МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)\,(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №1:

$ab \vdots 2^6\cdot 3^{13}\cdot 5^{11}$

$bc \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{13}$

$ac \vdots 2^{16}\cdot 3^{25}\cdot 5^{28}$

Обозначим за $v_k(n)$ – степень вхождения числа k в n. (т.е. $v_2(2^3\cdot 5^2)=3$)

$\Rightarrow$ Тогда $v_k(m\cdot n)=v_k(m)+v_k(n)$, т.к. степени при перемножении складываются

$\Rightarrow$ $v_2(ab)\geq 6$, т.к. $ab \vdots 2^6$ $\Rightarrow$ $v_2(a)+v_2(b)\geq 6$

$v_2(bc)\geq 14$, т.к. $bc \vdots 2^{14}$ $\quad + v_2(b)+v_2(c)\geq 14$

$v_2(ac)\geq 16$, т.к. $ac \vdots 2^{16}$ $\quad + v_2(a)+v_2(c)\geq 16$

$2(v_2(a)+v_2(b)+v_2(c))\geq 6+14+16=36$

$\Rightarrow v_2(abc)\geq \frac{36}{2}=18$

Аналогично для делителя 5:

$v_5(ab)\geq 11$ $\Rightarrow v_5(abc)\geq \frac{11+28+13}{2}=26$, однако

$v_5(ac)\geq 28$

$v_5(bc)\geq 13$ $\quad v_5(ac)\geq 28 \Rightarrow v_5(abc)\geq 28$, т.к. $abc \vdots ac$

Аналогично для делителя 3:

$v_3(ab)\geq 13$ $\Rightarrow v_3(abc)\geq \frac{13+21+25}{2}\geq\frac{59}{2}\geq 29{,}5$

$v_3(bc)\geq 21$

$v_3(ac)\geq 25$ $\quad \Rightarrow v_3(abc)\geq 30$, т.к. $abc\in\mathbb{N}$ (натуральным)

— Из всех 3 неравенств на $v_{2,3,5}(abc)$:

$\Rightarrow abc\geq 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$

Пример: $a=2^4\cdot 3^9\cdot 5^{14}$ $\Rightarrow ab=2^6\cdot 3^{14}\cdot 5^{14}$

$b=2^2\cdot 3^5$ $\quad bc=2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{14}$

$c=2^{12}\cdot 3^{16}\cdot 5^{14}$ $\quad ac=2^{16}\cdot 3^{25}\cdot 5^{28}$

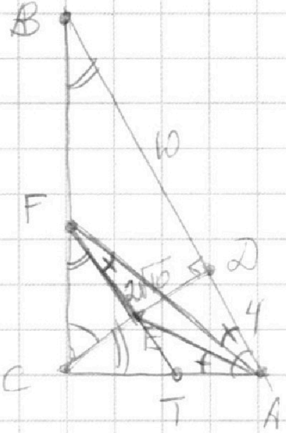
Ответ: $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



$AB : BD = 1,4$, Заметим, что мы можем менять масштаб картинки в k раз и отношения площадей не измен., т.к. $\forall$ из них увел. в k^2 раз. $\Rightarrow$ Пусть $BD = 10$, $DA = 4$

$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} = 1,4.$

$\Rightarrow$ из подобия $\triangle BDC$ и $\triangle CDA$ (по 2ум углам
90° при $(\cdot)D$
и $\angle BCD = \angle DAC$)

$\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow DC^2 = BD \cdot DA = 40$
$\Rightarrow DC = 2\sqrt{10}$

$AC^2 = 16 + 40 = 56 \Rightarrow AC = 2\sqrt{14}$
$BC^2 = 100 + 40 = 140 \quad BC = 2\sqrt{35}$

(*) $\frac{S(ACD)}{S(CEF)} = \frac{CD \cdot DA \cdot \frac{1}{2}}{CE \cdot EF \cdot \frac{1}{2}} = \frac{DA}{BD \cdot k(1-k)}$

(**) $= \frac{4}{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{16}{10} = 1,6$

Так как AC — касательная к окружн. FEA $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAE = \angle EFA$, также $\angle EFA = \angle FAB$ из $FE \parallel AB$

Пусть $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = k \Rightarrow BF = CB - k \cdot CB = CB(1-k)$ (*)
$CE = CD(1-k)$
$FE = k \cdot BD$

Продлим FE до пересечения с AC: $\exists (FE) \cap AC = (\cdot)T$

$\Rightarrow$ $TE = DA \cdot k$; $TF = BA \cdot k$
$TA = CA(1-k)$

$TE \cdot TF = TA^2$ (степень $(\cdot)T$ отн (FEA)).

$\Rightarrow DA \cdot BA \cdot k^2 = CA^2(1-k)^2$

$\Rightarrow \frac{4 \cdot 14}{4 \cdot 14} = \frac{(1-k)^2}{k^2} \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ (**)

Ответ: 1,6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~[illegible]~~ Задача №3:

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

Так как $\arccos()$ возвращает значения от 0 до π $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$

$\Rightarrow$ $9\pi - 2x \leq 10\pi \Rightarrow -\pi \leq 2x \Rightarrow x \geq -\frac{\pi}{2}$

$9\pi - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{9\pi}{2} = 4{,}5\pi$

$10\arccos(\sin x) = 10\arccos(\cos(-x + \frac{\pi}{2}))$

При этом $-4\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} \leq \pi$

$\Rightarrow$ Чтобы раскрыть $\arccos()$ $\star$ 5 случаев:

1) $0 \leq -x + \frac{\pi}{2} \leq \pi \Rightarrow 10\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(\frac{\pi}{2} - x) =$
$= 5\pi - 10x$

$5\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow -4\pi = 8x \Rightarrow \boxed{x = -\frac{4\pi}{8} = -\frac{\pi}{2}}$ подходит

и действительно $0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \leq \pi$

2) $-\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow 10\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(\frac{\pi}{2} - x + \pi) =$

$= 5\pi - 10x + 10\pi = 15\pi - 10x$

$15\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 6\pi = 8x \Rightarrow \boxed{x = \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}}$ – подходит.

$-\pi \leq \underbrace{-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}_{-\frac{\pi}{4}} < 0$

3) $-2\pi \leq -x + \frac{\pi}{2} < -\pi \Rightarrow 10\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi)$

$10(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi) = 5\pi + 20\pi - 10x = 25\pi - 10x$

$-2\pi \leq -2\pi + \frac{\pi}{2} < -\pi$

$25\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = 16\pi \Rightarrow \boxed{x = 2\pi}$

см. на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение задачи № 3:

4) $-3\pi \le -x + \frac{\pi}{2} < -2\pi$

$\Rightarrow 10\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 3\pi\right) = 35\pi - 10x$

$35\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$\Rightarrow 8x = 26\pi \Rightarrow x = \frac{26\pi}{8} = \frac{13\pi}{4}$

$-\frac{13\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{-13\pi + 2\pi}{4} = \frac{-11\pi}{4} < -2\pi$ и $\frac{-11\pi}{4} \geq -3\pi$

$\Rightarrow$ подходит

5) $-4\pi \le -x + \frac{\pi}{2} < -3\pi$

$10\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 10\left(-\frac{\pi}{2} - x + 4\pi\right) = 45\pi - 10x$

$45\pi - 10x = 9\pi - 2x \Rightarrow 8x = 36\pi \Rightarrow x = \frac{36\pi}{8} = \frac{9}{2}\pi = 4{,}5\pi$

$-4{,}5\pi + \frac{\pi}{2} = -4\pi < -3\pi$, $-4\pi \geq -4\pi$ $\Rightarrow$ подходит

$\Rightarrow$ Ответ: $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{13}{4}\pi$;

$x = \frac{3\pi}{4}$; $x = \frac{9}{2}\pi$.

$x = 2\pi$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

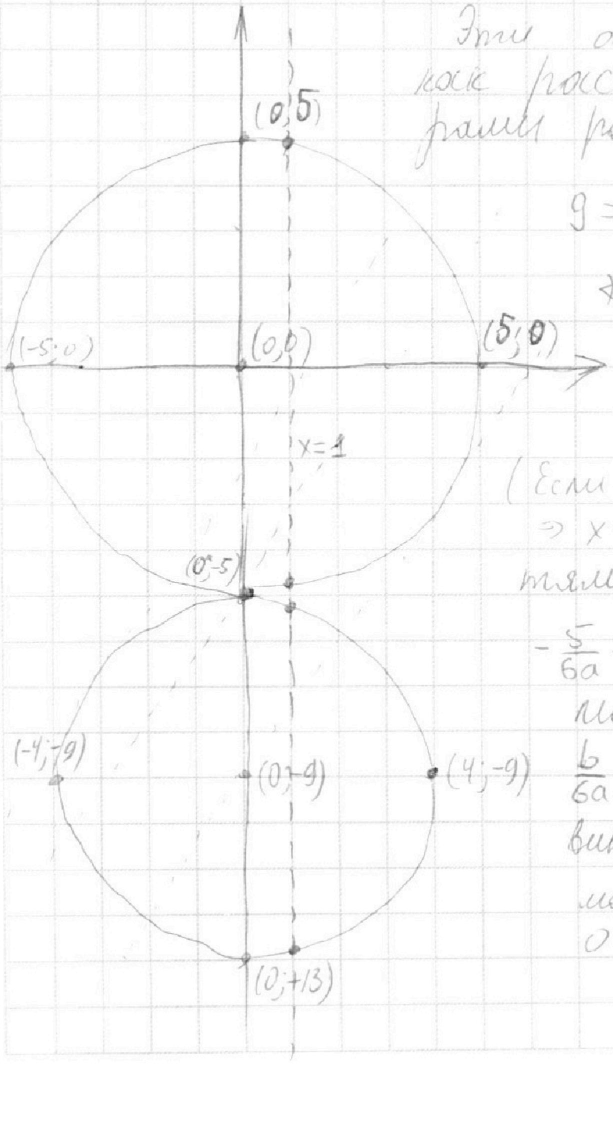
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4:

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 & \text{— это какая-то прямая} \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 & \text{— а это 2 окружности:} \end{cases}$$

~~Начало~~ $x^2+y^2-25=0$ — уравнение окружности с центром $(0;0)$ и радиусом 5.

$x^2+y^2+18y+77 = x^2+(y+9)^2-16=0$ — уравнение окружности с центром $(0;-9)$ и радиусом 4.



Эти окружности касаются, так как расстояние между их центрами равно сумме радиусов:

$9=4+5$.

* прямую $5x+6ay-b=0$

$$y=-\frac{5x}{6a}+\frac{b}{6a} \quad (\text{если } a\neq 0)$$

(Если $a=0$, то $5x=b \Rightarrow$ * $b=5 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=1 \Rightarrow$ 4 пересечения с окружностями есть)

$-\frac{5}{6a}$ — наклон прямой (может быть = любым, кроме 0)

$\frac{b}{6a}$ — то, насколько эта прямая сдвинется по вертикальной оси, сдвиг может быть любым, в том числе 0 $(b=0)$. $\frac{b}{6a}=k \Rightarrow \underline{b=6ak}$.

см. на след. листе

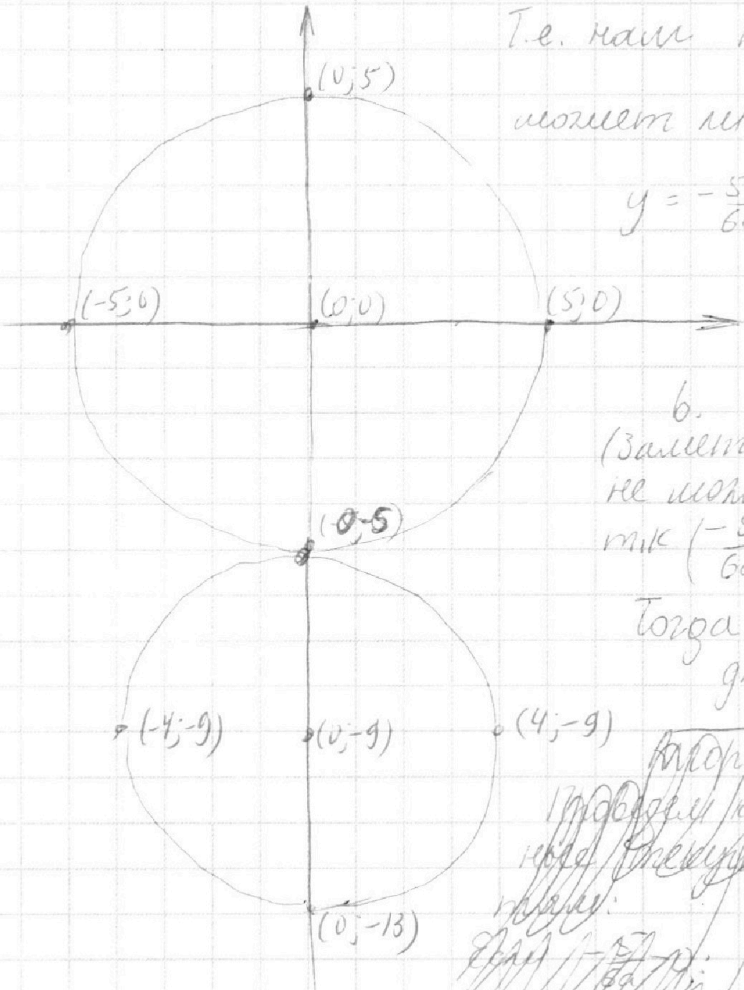
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение №4:



Т.е. нам необходимо понять, может ли прямая $y=-\frac{5x}{6a}+\frac{b}{6a}$ пересечь эти окружности в 4 точках при изменении b.

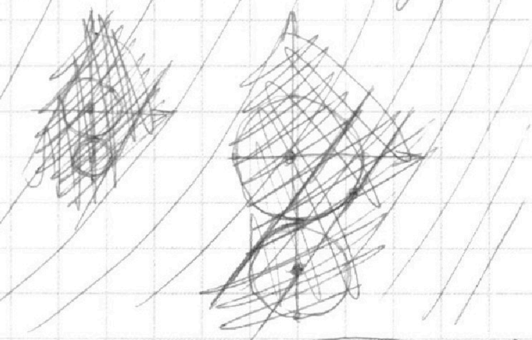
(Заметим, что прямая не может быть горизонтальной, т.к. $\left(-\frac{5}{6a}\neq 0\right)$.

Тогда (!) что это возможно для любой прямой.

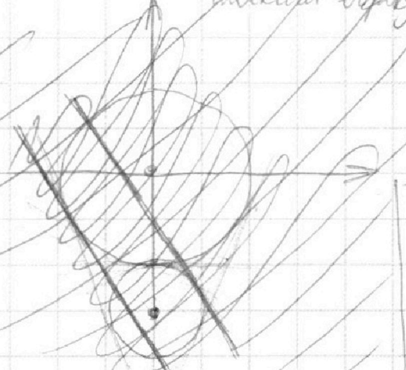
~~Абсцисса нахождения b~~

~~Проведем касательные, параллельные секущей прямой к окружностям:~~

~~Если $\left(-\frac{5}{6a}>0\right)$: это проведем таким образом~~



~~Если $-\frac{5}{6a}<0$: это таким~~



Для ∀ направления прямой найдем такое положение, что она пересечет ∀ из окружн. в двух точках.

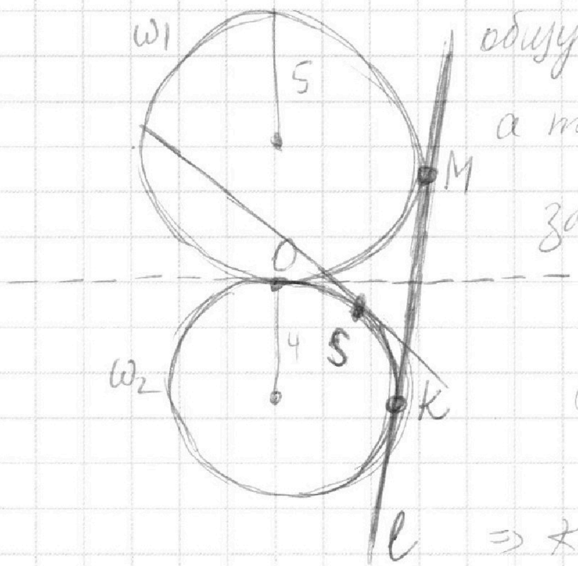
см. след. стр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение № 4.



Проведем к окружностям общую внешнюю касательную l, а точку пересечения обозначим за O, а точки касания l с окружн. за M и K, (где $M \in$ к окружн. радиуса 5_{ω_1}, а K – радиуса 4_{ω_2}).

$\Rightarrow \forall$ некоторую точку S, которая будет бегать по дуге OK. Проведем касательную l_1 в (.) S к ω_2 (ω_1 – радиуса 5, ω_2 – радиуса 4). Заметим что l_1 пересечет ω_1 в 2ух точках, пока S не попадет в K.

~~Таким образом для~~ , Аналогично $\forall$ точку S', которая будет бегать по дуге OM, $\forall$ касательную l_2 в (.) S' к ω_1. Заметим, что l_2 пересечет ω_2 в 2ух точках.

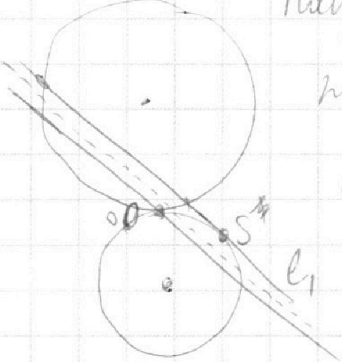
Таким образом для прямой $\forall$ направления, мы нашли положение, в котором они касаются одной окружности и пересекают другую.

(Каждого направления, т.к. $S; l_1$ K $S'; l_2$ M) Теперь для $\forall$ такой прямой достаточно подвинуть её чуть ближе к центру касающейся окружн

Аналогично и с MK:

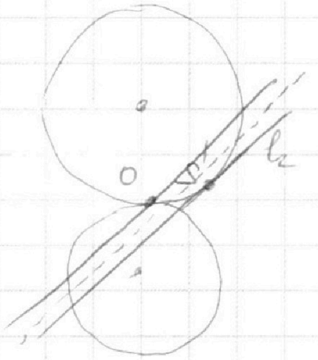
Продолж. №4:

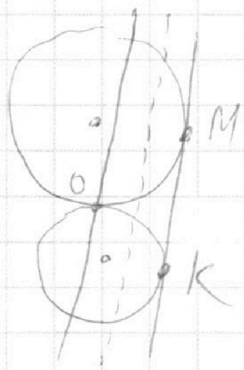
Например двигать можно так: провести параллельную линию линии l_1 через т.О и взять среднюю линию



Аналогично с l_2.

($\frac{b}{6a}$ - любое!)





$\Rightarrow$ Ответ: $a \in (-\infty; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №5:

1) $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

$\left[\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\right. \Rightarrow \log_{x^3}\frac{1}{121} = \frac{\ln\frac{1}{121}}{\ln x^3} = \frac{\ln\left(\frac{1}{11}\right)^2}{\ln x^3} = \frac{2}{3}\log_x\frac{1}{11} = -\frac{2}{3}\log_x 11 =$

$= -\frac{2}{3}\frac{1}{\log_{11} x}$

$\Rightarrow \log_{11}^4 x - 6\cdot\frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad \Big| \cdot \log_{11} x$

$\log_{11}^5 x - 6 = -\frac{2}{3} - 5\log_{11} x$

$\log_{11}^5 x + 5\log_{11} x - 6 + \frac{2}{3} = 0 \quad (1)$ $\qquad \log_{11}^4 x + 5 = \frac{-16}{3\log_{11} x}$

2) $\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5 \qquad 0{,}5y = t$

$\log_{11}^4 t + \log_t 11 = -\frac{13}{3}\log_t 11 - 5 \quad \Big| \cdot \log_{11} t$

$\log_{11}^5 t + 1 + \frac{13}{3} + 5\log_{11} t = 0 \quad (2)$

(1)+(2): $\log_{11}^5 x + \log_{11}^5 t + 5\log_{11} x + 5\log_{11} y = 0$

$1 + \frac{13}{3} - 6 + \frac{2}{3} = 0$ $\qquad$ Раскроем сумму степеней:

+5

$(\log_{11} x + \log_{11} t)(\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x\log_{11} t + \log_{11}^2 x\log_{11}^2 t - \log_{11} x\log_{11}^3 t + \log_{11}^4 t) = 0$

$\Rightarrow$ Если $\log_{11} x + \log_{11} t \neq 0$ — можно сократить

Если $\log_{11} x + \log_{11} t = 0 \Rightarrow xt = 1 \Rightarrow 0{,}5xy = 1 \Rightarrow \boxed{xy = 2}$.

Сократим:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

<u>Продолжение №5:</u>

Сократим на $\log_{11} x + \log_{11} t$

$\log_{11} x = a$

$\log_{11} t = b$ $\Rightarrow$ $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5 = 0$ $\quad ab \geq 0$, иначе ← положит.

$$= (a^2+b^2)^2 - ab(a^2+b^2) - a^2b^2 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)(a^2+b^2-ab) - a^2b^2 + 5 = 0$$

т.к. $2ab \leq a^2+b^2$

$$(a^2+b^2)(a^2+b^2-ab) - ab(a^2+b^2) + 5 =$$

// Заметим, что $ab \geq 0$,
// т.к. иначе $a^3b < 0$
// ~~еще в той строке~~
// $ab^3 < 0$
// $\Rightarrow$ изнач. выраж. > 0.

$$= (a^2+b^2)(a^2+b^2-2ab) + 5 = 0 \quad ?!$$

т.к. $\begin{cases} a^2+b^2 \geq 0 \\ a^2+b^2-2ab \geq 0 \\ \quad = (a-b)^2 \\ 5 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ <u>Ответ:</u> $xy = 2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

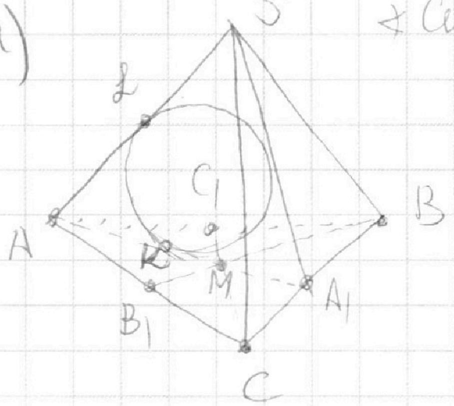
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

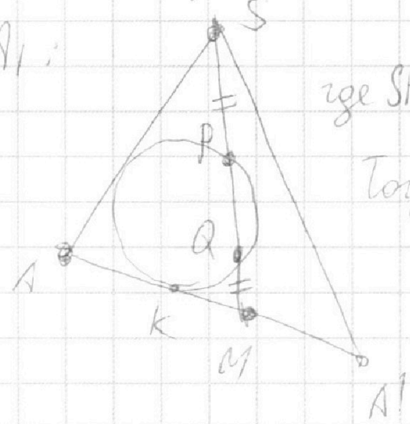
МФТИ

Задача №7:

а)

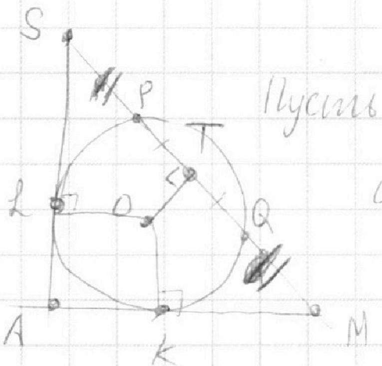


* Сечение всей картинки плоскостью SAA_1:



где $SP = QM$

Тогда (!) $SA = AM$



Пусть O - центр окружности в сечении; а T - середина PQ

$\Rightarrow OT \perp PQ$, т.к. T - середина хорды $\Rightarrow SO = OM$, т.к. $ST = TM$

$SO = \sqrt{ST^2 + OT^2}$

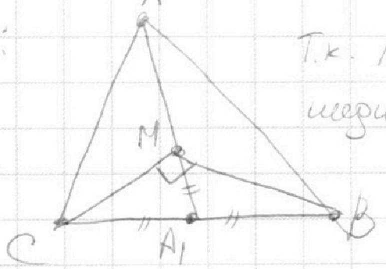
$OM = \sqrt{TM^2 + OT^2}$

$\Rightarrow SL = MK$, т.к. $SL = \sqrt{SO^2 - OL^2}$, $MK = \sqrt{OM^2 - OK^2}$ (т.к. касательные $\Rightarrow \triangle SOL$ и $\triangle OKM$ прямоуг.)

$AL = AK$, т.к. это отрезки касательных из одной (·) A

$\Rightarrow SA = AM$, т.к. $SA = AL + LS$, $AM = AK + KM$

* $\triangle ABC$:



Т.к. AA_1 - медиана и M - центр пересеч медиан $\Rightarrow \frac{AM}{A_1M} = \frac{2}{1} \Rightarrow A_1M = \frac{AM}{2} = \frac{SA}{2} = 10$

$CA_1 = A_1B = \frac{BC}{2} = 10 \Rightarrow MA_1$ - это медиана на гипотенузу BC

$\Rightarrow \angle CMB = 90^\circ$, при этом $S(\triangle CMB) = \frac{1}{3} S(\triangle ABC)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

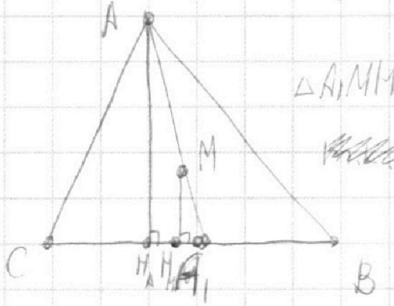
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение №7а):

$S(\triangle CMB) = \frac{1}{3} S(\triangle ABC)$, т.к. высота из A на BC $AH_A = 3MH_M$, где MH – высота из M на BC.



$\triangle A_1MH_M \sim \triangle A_1AH_A$ ~~[illegible]~~ по 2ум углам: $\angle H_MA_1M = \angle H_AA_1A$, $\angle AH_AA_1 = \angle MH_MA_1 = 90^0$

$\Rightarrow \frac{MH_M}{AH_A} = \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{AH_A \cdot BC}{2}$

~~[illegible]~~ $S(\triangle CMB) = \frac{MH_M \cdot BC}{2}$

$\Rightarrow \frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CMB)} = \frac{AH_A}{MH_M} = 3$

$\Rightarrow S(\triangle CMB) = \frac{180}{3} = 60$.

С другой стороны $S(\triangle CMB) = \frac{CM \cdot MB}{2} = \frac{\frac{2}{3}CC_1 \cdot \frac{2}{3}BB_1}{2}$

$\Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{9}{2} \cdot 60 = 270$

$\Rightarrow AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = 270 \cdot 30 = 8100$.

Ответ: 8100

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик:

1) a, b, c: $\cancel{2^6 3^{15} 5^{11} : ab}$
$\cancel{2^{14} 3^{21} 5^{13} : bc}$
$\cancel{2^{16} 3^{25} 5^{28} : ac}$

Найти $\min(abc)$

bc $2^{14} 3^{21} 5^{13}$

ab: $2^6 3^{15} 5^{11}$

ac: $2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$v_2(b) + v_2(a) \geq 6$
$v_2(b) + v_2(c) \geq 14$
$v_2(c) + v_2(a) \geq 16$

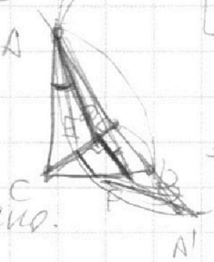
16

$abc : 2^{16}$ $abc : 3^{25}$ $abc : 5^{28}$

$\Rightarrow abc \geq 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$2v_2(b) + 2v_2(c) + 2v_2(a) \geq 36$

a: 2^4
b: 2^2
c: 2^{12}



$\Rightarrow v_2(abc) \geq 18$

По Аналогично:

$b+c=13$
$a+b=11$
$a+c=28$

$v_5(b) + v_5(c) + v_5(a) \geq \frac{11+13+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$

a:

b:

c:

$v(b)+v(c) \geq 28$
$v(b)+v(a) \geq 11$
≥ 13

$v(a)+v(b)+v(c) \geq \frac{28+11+13}{2} = 14+12 = 26$

28

15 13
$a+c$

$13+21+25$ $36+25$
$46+13$
59

$\geq 36+25$

$\frac{21+15+25}{2} = \frac{61}{2} \geq 31$

31

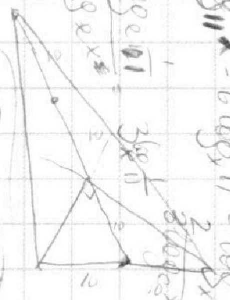
$a+b \geq 7$
$a+c \geq 5$ $\Rightarrow a+b+c \geq \frac{7+5+14}{2}$ 13
$b+c \geq 14$

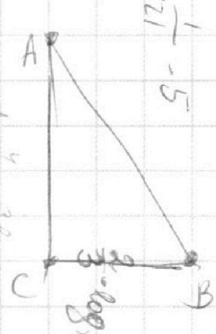
$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$

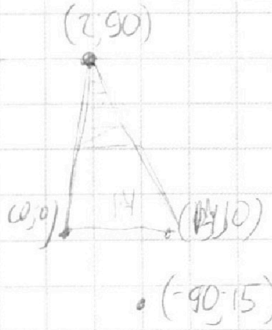
$\boxed{6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48}$

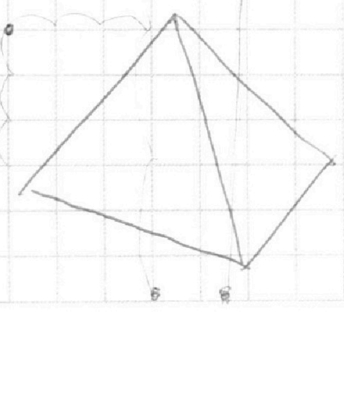
$\Rightarrow a + b \geq 15$
$b + c \geq 21$
$c + a \geq 25$

$4+8100$
8104
15^2+80^2
6625









$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{121} \frac{1}{\ldots} - 5$

$\log_{11}^4 x - 6\log_x^3 11 = 3\log_x 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

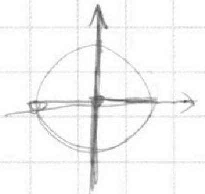
1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

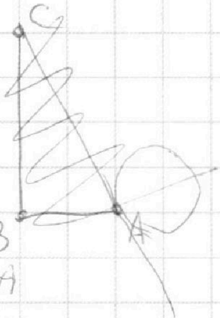
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

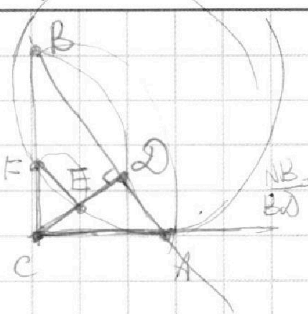
МФТИ

arccos 0 до π

arcsin $-\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$





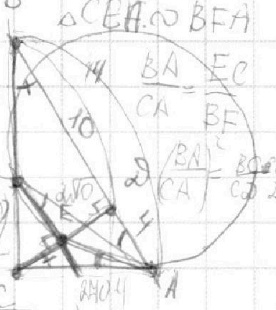


$\frac{NB}{BD}$

$\triangle CEA \sim BFA$

$\frac{BA}{CA} = \frac{EC}{BF}$

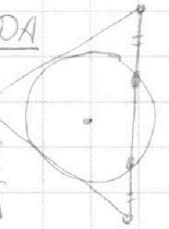
$\left(\frac{BA}{CA}\right)^2 = \frac{BC \cdot AC}{CD \cdot DA}$



$S(CEF) = \frac{CE \cdot FE}{2}$

$S(ACD) = \frac{CD \cdot DA}{2}$

$\Rightarrow \frac{S(CEF)}{S(ACD)} = \frac{CE \cdot FE}{CD \cdot DA}$

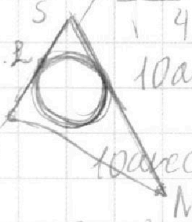


$3\sqrt{\frac{(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2b^2-c^2)}{4}}$

$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 180$

$\frac{2+2-1}{4} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

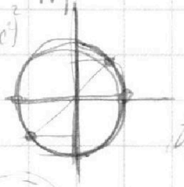
1 2 3 4 5 6 7а 7б



$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$10\arccos(\sin x) = 10\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$

$\Rightarrow 10\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$



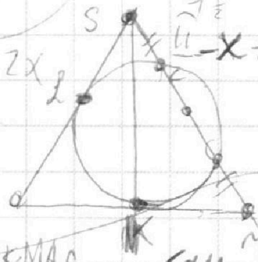
$\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}}$

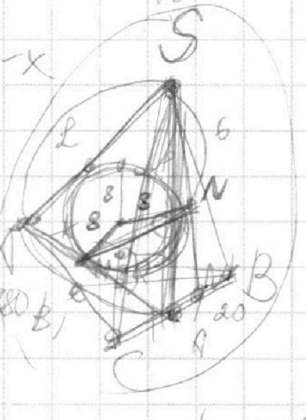
$0 \quad \pi$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$

$\sqrt{\frac{(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2b^2-a^2)(2a^2+2c^2-b^2)}{8}}$

$x = 4\pi$





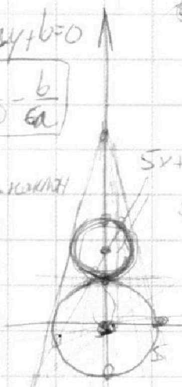
$SL \cdot SA = MK \cdot MA$

$5x + 6ay + b = 0$

$y = -\frac{5x}{6a} - \frac{b}{6a}$

$5x + 6ay + b = 0$ это прямая любая кроме горизонт.

$-\frac{5}{6}a$ — наклон



$5x + 6ay - b = 0$ — это прямая которая всегда ...

$(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+74) = 0$

окружность

окружность

$(SA - AL) \cdot SA = MK(NA - AK)$

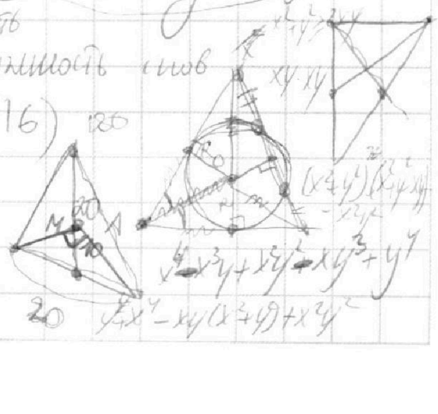
$(x^2 + (y+9)^2 - 16)$

$y^2 + 18y + 81$

$20 \cdot SL = MK \cdot MA$

$AL = AK$

$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$



$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$

$x^4 - xy(x^2+y^2) + x^2y^2$