqrt{39}}{10}$

$BC = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \cdot \frac{3}{10}} = x\sqrt{\frac{13}{10}}$

Степень точки C отн. окр-ти:

$AC^2 = CF \cdot CB \Leftrightarrow CF = \frac{AC^2}{CB} = \frac{x^2 \cdot 39 \cdot \sqrt{10}}{100 \cdot x \cdot \sqrt{13}} = x \cdot \frac{39\sqrt{10}}{100\sqrt{13}}$

$\left.\begin{array}{l}EF \parallel AB \\ CD \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow EF \perp CD$

$\left.\begin{array}{l}\angle CAD = \angle DCB \\ 90^\circ = \angle CEF = \angle ADC\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADC \overset{k}{\sim} CEF, \quad k = \frac{AC}{CF} = \cancel{\frac{x \cdot \sqrt{39} \cdot 100\sqrt{13}}{10 \cdot x \cdot 39\sqrt{10}}} =$

$= \frac{x \cdot \sqrt{39} \cdot \cancel{100} \cdot \sqrt{13}}{\cancel{10} \cdot x \cdot 39 \cdot \sqrt{10}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$

$\frac{S(ADC)}{S(CEF)} = k^2 = \frac{10}{3}$

Ответ: $\frac{10}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 ~~Arccos~~

$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

Найдём чему равен $\arccos(\sin x)$

$]\ \arccos(\sin x) = t \qquad |\cos(\ )$

$$\sin x = \cos t$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{(5-3)\pi}{2} = 6x$$

$$\pi = 6x \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

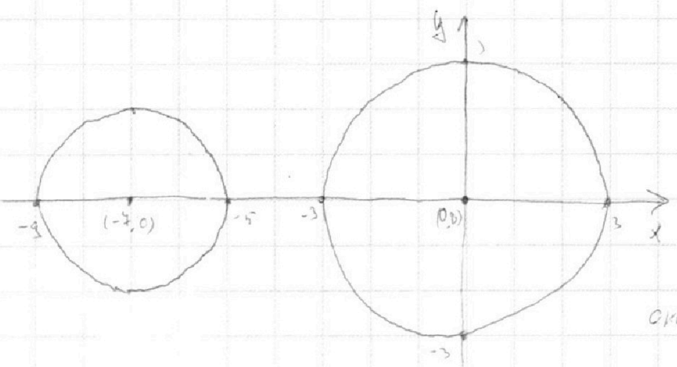
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

Для начала разберёмся со вторым уравнением.

$(x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0$

$\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=4 \text{ - окр-ть с центром } (-7;0), \text{ радиусом } 2 \\ x^2+y^2=9 \text{ - окр-ть с центром } (0;0), \text{ радиусом } 3. \end{array}\right.$



Любая прямая пересекается с окр-тью $\le$ по 2-м точкам.

Прямая $x+3ay-7b=0$ должна иметь ровно 4 пересечения, а это значит, что она пересекает каждую из окр-тей в 2-х точках.

То, что прямая пересек. окр в 2-х точках $\Leftrightarrow$ ρ(центра, прямой) $< R$.

$\begin{cases} \dfrac{|0+3a\cdot 0-7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 3 \\ \dfrac{|-7+3a\cdot 0-7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| < \dfrac{3\sqrt{9a^2+1}}{7} \\ |b+1| < \dfrac{2\sqrt{9a^2+1}}{7} \end{cases}$ ← знак не поменяется, т.к. мы делили на $\sqrt{9a^2+1} > 0$

$\exists\ t = \sqrt{9a^2+1}$, $t \in [1;+\infty)$. Тогда задача звучит так: при каких $t \in [1;+\infty)$ $\exists\ b$, удовл. условию:

$\begin{cases} |b| < \frac{3}{7}t \\ |b+1| < \frac{2}{7}t \end{cases}$

1) Найдем t, при которых $\exists\ b > 0$:

$\begin{cases} b < \frac{3}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases}$ Такой b существует, если $\begin{cases} \frac{3}{7}t > 0 \\ \frac{2}{7}t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t > \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t > \frac{7}{2}$

т.к. если одно из них будет < 0, то $b < \frac{\text{одно из}}{\text{них}} < 0$, а в случае $b > 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2) Найдем, когда есть $b \in [-1; 0]$

$$\cancel{\begin{cases} b > \frac{3}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{7}t < \frac{2}{7}t - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{7}t < -1 \Leftrightarrow t < -7, \text{ но } t = \sqrt{9a^2+1} > 0 \Rightarrow \varnothing}$$

~~3) Найдем, когда есть $b \in (-\infty; -1)$~~

$$\cancel{\begin{cases} b > \frac{3}{7}t \end{cases}}$$

$$\begin{cases} b > -\frac{3}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{7}t < \frac{2}{7}t - 1 \Leftrightarrow \frac{5}{7}t > 1 \Leftrightarrow t > \frac{7}{5}$$

При таком t: $-\frac{3}{7}t < -\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{5} = -\frac{3}{5}$; $\frac{2}{7}t - 1 > \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5} \Rightarrow b = -\frac{3}{5}$ - подх.

3) Найдем, когда есть $b < -1$

$$\begin{cases} b > -\frac{3}{7}t \\ b > -\frac{2}{7}t - 1 \end{cases}$$

Такой существует, если: $\left[\begin{array}{l} -\frac{3}{7}t < -1 \\ -\frac{2}{7}t - 1 < -1 \end{array}\right.$ $\begin{cases} t > \frac{7}{3} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > \frac{7}{3}$

аналог п.1.

4) Объединим все случаи:

$$\left[\begin{array}{l} t > \frac{7}{2} \\ t > \frac{7}{5} \\ t > \frac{7}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow t > \frac{7}{5} \Leftrightarrow \sqrt{9a^2+1} > \frac{7}{5} \Leftrightarrow 9a^2 + 1 > \frac{49}{25} \Leftrightarrow 9a^2 > \frac{24}{25} \Leftrightarrow a^2 > \frac{24}{25\cdot 9}$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty\right)$$

Ответ: при $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right), \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$

№5

1) $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{(6x)^2}7^3 - 4$ ОДЗ: $x>0;\ x\neq\frac{1}{6}$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 6x} - 4$

$\rceil \log_7(6x) = t$, т.к $6x\neq 1$, $t\neq 0$

$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \mid \cdot 2t$

$2t^5 - 4 = 3 - 8t \Leftrightarrow 2t^5 + 8t - 7 = 0$ (1)

2) $\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$ ОДЗ: $y>0;\ y\neq 1$

$\rceil \log_7 y = u$, $u\neq 0$

$u^4 + \frac{6}{u} = \frac{5}{2u} - 4 \mid \cdot 2u$

$2u^5 + 12 = 5 - 8u \Leftrightarrow 2u^5 + 8u + 7 = 0$ (2)

(1)+(2): $2(t^5 + u^5 + 4(t+u)) = 0$

$(t+u)(t^4 - t^3u + t^2u^2 - tu^3 + u^4 + 4) = 0$

$\cancel{(t+u)((t^2+u^2)^2 - t^2u^2 - tu(t^2+u^2) + 4) = 0}$

$(t+u)(t(t^3-u^3) - u(t^3-u^3) + t^2u^2 + 4) = 0$

$(t+u)((t-u)(t-u)(t^2+tu+u^2) + t^2u^2 + 4) = 0$

$(t+u)(\underbrace{(t-u)^2}_{\geq 0}\underbrace{(t^2+tu+u^2)}_{>0} + \underbrace{t^2u^2}_{>0} + \underbrace{4}_{>0}) = 0$

$\Downarrow$

$t = -u$

$t + u = 0$

$\log_7(6x) + \log_7(y) = 0$

$\log_7(6xy) = 0$

$6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

У ур-ний (1) и (2) точно есть ≥ 1 корень, т.к они нечётной степени.
При этом 0 не явл. корнем ни одного из этих уравнений

Тогда для этих $t_0\neq 0$ и $u_0\neq 0$ $\exists\ x, y$, а по только это один, $xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $1/6$

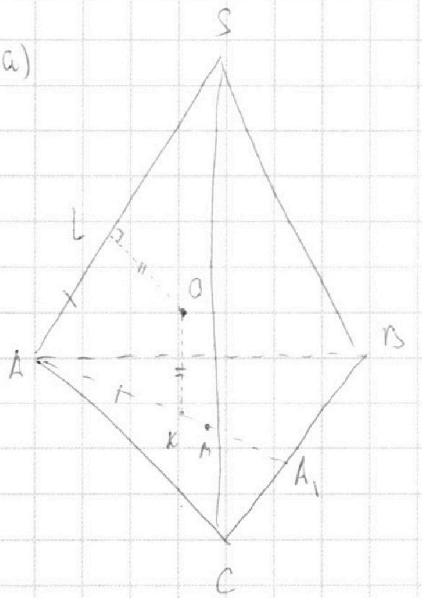
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

а)



1) $OK \perp ABC \Rightarrow OK \perp AM$

$OL \perp AL$

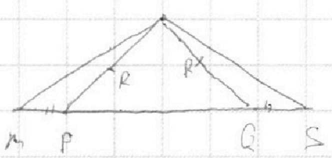
2) Рассм. $\triangle ALO$; $\triangle AKO$. AO - общ., $OL = OK$ - радиусы,

$\angle OLA = \angle OKA = 90^\circ \Rightarrow \triangle ALO = \triangle AKO$ (катет и гипот.)

$\Downarrow$

$AL = KA$

3) Рассм. м-ты OSM



$OM = \sqrt{R^2 + KM^2} > R$

$OS = \sqrt{R^2 + LS^2} > R \Rightarrow$

$\Rightarrow P, Q \in [MS]$

$OP = OQ$ - радиусы

$MP = QS$ - усл.

$\angle OPQ = \angle OQP$ ($\triangle OPQ$ - р/б)

$\Downarrow$

$\angle MPO = \angle SQO$

$\Rightarrow \triangle MPO = \triangle SQO \Rightarrow OM = OS$

(если P и Q поменяны местами, то аналог.)

4) Рассм. $\triangle OKM$; $\triangle OLS$:

$OL = OK$ - радиусы

$OM = OS$ (п.4)

$\angle OKM = \angle OLS = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle OSL = \triangle OKM$ (катет и гипот.) $\Rightarrow MK = LS$

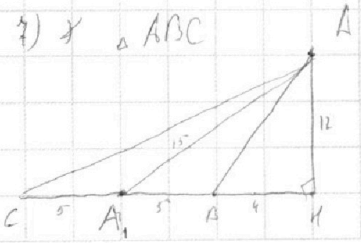
5) $AL = AK$ (п.2)

$MK = LS$ (п.4)

$\Rightarrow AL + LS = AK + KM \Rightarrow AM = AS = 10$

6) $AM = \frac{2}{3} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 15$

7) Рассм. $\triangle ABC$



$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = 60 \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 60}{10} = 12$

$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 9 > \frac{10}{2} \Rightarrow H$ падает вне $\triangle ABC$ (H за B)

$AB = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160}$

$AC = \sqrt{12^2 + 14^2} = \sqrt{340}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

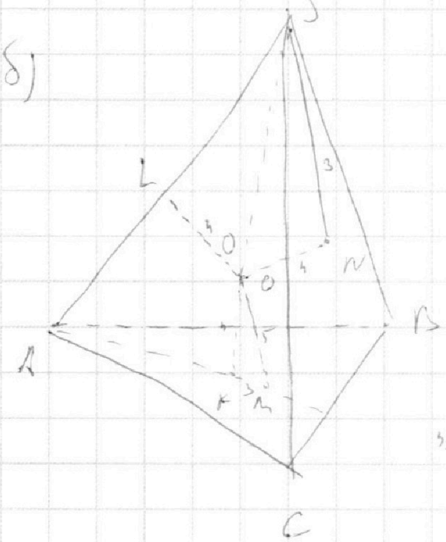
8) $BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2BA^2+2BC^2-AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot160+2\cdot100-340} = \frac{1}{2}\sqrt{180}$

$CC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2CA^2+2CB^2-AB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot340+2\cdot100-160} = \frac{1}{2}\sqrt{720}$

9) $AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = 15\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot6\sqrt{2} = \frac{15\cdot10\cdot3\cdot\cancel{6}^{3}\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 9\cdot15\cdot10 = 1350$

Ответ: 1350

б)

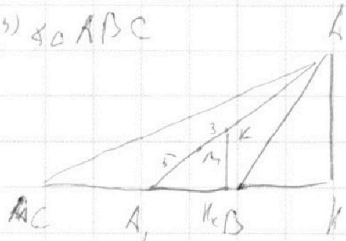


1) $ON \perp SBC \Rightarrow ON \perp SN \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle OSN$ – п/уг $\Rightarrow OS = 5$

2) по (a, 3): $OM = OS = 5 \Rightarrow KM = 3$

3) $\triangle ABC$



$A_1M = \frac{1}{3}AA_1 = 5$

$A_1K = 5+3 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1K = \frac{8}{15}AA_1 \Rightarrow A_1H_k = \frac{8}{15}A_1H = \frac{8}{15}\cdot9 = \frac{72}{15} < 5 \Rightarrow H_k \in [A_1B]$

$BK = \sqrt{H_kB^2 + KH_k^2} = \sqrt{\frac{1}{25}+\left(\frac{8}{15}\cdot12\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{32^2}{25}}$

$CK = \sqrt{H_kC^2 + KH_k^2} = \sqrt{\ldots}$

Дальше закапываться, поэтому только план:

Найти CK, BK, по теореме пифагора найти

$\Rightarrow KH_k = \frac{8}{15}\cdot AH = \frac{8}{15}\cdot12 = \frac{32}{5}$

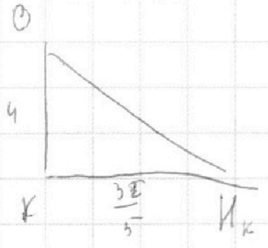
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4) $\left.\begin{aligned} &K = \text{пр}(O; ABC) \\ &KH_K \perp BC \end{aligned}\right\} \overset{3\perp}{\Rightarrow} OH_K \perp BC$



$$OH_K = \sqrt{16 + \frac{32^2}{25}}$$

5) $KBC = \text{Пр}_{ABC}\, OBC \Rightarrow \cos \widehat{BC} = \dfrac{S(KBC)}{S(OBC)} = \dfrac{\frac{1}{2} BC \cdot KH_K}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot OH_K} =$

$$= \frac{32 \cdot 5}{5 \cdot \sqrt{16 \cdot 25 + 32^2}} = \frac{32}{4\sqrt{25+64}} = \frac{8}{\sqrt{89}}$$

$$\widehat{BC} = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{89}}\right)$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{8}{\sqrt{89}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$

$2t^5 + 12 = 5 - 8t$

$2t^5 + 8t + 7 = 0$, $t = \log_7 y$

$+\ 2u^5 + 8u - 7 = 0$ $\quad u = \log_7 6x$

$t^5 + u^5 + 4(t+u) = 0$

$(t+u)(t^4 - t^3u + t^2u^2 - tu^3 + u^4) + 4(t+u) = 0$

$(t+u)(t^4 - t^3u + t^2u^2 - tu^3 + u^4 + 4) = 0$

$t = -u$

$\log_7 y + \log_7 6x = 0$

$\log_7 6xy = 0$

$xy = \frac{1}{6}$

$(t^2+u^2)^2 - tu(t^2+u^2+tu) + 4 = 0$

$(t^2+u^2)^2 - tu(t^2+u^2) + 4 - t^2u^2 = 0$

$(t^2 - tu + u^2)^2 + 4 - t^2u^2 = 0$

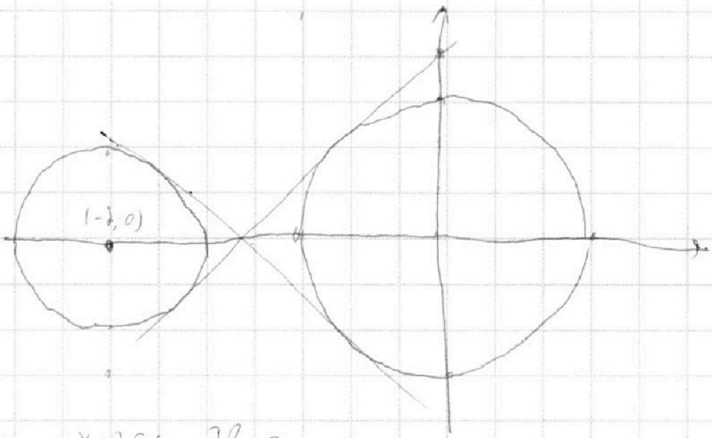
$(t^2+u^2)(t^2 - 2tu + u^2) + 4 = 0$

$t^2+u^2 \geq 0$

$(t^2+u^2)(t-u)^2 + 4 = 0$

$\varnothing$

$(x+7^x)^2 + y^2 = 4$



Прямая $x + 39y - 78 = 0$

пересек в 4-х точках

$y = -\frac{x}{39} + \frac{78}{39}$ $\quad 1/9 = 0$ ~~$\not{x}$~~ – [illegible]

~~$x \neq 0$~~

чтобы был 4 реш необр, чтоб $\rho(9;0)$ до $39y + x - 78 = 0$ ...

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$ ОДЗ: $6x>0$, $6x \neq 1$

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7 - 4$

] $\log_7(6x) = t$

$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$

$2t^5 - 4 = 3 - 8t$

$2t^5 + 8t - 7 = 0$

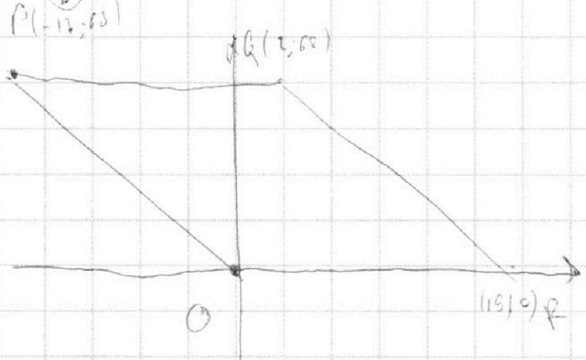
$\cancel{t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4}$

$\cancel{t^4 - 4 = 3 - 8t}$

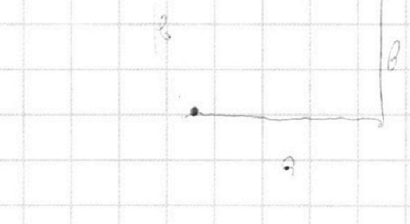
$\cancel{1\ 0\ 0\ 0\ 8\ -7}\ |\ 7$

$\cancel{\pm 1}\quad \pm 7 \quad \cancel{\pm \frac{1}{2}} \quad \pm \frac{7}{2}$

$\cancel{2t^5 + 0t^4 + 0t^3 + 0t^2 + 8t - 7 \ |\ 2t+7}$



$4a + b = 40$



$\begin{cases} 4a + b = 40 \\ 4a - b - 40 \end{cases}$

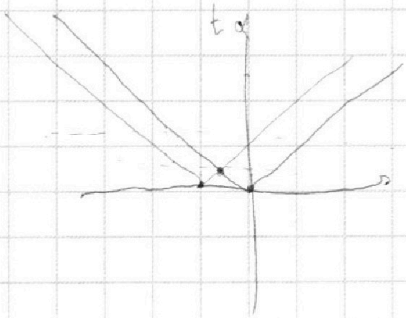
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

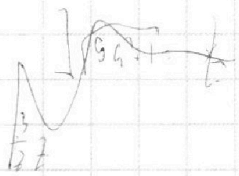
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \dfrac{|7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 3 \\ \dfrac{|-7-7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} |b| < \dfrac{3\sqrt{9a^2+1}}{7} \\ |b+1| < \dfrac{2\sqrt{9a^2+1}}{7} \end{cases}$$



$t = \sqrt{9a^2+1}$



При каких значен t $\exists$ b

$$\begin{cases} |b| < \frac{3}{7}t \\ |b+1| < \frac{2}{7}t \end{cases}$$

1) $b \geq 0$, то $\begin{cases} b \leq \frac{3}{7}t \\ b+1 < \frac{2}{7}t \end{cases}$ $\begin{cases} b < \frac{3}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases}$

если $\frac{2}{7}t - 1 < 0$, то b,

т.е. $t > \frac{7}{2}$

При $t > \frac{7}{2}$ $b < 0$ ...

$t < \frac{7}{2}$

2) $b < 0$, то $\begin{cases} b > \frac{3}{7}t \\ b+1 > \frac{2}{7}t \end{cases}$ $\begin{cases} b > \frac{3}{7}t \\ b > \frac{2}{7}t - 1 \end{cases}$

$9a^2 + 1 < \frac{49}{4}$

если $\frac{2}{7}t - 1 \geq 0$, то ...

$9a^2 < \frac{45}{4}$

$a^2 < \frac{5}{4}$ $-\frac{\sqrt{5}}{2} < a < \frac{\sqrt{5}}{2}$ / $\{0\}$

$t > \frac{7}{2}$ $\frac{2}{7}t - 1 < 0$

$t < \frac{7}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

При каких $t \geq 1$

$\exists b: \begin{cases} |b| < \frac{3}{7}t \\ |b+1| < \frac{2}{7}t \end{cases}$

$\sqrt{9a^2+1} > \frac{7}{5}$

$9a^2+1 > \frac{49}{25}$

$9a^2 > \frac{24}{25}$ $a^2 > \frac{24}{9 \cdot 25}$

$a > \frac{\sqrt{24}}{15}$

Посмотрим, когда есть ~~Вр~~ $b > 0$:

$b < \frac{3}{7}t$

$b < \frac{2}{7}t - 1$

При $\frac{2}{7}t - 1 > 0$, т.е. $t \in$ ~~[~~ $(\frac{7}{2}; +\infty)$

Посмотрим, когда есть $b \in [-1; 0]$:

$\begin{cases} b > \frac{3}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases}$ $\frac{2}{7}t > \frac{3}{7}t + 1$ $2t > 3t + 7$

$t < -7$

$\varnothing$

Посмотрим, когда есть $b < -1$: $-\frac{3}{7}t <$

$\begin{cases} b > -\frac{3}{7}t \\ b > -\frac{2}{7}t - 1 \end{cases}$ $\varnothing$

$\begin{cases} -\frac{3}{7}t \leq 0 \\ \frac{2}{7}t - 1 \geq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{9a^2+1} > \frac{7}{2}$

$9a^2+1 > \frac{49}{4}$

$9a^2 > \frac{45}{4}$

$a^2 > \frac{5}{4}$

$a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{5}}{2}; +\infty)$

$-\frac{3}{7}t < \frac{2}{7}t - 1$

$\frac{5}{7}t > +1$

$t > \frac{7}{5}$

$\begin{cases} \frac{3}{7}t > 0 \\ \frac{2}{7}t - 1 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t > \frac{7}{2} \\ t > 0 \end{cases}$ $t > \frac{7}{2}$

[$\frac{1}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\arccos x \in [0;\pi]$

$\frac{1}{\cos x}$

$x^2+y^2=1$

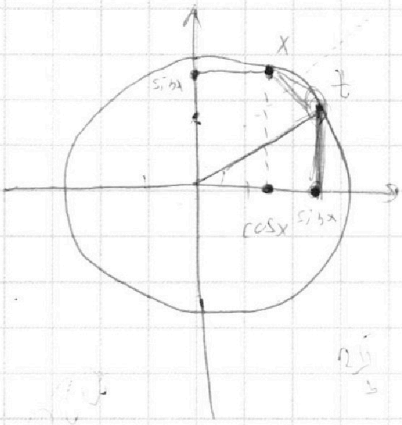
$x=\sin x$

$\sin^2 x + y^2 = 1$

$y=\cos x$

$\arccos(\sin x) = \sqrt{1-x^2}$

$\sin x = \cos t$



$5\sqrt{1-x^2} = \frac{3\pi}{2} + x \qquad x \in [-1;1]$

$25-25x^2 = \frac{9\pi^2}{4} + 3\pi x + x^2 \qquad \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2}$

$26x^2 + 3\pi x + \frac{9\pi^2}{4} - 25 = 0$

$\frac{-2x}{25}$

$x=\frac{\pi}{3}$

$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$x=\frac{\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$x=\frac{\pi}{6}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{1}{2}\right) =$

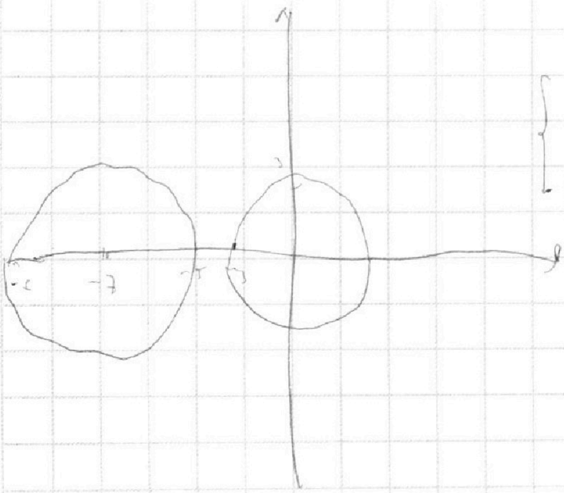
$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$x=\frac{\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} =$

$x=\frac{\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$



$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ ((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$

$\arccos(\sin x) = t \qquad \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$

$\sin x = \cos t$

$x = -\frac{\pi}{6} \qquad 6x = \pi \qquad x = \frac{\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ $\Rightarrow abc: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$a = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$

$b = 2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{y_3}$

$c = 2^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot 5^{z_3}$

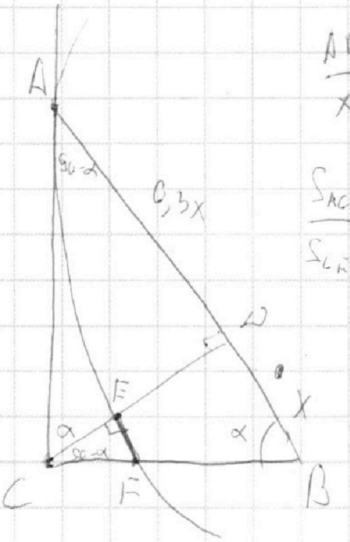
$$\begin{cases} x+y+z = 14 \\ x+y = 7 \\ y+z = 13 \\ z+x = 14 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = \frac{34}{2} = 17$$

$x_1 + y_1 \geq 7$

$\cancel{x_2} + y_2 \geq 13$

$14 + 18 = 32$

$+\begin{array}{r}32 \\ 43 \\ \hline 75\end{array}$



$\frac{AD}{X} = 1,3$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} - ?$

$AC^2 = CE \cdot CD = CF \cdot CB$

$\triangle CAD \sim \triangle FCE$

$\triangle ADC \sim \triangle CDB$

$\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC}$ $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow DC = \sqrt{AD \cdot DB} = X\sqrt{\frac{3}{10}}$

$BC = \sqrt{X^2 + X^2 \cdot \frac{3}{10}} = X\sqrt{\frac{13}{10}}$

$AC = \sqrt{\frac{3}{10}X^2 + \frac{9}{100}X^2} = X\sqrt{\frac{39}{100}} = X\frac{\sqrt{39}}{10}$

$X^2 \frac{39}{100} = CF \cdot X\sqrt{\frac{13}{10}} \Rightarrow CF = X \cdot \frac{39 \cdot \sqrt{10}}{100 \cdot \sqrt{13}}$

$\frac{AC}{CF} = \frac{X \cdot \cancel{\sqrt{39}} \cdot 100 \cdot \cancel{\sqrt{13}}}{10 \cdot X \cdot \cancel{39} \cdot \cancel{\sqrt{10}}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow \frac{S}{S} = \frac{10}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$t^4 - t^3u + t^2u^2 - tu^3 + u^4 + 4 = 10 \quad (t^2+u^2)^2 - t^2u^2 - tu(t^2+u^2) + 4 =$

$\cancel{= (t^2+u^2)(t^2-tu+u^2) - t^2u^2 + 4 =}$

$(t+u)(t^3-u^3)+$

$320+200-340$

180

$680-160 = 520$

$700-20+100$

-180

$900-180 = 720$

$$\begin{cases} -b < \frac{3}{7}t \\ b+1 < \frac{2}{7}t \end{cases} \qquad \begin{cases} b > -\frac{3}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases}$$

$-\frac{3}{7}t < \frac{2}{7}t - 1 \Leftrightarrow -\frac{5t}{7} > -1 \qquad t > \frac{7}{5}$

$-\frac{3}{7}t < -\frac{3}{5}$

$\frac{2}{7}t - 1 > -\frac{3}{5} = 1 \quad b - \frac{2}{5}$ 20

$49+25 = 74$

$t = \frac{1}{5}$

$t \approx \sqrt{2}$

$9 \cdot 15 =$

$90 + 45 = 1350$

$$b > -\frac{3}{7}t$$

$$b > -\frac{2}{7}t - 1$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{7}t < -1 \\ -\frac{2}{7}t - 1 < -1 \end{cases}$$

$9 \cdot 8$

$36 \cdot 2$

$$\begin{cases} \frac{3}{7}t > 1 \\ t > 0 \end{cases} \qquad t > \frac{7}{3}$$

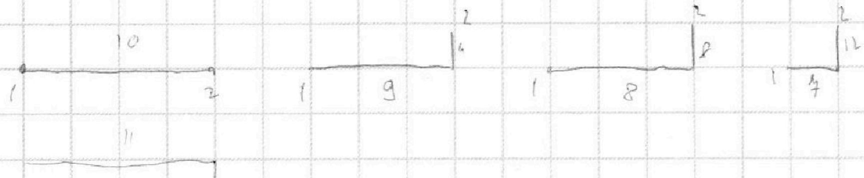
$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 160 + 2 \cdot 340 - 100} =$

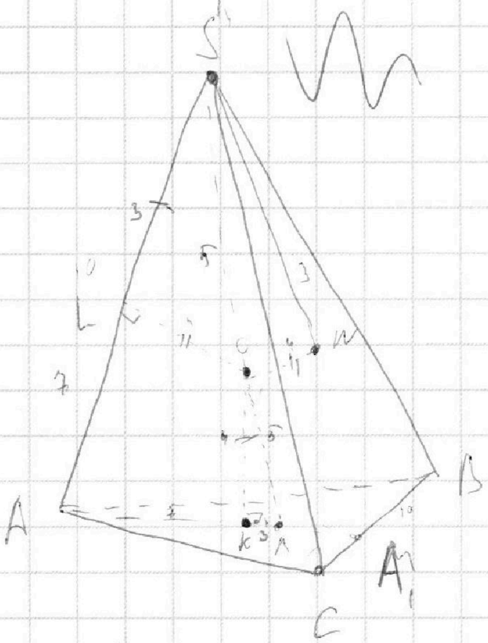
$= \frac{1}{2}\sqrt{900} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$S(ABC) = 60$

$BC = 10$

$\rho(A; BC) = 12$

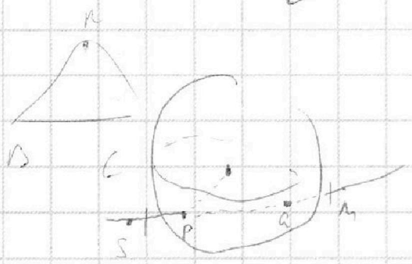
$\angle OSM = \angle OMK$

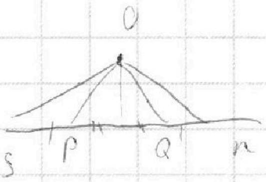
$\frac{1}{8}\sqrt{(2c^2+2b^2-c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(2a^2+2c^2-b^2)}$

$50+15=$

$144 + 16 = 160$

$144 + 196 = 340$

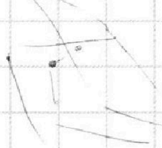


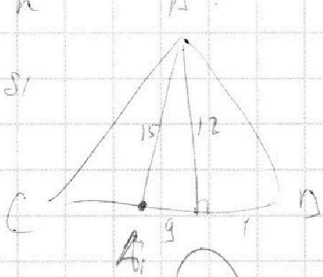


$\Rightarrow OS = OM$

$225-144=81$

$SL = KM$





$AL = AK$

$LS = KM$ $\Rightarrow AS = AM \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15$