МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим разложение на простые множители:

№1 Пусть $a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}\cdot P_1$, $b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}\cdot P_2$, $c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}\cdot P_3$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in\mathbb{Z}$ и ≥ 0, $P_1,P_2,P_3 \geq 1$ $\not{\vdots}\, 2,3,5$ – остальные простые множители

$ab = 2^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot 3^{\beta_1+\beta_2}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2}\cdot P_1\cdot P_2$

$ab \,\vdots\, 2^6\cdot 3^{13}\cdot 5^{11}$. $\cancel{P_1P_2\ \vdots}$

$(P_1P_2,2)=(P_1P_2,3)=(P_1P_2,5)=1 \Rightarrow 2^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot 3^{\beta_1+\beta_2}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2} \,\vdots\, 2^6 3^{13} 5^{11}$

НОД$(2,3,5)=1 \Rightarrow 2^{\alpha_1+\alpha_2} \,\vdots\, 2^6$, $3^{\beta_1+\beta_2}\,\vdots\, 3^{13}$, $5^{\gamma_1+\gamma_2}\,\vdots\, 5^{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2\geq 6$, $\beta_1+\beta_2\geq 13$, $\gamma_1+\gamma_2\geq 11$.

Аналогично из других 2 условий получим, что

$\alpha_2+\alpha_3\geq 14$, $\beta_2+\beta_3\geq 21$, $\gamma_2+\gamma_3\geq 13$

$\alpha_1+\alpha_3\geq 16$, $\beta_1+\beta_3\geq 25$, $\gamma_1+\gamma_3\geq 28$

Просуммируем все неравенства для α: $2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\geq 6+14+16=36 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\geq 18$

для β: $2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\geq 13+21+25=59 \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3\geq \frac{59}{2} \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3\geq 30$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3\in\mathbb{Z}$

для γ: $2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\geq 11+13+28=52$

$\Rightarrow \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\geq 26$. Но при этом $\gamma_1+\gamma_3\geq 28$ и $\gamma_2\geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\geq 28$

Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}\cdot P_1\cdot P_2\cdot P_3 \geq 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}\cdot P_1P_2P_3$

(степенная функция монотонно растёт)

$P_1\geq 1, P_2\geq 1, P_3\geq 1 \Rightarrow P_1P_2P_3\geq 1 \Rightarrow abc\geq 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$

Пример для равенства: $a = 2^4\cdot 3^9\cdot 5^{11}$, $b = 2^2\cdot 3^5$, $c = 2^{12}\cdot 3^{16}\cdot 5^{17}$

Тогда $ab = 2^6\cdot 3^{14}\cdot 5^{11} \,\vdots\, 2^6\cdot 3^{13}\cdot 5^{11}$ $\quad ac = 2^{16}\cdot 3^{25}\cdot 5^{28} \,\vdots\, 2^{16}\cdot 3^{25}\cdot 5^{28}$

$bc = 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{17} \,\vdots\, 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{13}$ $\quad$ условия верны

$abc = 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$

Ответ: минимальное значение $= 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда $\frac{S_{\Delta CDB}}{S_{\Delta ADC}} = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$ $\left(S_{CDB} = \frac{1}{2} CD \cdot DB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot AD \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot CD = \frac{5}{2} S_{\Delta ADC}\right)$

$S_{\Delta CDB} = \frac{5}{2} S_{\Delta ADC}$, $S_{\Delta CEF} = \frac{1}{4} S_{\Delta CDB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} S_{\Delta ADC} = \frac{5}{8} S_{\Delta ADC}$

Тогда $S_{\Delta ADC} : S_{\Delta CEF} = 8:5$

Ответ: $8:5$

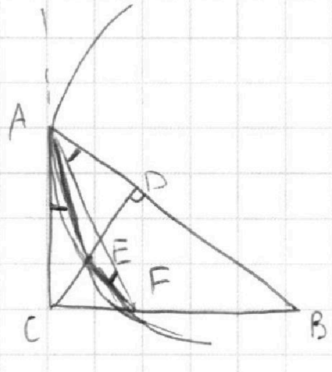
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



$AB \parallel EF$. $\angle EFA = \angle CAE$, так как AC – касательная, $\angle EFA$ опирается на хорду EA (угол между хордой и касательной равен углу, ~~между~~ опирающемуся на эту хорду)

$\angle EFA = \angle FAB$, так как это накрест лежащие углы при секущей FA параллельных прямых EF и AB.

То есть $\angle CAE = \angle FAB$

Обозначим $\angle CAB$ за α.

Тогда $\angle ABC = \angle ACD = 90° - \alpha$ (из прямоугольных Δ ABC и ADC)

Тогда $\Delta AEC \sim \Delta AFB$ по 2 углам

$(\angle CAE = \angle BAF = \angle FAB,\ \angle ECA = \angle DCA = 90° - \alpha = \angle FBA = \angle CBA)$

Тогда $\frac{AE}{AF} = \frac{EC}{FB} = \frac{CA}{BA} = \cos\alpha$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе)

$\angle DCB = 90 - \angle DCA = \alpha = \angle ECF$ $(E \in CD,\ F \in CB)$

Тогда $\angle CEF = \angle CDB = 90°$, так как $EF \parallel AB$, CD – секущая

Значит $\frac{CE}{CF} = \cos\alpha$ – отношение прилежащего катета к гипотенузе $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \cos\alpha = \frac{CE}{BF}$ $\quad CE \neq 0 \Rightarrow$ $CF = BF$

(так как CA – касательная, то A – единственная точка пересечения (CA) и окружности $\Rightarrow E \notin (CA)$)

Тогда $\frac{CF}{BC} = \frac{CF}{CF+BF} = \frac{CF}{2CF} = \frac{1}{2}$

$\Delta CEF \sim \Delta CDB$ по 2 углам $(\angle FCE = \angle BCD$ – общий, $\angle CEF = \angle CDB = 90°)$ с коэф. подобия $K = \frac{FC}{BC} = \frac{1}{2}$.

Тогда $\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CDB}} = K^2 = \frac{1}{4}$ $\quad \left| S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} CD \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{1}{4} S_{\Delta CDB}\right)$

$\Delta CDB \sim \Delta ADC$ $(\angle CDB = \angle ADC = 90°,\ \angle BCD = \alpha = \angle CAD$, по 2 углам$)$

с коэффициентом подобия $= \frac{DB}{DC}$. Также из подобия следует, что $\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{DC}$

$\Downarrow$

$CD^2 = BD \cdot AD$

$AB : BD = 1{,}4 = \frac{7}{5} \Rightarrow BD = \frac{5}{7} AB \Rightarrow AD = AB - BD = \frac{2}{7} AB$

$CD^2 = BD \cdot AD = \frac{10}{49} AB^2 \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{10}}{7} AB$. Тогда $\frac{BD}{CD} = \frac{\frac{5}{7} AB}{\frac{\sqrt{10}}{7} AB} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 $10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

О.Д.З. $-1 \le \sin x \le 1$, верно для $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Тогда

$10\arccos(\sin x) = 10\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \Leftrightarrow$

(arccos инъективен на области определения)

$\Leftrightarrow 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \le \pi$ – множество значений arccos

$5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x$

$8x = -4\pi + 20\pi k \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k = \pi - \frac{5}{2}\pi k + 2\pi k = \pi - \frac{1}{2}\pi k$

$0 \le \pi - \frac{1}{2}\pi k \le \pi \Rightarrow 0 \le 1 - \frac{1}{2}k \le 1$

1) $1 - \frac{1}{2}k \ge 0$ $\quad \frac{1}{2}k \le 1$ $\quad k \le 2$

2) $1 - \frac{1}{2}k \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}k \le 0 \Rightarrow k \ge 0$

То есть подходят $k = 0, 1$ и 2

$x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = 2\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{2} + 5\pi = \frac{9\pi}{2}$

Проверка: $10\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 10\arccos(-1) = 10\pi = 9\pi - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$10\arccos(\sin 2\pi) = 10\arccos 0 = 10\cdot\frac{\pi}{2} = 5\pi = 9\pi - 2\cdot 2\pi$

$10\arccos\left(\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)\right) = 10\arccos(1) = 0 = 9\pi - 2\cdot\frac{9\pi}{2}$

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = 2\pi$, $x_3 = \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

смещать прямую вниз - вверх.

То есть если $-\frac{7\sqrt{2}}{8} \le -\frac{5}{6a} \le \frac{7\sqrt{2}}{8}$, то 4 корней не будет

1) $-\frac{7\sqrt{2}}{8} \le -\frac{5}{6a}$ $\quad \frac{7\sqrt{2}}{4} \cdot 3a \ge 5$

$a \ge \frac{20}{21\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{21}$

2) $-\frac{5}{6a} \le \frac{7\sqrt{2}}{8}$

$-5 \le \frac{7\sqrt{2}}{4} \cdot 3a$

$a \ge \frac{-20}{21\sqrt{2}} = \frac{-10\sqrt{2}}{21}$

Пересечение: $a \ge \frac{10\sqrt{2}}{21}$

Тогда 4 корня при $a < \frac{10\sqrt{2}}{21}$. $a = 0$ входит в ответ.

Ответ: $a < \frac{10\sqrt{2}}{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 $\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$ 4 корня

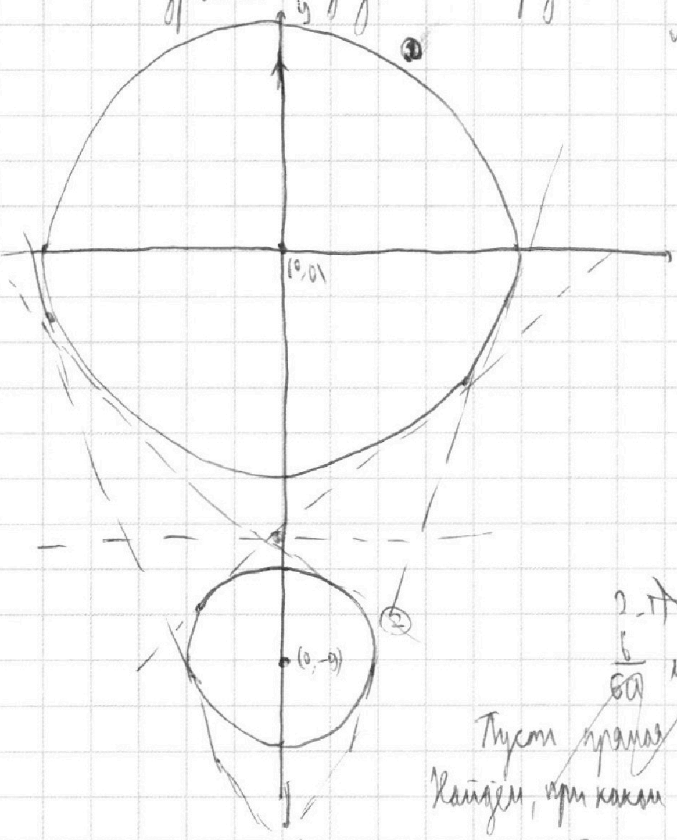
Распишем второе уравнение. Произведение $=0 \Leftrightarrow$ одна из скобок $=0$

То есть либо $x^2+y^2=25$, либо $x^2+y^2+18y+77=x^2+(y+9)^2-4=0$

$x^2+(y+9)^2=4$

Эти 2 уравнения задают 2 окружности: ① с центром в $(0,0)$ и $r=5$

и ② с центром в $(0,-9)$ и $r=2$



Уравнение $5x+6ay-b=0$ задаёт прямую.

Разберём 2 случая:

1) $a=0$ $5x-b=0 \Rightarrow x=\frac{b}{5}$ вертикальная прямая

возьмём $b=0$
прямая $x=0$ пересекает окружности 4 раза $\Rightarrow$ будет 4 корня V

2) $a\neq 0$ $y=-\frac{5}{6a}x+\frac{b}{6a}$

~~2.1) $a<0$ $-\frac{5}{6a}>0$ - угол наклона прямой~~

$\frac{b}{6a}$ можно подбирать в зависимости от a.

Пусть прямая проходит через $(0,-7)$, то есть $\frac{b}{6a}=-7$

Найдем, при каком a она будет касательной к ①

$x^2+\left(-\frac{5}{6a}x-7\right)^2=x^2+\frac{25}{36a^2}x^2+\frac{35}{3a}x+49=25$ $|\cdot 36a^2$

$(36a^2+25)x^2+420ax+864=0$ имеет $D=0$

$\frac{D}{4}=210^2\cdot a^2-864(36a^2+25)=0$ $a^2=\frac{~~210^2~~\ 25\cdot 864}{210^2-864\cdot 36}=\frac{25\cdot 24}{35^2-864}=\frac{25\cdot 24}{361}$

$a=\cancel{\pm\frac{20\sqrt{6}}{19}}\ \cancel{(\ldots)}=\frac{-10\sqrt{6}}{19}$. Если $a^2>\frac{600}{361}$, то есть $a<\frac{-10\sqrt{6}}{19}$, то

будет 2 точки пересечения

Заметим, что если $b<-7$, то точек пересечения со второй окружностью станет только меньше.

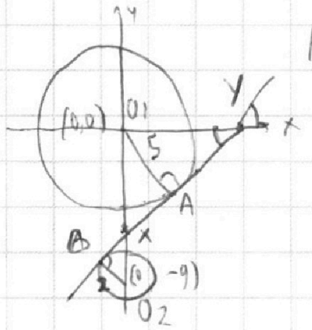
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

У 2 окружностей может быть максимум 4 общие касательные: 2 „внутренние" и 2 „внешние". Найдём их для данных окружностей



A, B - точки касания, $\triangle O_1AX \sim \triangle O_2BX \Rightarrow \frac{O_1X}{O_2X} = \frac{5}{2} = \frac{O_1A}{O_2B}$ (радиусы)

$O_1O_2 = 9$, $O_1X = \frac{5}{7}O_1O_2 = \frac{45}{7}$ $(X = AB \cap OY)$

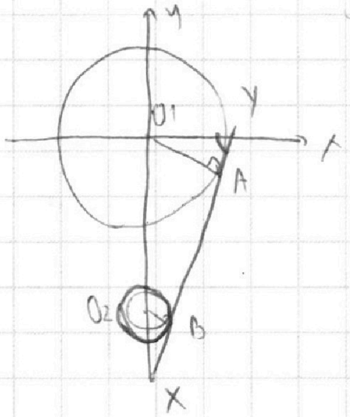
То есть X имеет координату $\left(0, -\frac{45}{7}\right)$

$\cos\angle AO_1X = \frac{AO_1}{O_1X} = \frac{5}{\frac{45}{7}} = \frac{7}{9}$ $\quad Y = AB \cap OX$

$\sin\angle O_1YA = \cos\angle AO_1X = \frac{7}{9}$, $\cos\angle O_1YA = \sqrt{1-\frac{49}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\operatorname{tg}\angle O_1YA = \frac{7}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$ - угол наклона прямой.

Получаем уравнение $y_1 = \frac{7\sqrt{2}}{8}x - \frac{45}{7}$



$\triangle O_1AX \sim \triangle O_2BX$ с $k = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{5}{2}$ (радиусы)

$\frac{O_1X}{O_2X} = \frac{5}{2}$

$O_1X = O_1O_2 + O_2X = 9 + O_2X = \frac{5}{2}O_2X \Rightarrow O_2X = 6$

$O_1X = 15 \qquad X(0, -15)$

$\sin\angle O_1XA = \frac{O_1A}{O_1X} = \frac{1}{3} = \cos\angle O_1YX$

$\sin\angle O_1XY$

$\sin\angle O_1YX = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\operatorname{tg}\angle O_1YX = 2\sqrt{2}$ - угол наклона прямой

$y_2 = 2\sqrt{2}x - 15$

Две другие касательные получаются симметрией относительно OY (так как обе окружности симметричны).

$y_3 = -\frac{7\sqrt{2}}{8}x - \frac{45}{7}$, $\quad y_4 = -2\sqrt{2}x - 15$

Если угол наклона прямой меньше, чем $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ (и больше 0), то как бы ни была расположена прямая, она не пересечёт обе окружности по 2 точкам. Аналогично, если угол меньше 0 и больше $-\frac{7\sqrt{2}}{8}$, то тоже не будет 4 корней. Вторые касательные не влияют, так как мы можем менять b, то есть

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$ О.Д.З. $x>0,\ x\neq 1$

$\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x}$; $\log_{x^3}\frac{1}{11^2} = -\frac{2}{3}\log_x 11$ (вынесли степень) $= -\frac{2}{3}\frac{1}{\log_{11}x}$

Обозначим $\log_{11} x$ за t. $t\neq 0$ $(x\neq 1)$

Тогда уравнение примет следующий вид:

$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t} - 5$

$t^4 - \frac{16}{3t} + 5 = 0$ $\quad |\cdot 3t$

$3t^5 + 15t - 16 = 0$

Аналогично для y:
обозначим $\frac{1}{2}y$ за z.

$\log_z 11 = \frac{1}{\log_{11} z}$, $\log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) =$

$= \log_{z^3}(11^{-13}) = -\frac{13}{3}\log_z 11$

Обозначим $\log_{11} z$ за m. $m\neq 0$

$m^4 + \frac{1}{m} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{m} - 5 \Rightarrow m^4 + \frac{16}{3m} + 5 = 0$ $\quad |\cdot 3m$

$3m^5 + 15m + 16 = 0$

Сложим: $3t^5 + 3m^5 + 15t + 15m = 0$ $\qquad t^5 + m^5 + 5(m+t) = 0$

$m^5 + t^5 = (m+t)(m^4 - m^3t + m^2t^2 - mt^3 + t^4)$

Тогда $(m+t)(m^4 - m^3t + m^2t^2 - mt^3 + t^4 + 5) = 0$

Знак $m^5 + t^5$ определяется знаком $m+t$ $\quad$ ($m+t<0 \Rightarrow m<-t \Rightarrow m^5 < -t^5$, $m^5+t^5<0$; $m+t>0 \Rightarrow m>-t$, $m^5>-t^5$, $m^5+t^5>0$)

Тогда $(m^4 - m^3t + m^2t^2 - mt^3 + t^4 \geq 0$ $\forall m,t$

$\Downarrow$

$m^4 - m^3t + m^2t^2 - mt^3 + t^4 + 5 > 0.$

Тогда, раз произведение равно 0 и вторая скобка >0, то $m+t=0$

$m = -t \Rightarrow \log_{11}\frac{1}{2}y = -\log_{11} x \Rightarrow \frac{1}{2}y = \frac{1}{x} \Rightarrow \underline{xy = 2}$

$\log_{11}\frac{1}{x}$ (логарифм монотонен)

Ответ: $xy = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

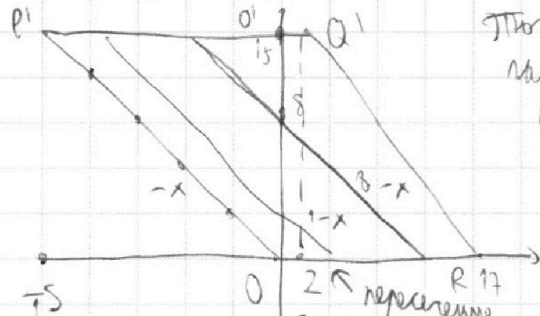
МФТИ

№6 $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ $\quad y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$.

$6(x_2-x_1) \vdots 6$, $48 \vdots 6 \Rightarrow y_2 - y_1 \vdots 6$ $\quad y_2 - y_1 = 6k = 6z_2 - 6z_1$

Тогда $x_2 - x_1 + k = 8 = x_2 - x_1 + z_2 - z_1 = 8. = (x_2+z_2)-(x_1+z_1)$

При этом каждая пара (z_1, z_2) задаёт пару (y_1, y_2). И, так как $0 \le y_1, y_2 \le 90$, то $0 \le z_1, z_2 \le 15$



2 ↖ пересечение 2 точк : от $y=-x$ до $y=17-x$ и от $y=0$ до $y=15$

$\angle(Ox, OP') = 135°$ (по уравнению прямой)

Тогда (x_1, z_1), (x_2, z_2) лежат в левом параллелограмме $O(0,0)$, $P'(-15,15)$ $Q'(2,15)$ $R'(17,0)$. $OP' \parallel y=-x$ ($P', O \in$ этой прямой)

~~$O'(0,15)$~~

~~...~~

~~1) $z_1 = 15 \Rightarrow x_1 = 15$~~

1) $x_1+z_1=0 \Rightarrow x_2+z_2=8$

Тогда если (x_2, z_2) лежит на ~~...~~ прямой $y=8-x$, проходит ← которая проходит через 16 точек с целыми координатами, так как через $(8,0)\ldots(-7,15)$ параллельна стороне ромба OP' (~~...~~ на OP' лежат $(0,0), (-1,1) \ldots (-15,15)$)

$x_1+z_1=0$ 16 разных точек на прямой $y=-x$, задающей сторону OP'

$16 \cdot 16 = 256$

2) $x_1+z_1=1$. на прямой $y=1-x$, также параллельная стороне параллелограмма пересекающая в 16 точках $(1,0)\ldots(-14,15)$

$x_2+z_2=7$ -||-||-

⋮

10) $x_1+z_1=9$, $x_2+z_2=17$ ~~...~~ 256 точек

лежат внутри полосы $y=9-x$ и $y=17-x$ пересекают в 16 точках (-||-||- (1 и 2))

~~Далее (до $x_1+z_1=8$), уже посчитаны ранее~~

11) $x_1+z_1<0$ — эта прямая не пересекает параллелограмм, так как параллельна стороне параллелограмма, но лежит вне „полосы". (пересечение с осью абсцисс в точке левее O)

12) $x_1+z_1>9 \Rightarrow x_2+z_2>17$, нет пересечений с параллелограммом. (пересечение с осью абсцисс правее R)

Тогда всего пар точек 2560 из первых 10 случаев

$A'(x_1, z_1)$, $B'(x_2, z_2)$ задают $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ однозначно $\Rightarrow$ и искомых 2560 пар.

Ответ: 2560

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$, $bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$, $ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$abc = 2^{16} 3^{25} 5^{28}$ $m = -t$

$2^\alpha \; 2^\beta \; 2^\gamma$

$\alpha+\beta \geq 6$ $\beta+\gamma \geq 14$

$\alpha+\gamma \geq 16$

$2\alpha+2\beta+2\gamma \geq 36$ $\alpha+\beta+\gamma \geq 18$

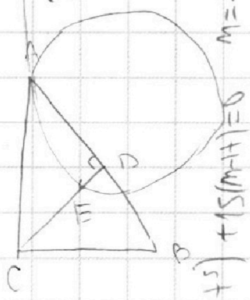
$\alpha = 4$ $\beta = 2$ $\gamma = 12$

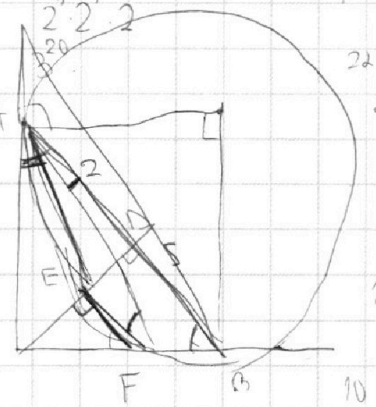
$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$

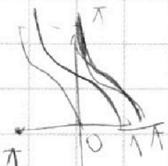
$BD = \frac{5}{7} AB$

$AB \parallel EF$

$AB : BD = 1{,}4$







$10 \arccos(\sin x)$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 5\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$4\pi = -8x$

$x = -\frac{\pi}{2}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$\arccos -1 = \pi$

$\left(-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}\right)^2$

$x^2 \frac{25}{36a^2} - \frac{10b}{36a}x + \frac{b^2}{36a^2} + x^2 = 25$

$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 = 25) \quad (x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$

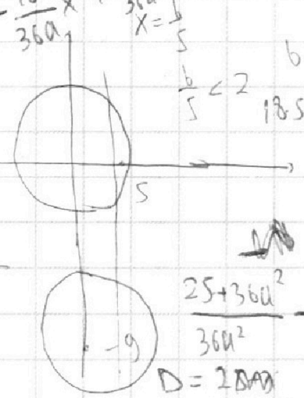
4 корня

$6ay = b - 5x$

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

1) $a = 0$ $5x = b$ $x = \frac{b}{5}$

$(0, \frac{b}{6a})$ $x = (\frac{1}{5}, 0)$



$\frac{b}{5} < 2$

$\frac{25 + 36a^2}{36a^2} - \frac{5b}{18a}x$

$D = 80a^2b^2 - (b^2 - 900a)(25 + 36a^2)$

$\log_{11}^4 x - 6\log_{11} x = \log x^3$

$\log_{\frac{1}{2}}^4 y + \log_{\frac{1}{2}} y\, 11 = \log_{\frac{1}{5^3}} y^3 \quad (11^{-13}) \quad -5$

$t^4 - 6t = -\frac{2}{3}t - 5$ $-\frac{2}{3}\log_x 11$

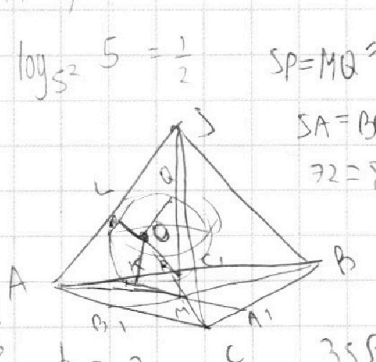
$t^4 - 16t + 15 = 0$

$\log_{5^2} 5 = \frac{1}{2}$

$SP = MQ \Rightarrow SQ = MP$

$SA = BC = 20$

$72 = 8 \cdot 9 = 16 \cdot 27$



$\frac{5}{6a}x - 7a = y$

$x^2 + \left(7 + \frac{5}{6a}x\right)^2 = 25$

$x^2 + 49 + \frac{35}{3a}x$

$6ax^2 + 35x + 72a = 0$

$D = 35^2 - 4 \cdot 72a^2$

$a = \frac{35}{\sqrt{72}} = \frac{35}{6\sqrt{2}}$

$(0, -7)$ $\frac{b}{6a} = -7$ $b = -42a$

$72\sqrt{3}$

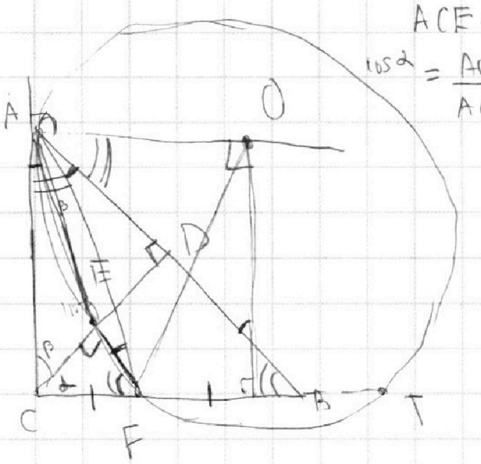
$\frac{35\sqrt{3}}{36}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$ACE \sim ABF$

$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF} = \frac{EA}{AF}$

$CD \cdot AB = AC \cdot BC$

$\triangle CDB \sim \triangle ADC$

$\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{DC}$

$CD^2 = AD \cdot BD = \frac{10}{49} AB^2$

$CD = \frac{\sqrt{10}}{7} AB$

$\triangle ABC \sim \triangle CBD$

$\cos\alpha = \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$

$\frac{2}{7} AB = AD \cdot AB = AC^2$

$AB = AB\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7} AB$

$BC = \quad -6 + \frac{2}{3} =$

$CD \cdot AC = BC \cdot AD$

$\frac{CD \cdot AC}{AD} = \frac{7}{2} CD = \frac{\sqrt{10}}{2} AB$

$CD \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{\sqrt{140}}{14} AB$

$\frac{CE}{CF} = \frac{CE}{BF}$

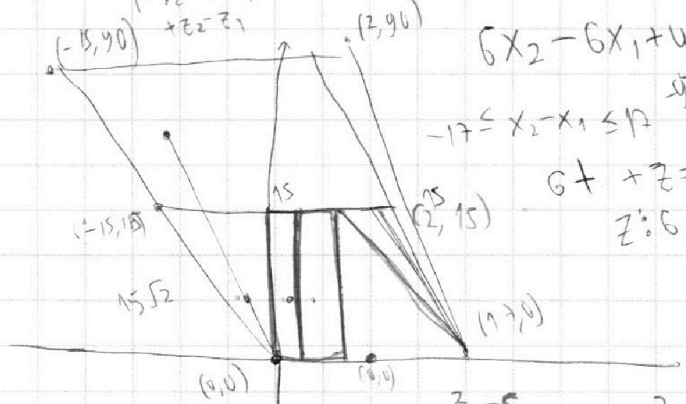
$\frac{25}{3}$

$210 = 5 \cdot 42 = 5 \cdot 6 \cdot 7$

$35 \times 35 = 175$

$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7}$

$1-x_2+1-x_1+z_2-z_1$



$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$-17 \le x_2 - x_1 \le 17$

$-90 \le y_2 - y_1 \le 90$

$6t + z = 48$

$z \vdots 6$

$6t + 6k = 48$

$t + k = 8$

$x_1 = 0$

-15

$10\pi = 9\pi$

$\arccos(-1) = \pi$

0

$\frac{\pi}{2}$

$0 < \arccos x < \pi$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x$

$8x = -4\pi + 20\pi k$

$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi k$

$\log_{11}^4 \frac{x}{0{,}54} + \log$

$1 - 6 = -\frac{2}{3} - 5$

$32 - 3$

$-\frac{2}{3}$

$x_2 + z_2 = 6$

$\frac{1}{2} y = z$

(0, 0) (1, 8)

7 9 5 10

$\frac{1}{8} y^3$

(6, 0)

16

$\gamma_1 + \gamma_2$

$m^4 + \frac{1}{m} = -39 \cdot \frac{1}{m} - 5$

$\frac{\pi}{2} =$

17 17

$\frac{-6}{\log_{11} x} =$

$-\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi k$

$0 < \pi - \frac{5}{4}\pi k < \pi$

$5^2 + 6^2$

$1 - \frac{5}{4} k > 0$

$\frac{5}{4} k < 1$

$k < \frac{4}{5}$

$\frac{5}{4}\pi k \ge 0$

$k \ge 0$

$m^5 - 5m + 40 = 0$

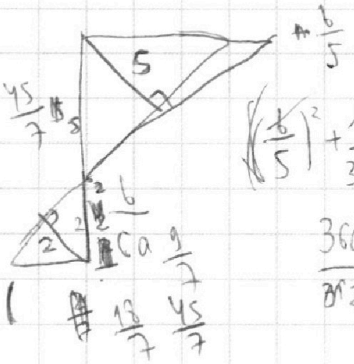
$m^4 + \frac{40}{m} - 5 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{6^2}{36a^2} = 25 = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{6a}$$

$$\frac{36a^2+5}{210a^2} \cdot 25 = \frac{6^2}{30a}$$

$$210a^2 + 25 = 6b^2$$

$$1050a^2 + 125 = 6b^2$$

$$1175 = 6b^2$$

$$\frac{1175}{6} = b^2$$

$$\frac{40}{42\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{42}$$

20, 21

$$-9 = -\frac{5}{6a}x - \frac{6}{6a}$$

$$5x + 6 = 54a$$

$$x = \frac{54a}{5} - \frac{6}{5}$$

$$\left(0, \frac{6}{6a}\right) \quad \left(\frac{54a}{5} - \frac{6}{5}, -9\right)$$

$$\frac{6}{6a} = -\frac{45}{7}$$

$$6 = -\frac{230}{7}a$$

$$\left(\frac{6}{6a} + 9\right)^2 + \left(\frac{54a}{5} - \frac{6}{5}\right)^2 \cdot 4 = \left(\frac{6}{6a} + 9\right) \cdot \left(\frac{54a - 6}{5}\right)^2$$

$$a = 1$$

$$-\frac{5}{6a} = -\frac{5}{6}$$

$$m^5 + t^5 \;\Big|\; m + t$$

$$m^4 - m^3 t + m^2 t^2 - m t^3 + t^4$$

$$-\;m^5 + m^4 t$$

$$t^5 - m^4 t$$

$$-\;-m^4 t - m^3 t^2$$

$$t^5 + m^3 t^2$$

$$-\;m^3 t^2 + m^2 t^3$$

$$t^5 - m^2 t^3$$

$$-\;-m^2 t^3 - m t^4$$

$$t^5 + m t^4$$

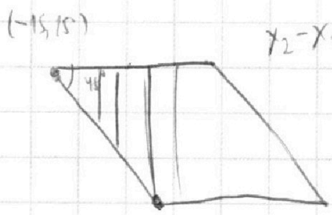
$$m^4 + t^4$$

$$m^3(m^2 - t^2)$$

m t

разные знаки

$m < t$



$$x_2 - x_1 = 0$$

$$z_2 - z_1 = 8$$

$$z_1 = 0 - 7$$

8

~~22~~ 30

$$x_2 - x_1$$

$$-15 \le z_2 - z_1 \le 15$$