



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y^2} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При $a, b, c \geq 2^{x_a+x_b+x_c}$ $3^{y_a+y_b+y_c}$ $5^{z_a+z_b+z_c} \geq$
 $\geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Можно выбрать $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13}$, $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$,
 $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}$, тогда $ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}; 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$,
 $bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13}; 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, $ca = 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}; 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$
Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$a, b, c \in \mathbb{N}, ab : 2^9 3^{10} 5^{10}, bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}, ca : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

Пусть 2 как множитель в а входит x_a раз, в б x_b раз, в с x_c раз

$$\text{по условию } ab : 2^9 \Rightarrow x_a + x_b \geq 9, bc : 2^{14} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_b + x_c \geq 14, ca : 2^{19} \Rightarrow x_a + x_c \geq 19$$

Сложив 3 первых неравенства $2(x_a + x_b + x_c) \geq 42 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq 21. \text{ Если } b \text{ не делится на 2, то } x_a = 7, x_b = 3, x_c = 12, \\ \text{то } ab = 2^9 AB : 2^9, bc = 2^{14} BC : 2^{14}, ca = 2^{19} CA : 2^{19}.$$

Аналогично для кратности 3, которое входит 6 раз. $a, y_b - б, y_c - с$
 $ab : 3^{10} \Rightarrow y_a + y_b \geq 10, bc : 3^{13} \Rightarrow y_b + y_c \geq 13, ca : 3^{18} \Rightarrow y_c + y_a \geq 18$

Сложив первые 2 $2(y_a + y_b + y_c) \geq 41 \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 20, 5, т.к.$

y_a, y_b, y_c - натур., то их сумма тоже натуральна $\Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 21$

Если b делится на 3, $y_c = 11, y_a = 7, y_b = 3$, то $ab = 3^{10} y_a : 3^{10}$

$$bc = 3^{14} y_b : 3^{13}, ca = 3^{18} y_c : 3^{18}$$

За кратность 5, которое 5 входит в один из множителей, $z_b - б, z_c - с$ раз

$$ab : 5^{10} \Rightarrow z_a + z_b \geq 10, z_b + z_c \geq 5, z_c + z_a \geq 30, z_b \geq$$

$z_a + z_b + z_c \geq 30 + 5 = 35$. т.к. $z_c = 17, z_a = 13$, то все неравенства выполнены

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

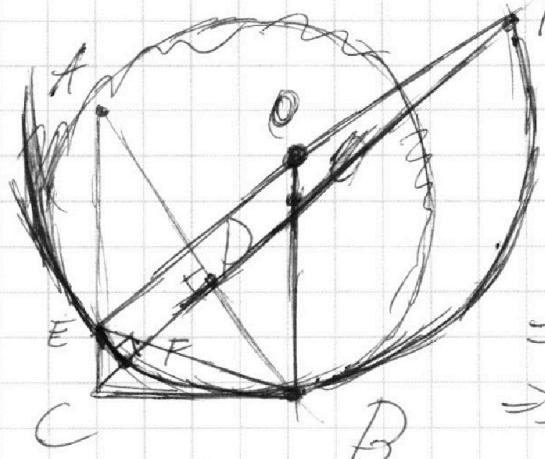
6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF, AD:DB = 3:1 \Rightarrow AD = 3DB$$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB =$$

$$= 3DB^2 \Rightarrow CP = \sqrt{3}PB \quad (\triangle CPB \sim \triangle AR)$$

$$\Rightarrow CB^2 = CP^2 + PB^2 = 4PB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = 2PB \Rightarrow \cos \angle CBD = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CBD = 60^\circ,$$

$$, EF \parallel AB \Rightarrow \angle CFE = \angle CPA = 90^\circ,$$

$$\angle ECF = 90^\circ - \angle DCB = 60^\circ \Rightarrow \triangle ECF \sim \triangle ACB,$$

$$K = \frac{EC}{AB} = \frac{EF}{AC} = \frac{EC}{CB}, \text{ т.к. } CB - \text{ кат. кас. к окр., то}$$

$$CF \cdot CR = CB^2, CR \cdot EF = 2S_{\triangle ECF} = EC \cdot ER \Rightarrow$$

$$\sin \angle CEO = EC \cdot ER \cdot \sin(180^\circ - \angle EOB) = EC \cdot ER \cdot \sin(180^\circ - 2\theta) \Rightarrow$$

$$= EC \cdot ER \sin(180^\circ - 2\theta) = EC \cdot ER \sin(2(90^\circ - \angle ECB)) =$$

$$= EC \cdot ER \cdot \sin 2\angle ECB = 2EC \cdot ER \cdot \frac{EC}{EB} \cdot \frac{CB}{EB}, ER =$$

$$= \frac{EO}{2} = \frac{EB \cdot \sin \angle EOB}{2 \sin \angle EBO} = \frac{EB \cdot \sin \angle EBO}{2 \sin \angle EOB} =$$

$$= \frac{EB \sin \angle EBO}{2 \sin(180^\circ - 2\angle EBO)} = \frac{EB}{4 \cos \angle EBO} = \frac{EB}{4 \cos(90^\circ - \angle EBC)} =$$

$$= \frac{EB}{4 \sin \angle EBC} = \frac{EB^2}{4EC}$$

$$CR \cdot EF = 2ECER \cdot \frac{EC \cdot CB}{EB^2} = 2EC \cdot CB \cdot \frac{EC \cdot CR}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CR = \frac{EC \cdot CB}{2EF}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$CF = \frac{CB^2}{CR} = \frac{2EF \cdot CB}{EC}, EF = CF / k g \approx 0^\circ = \\ = \frac{CF}{\sqrt{3}} \quad EC = \frac{CF}{\cos 60^\circ} = 2CF \Rightarrow \frac{FC}{EC} = \frac{EF}{EC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow CF = \sqrt{3} CB \Rightarrow k = \frac{CF}{CB} = \frac{1}{\sqrt{3}}, k^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{S_{ECF}}{S_{ACB}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{ECF}}{S_{ACB}} = \frac{1}{3}$$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Саша $x \in [-3\pi, -2\pi]$, то $\arccos(\cos x) =$
 $= -2\pi - x$. Тогда $x = 2\pi - 5(-2\pi - x)$,
 ~~$-4x = 12\pi$~~ , $x = -3\pi \in [-3\pi, -2\pi]$
или
Мы передбрали все возможные
 x , а засчитали только все корни
Общий, $x = -3\pi, x = -\frac{4}{3}\pi, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{3}, x = 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

Дано $\cos x \in [-1, 1]$.
Возможны $x = \arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x)$ и
 $x = \arccos(\cos x) - \arcsin(\cos x)$

$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 5\arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 5\arccos(\cos x) = 2\pi, \text{ т.к. } \arccos \in [0, \pi], \text{ т.о.}$$

$$5\arccos(\cos x) \in [0, 5\pi] \Rightarrow 2\pi \Rightarrow x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (2\pi - 5\arccos(\cos x)) \in [-3\pi, 2\pi]$$

Если $x \in [\pi, 2\pi]$, то $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$

$$x = 2\pi - 10\pi + 5x \Rightarrow x = 2\pi \in [\pi, 2\pi] - \text{корень}$$

Если $x \in [0, \pi]$, то $\arccos(\cos x) = x$

$$x = 2\pi - 5x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in [0, \pi] - \text{корень}$$

Если $x \in [-\pi, 0]$, то $\arccos(\cos x) = -x$

$$x = 2\pi - 5(-x) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, 0] - \text{корень}$$

Если $x \in [-2\pi, -\pi]$, то $\arccos(\cos x) = x + 2\pi$

$$x = 2\pi - 5(x + 2\pi) \Rightarrow 6x = -8\pi \Rightarrow x = -\frac{4}{3}\pi \in [-2\pi, -\pi] - \text{корень}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \log_3 xt ((\log_3^3 x - \log_3^3 t)(\log_3 x - \log_3 t) + \\ & + \log_3^2 x \log_3^2 t + 8) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \log_3 x - \log_3 t \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 x \geq \log_3 t \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \log_3^3 x \geq \log_3^3 t \Leftrightarrow \log_3^3 x - \log_3^3 t \geq 0. \end{aligned}$$

$\log_3^3 x - \log_3^3 t = (\log_3 x - \log_3 t)$ всегда
одного знака ~~такое~~, тогда их произведение
 ≥ 0 . Тогда ≥ 0

$$\begin{aligned} & (\log_3^3 x - \log_3^3 t)(\log_3 x - \log_3 t) + \\ & + \log_3^2 x \log_3^2 t + 8 \geq 0 \text{ - не может быть } 0, \text{ тогда} \\ & \log_3 xt = 0 \Rightarrow x = t = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ип-бесл $\log_3^5 x + 8 \log_3 x = \frac{7}{2}$ - 5-ой степеня, а
значит имеет хотя бы одно решение, тогда

$$\text{если } \log_3^5 x_0 + 8 \log_3 x_0 = \frac{7}{2}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} & \log_3^5 \frac{t}{x_0} + 8 \log_3 \frac{t}{x_0} = -\log_3^5 \frac{1}{x_0} + 8 \log_3 \frac{1}{x_0} = \\ & = -\log_3^5 x_0 - 8 \log_3 x_0 = -\frac{7}{2} - \text{ тоже имеет} \\ & \text{решение!} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{5}$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

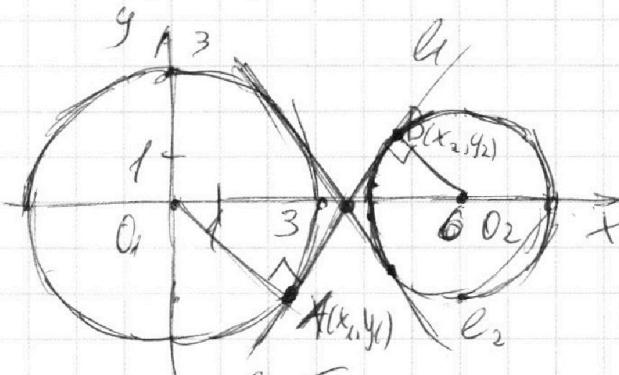
15

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-9)((x-6)^2+y^2-4)=0 \text{ построим второе ур-ние.}$$



Это 2 окр.. Где линия
второго - прямая, она
имеет с окр. 1е. 2е
пересечений. Выбираем

а это обозначим наложением прямой, выберем
в это пересечение прямую вверх и вниз.

Заметим, что если у прямой угол между линиями
меньше у l_1 , или больше у l_2 , то это можно
пересечь её так, чтобы она пересекла обе

окр-ти. (Начинаем это пересечение её по т. касания
с 1-м окр-ти, при этом она будет пересекать
вторую, затем незначительно её поднимая, она
всё равно будет пересекать вторую окр., но при-
чём она будет уже не касаться первой окр., а пересекать её)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы рассчитать предел касания окр. гиперболы, чтобы
расстояние от ц. до прямой было равно радиусу
окр.. Дадут ω_1 и ω_2 то $\frac{a+x_0+b+y_0+e}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+1}} = \frac{6+r}{6}$

л. кас. ω_1 в (x_1, y_1) , ω_2 в (x_2, y_2) . Тогда
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \because (x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$

$$x_1 x_2 - x_1^2 + y_1 y_2 - y_1^2 = 0, \text{ так как}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{O_2 B} = 0 \Rightarrow (6 - x_2, y_2)(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$$

$$\begin{cases} 6x_2 - x_2^2 + x_1 x_2 - 6x_1 + y_2^2 + y_2 y_1 = 0 \\ -x_1^2 + x_1 x_2 - y_1^2 + y_1 y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + 6x_2 - 6x_1 - x_2^2 - y_2^2 = 0$$

$$6x_2 - 6x_1 = 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

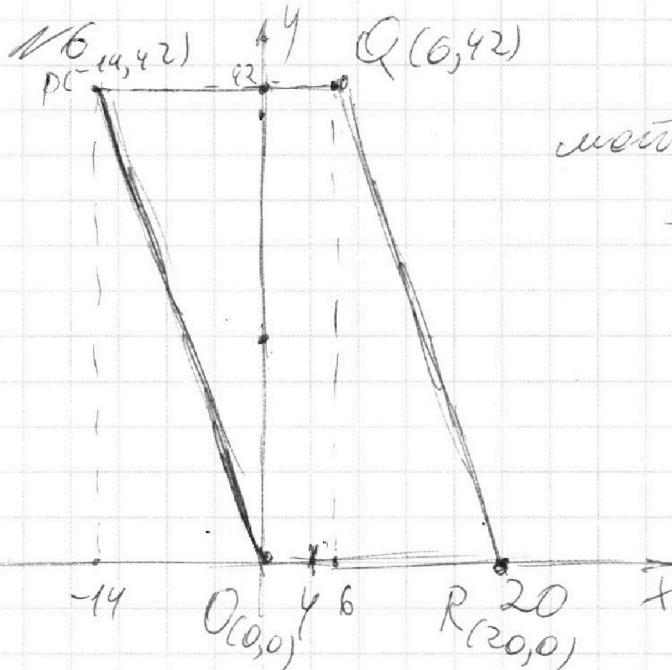
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдём ур-ние прес-
мой QR

$$\frac{x-6}{20-6} = \frac{y-42}{0-42}$$

$$x - 6 = \frac{y}{3} + 14$$

$$x = -\frac{y}{3} + 20$$

Все точки в паралл-
ограмме лежат выше
этой прямой, значит

$$x \leq -\frac{y}{3} + 20, \text{ такие } 0 \leq y \leq 42$$

Найдём ур-ние пресмой PO: $\frac{x-0}{-14-0} = \frac{y-0}{42-0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -\frac{y}{3} \text{ Все эти паралл-шиа лежат правее}$$

этой прямой, значит $x \geq -\frac{y}{3}$. Но все

точки паралл-шиа задаются нер-вами

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ -\frac{y}{3} \leq x \leq 20 - \frac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 42 \\ 0 \leq 3x + y \leq 60 \end{cases}$$

такие $3x_2 + y_2 \in [0, 60]$, $3x_1 + y_1 \in [0, 60]$,

тогда $3x_1 + y_1 = 3x_2 + y_2 - 33 \leq 27 \Rightarrow 3x_1 + y_1 \in [0, 27]$

Рассмотрим все варианты $3x_2 + y_2 = 33 + 3x_1 + y_1$

$3x_1 + y_1 = k \in [33, 60]; k \in [11, 20]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2 \cdot 36 - 2 \cdot 36 \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{11}}{6},$$

$$CM^2 = CA_1^2 + R_1 M^2 - 2 \cdot CA_1 \cdot R_1 M \cdot \cos \angle CA_1 M =$$

$$= 2 \cdot 36 + 2 \cdot 36 \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow (CM \circ BM)^2 =$$

$$= (2 \cdot 36)^2 \left(1 - \frac{11}{36}\right) = 4 \cdot 36 \cdot 25 \Rightarrow CM \circ BM = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CG_1 \circ BB_1 = \frac{3}{2} CM \circ \frac{3}{2} BM = 15, \text{ тогда}$$

$$CG_1 \cdot BB_1 \cdot HA_1 = 135 \cdot 18 = 2430$$

ответ. 2430

$$5) SO = \sqrt{ON^2 + NW^2} = \sqrt{41}, SL = \sqrt{SO^2 - OL^2} = 4,$$

Потому AL = AS - SL = 8, AK = AL = 8 \Rightarrow

$$\Rightarrow KA_1 = AA_1 - AK = 10.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

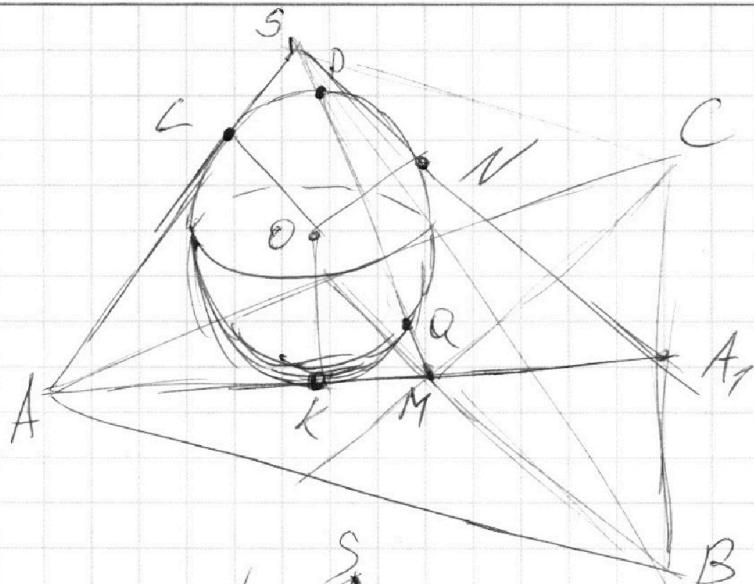
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

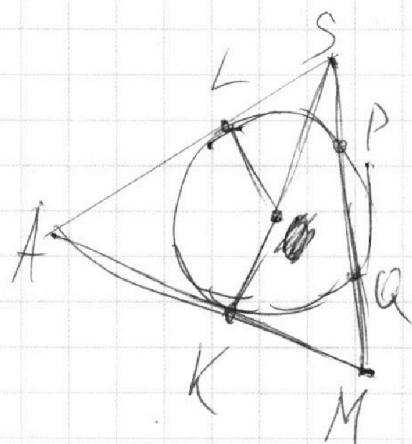
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

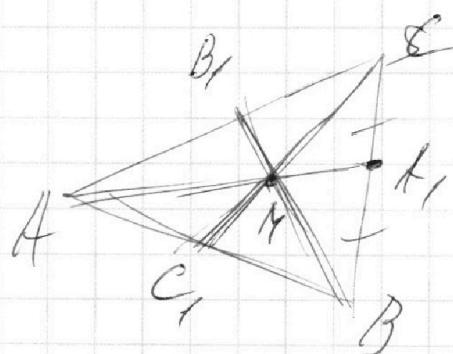


$$SP = MQ, S_{ABC} = 90,$$

$$SA = BC = 12, \\ SN = 4, r = 3$$



$$SL^2 = SP \cdot SQ = SP \cdot (PQ + SP) = \\ = QM \cdot (PQ + QM) = QM \cdot MP = MR^2, \\ AL = AK \Rightarrow AM = AK + KM + AL + \\ + LS = AS = BC = 12.$$



$$\text{Тогда } AA_1 = \frac{3}{2} AM = 18,$$

$$S_{AA_1B} = \frac{AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin \angle AA_1B}{2}$$

$$= \frac{S_{ABC}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 \cdot \frac{12}{2} \cdot \sin d = 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin d = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos d = \sqrt{1 - (\frac{5}{6})^2}. \text{ Одно}$$

из уравнений AA_1B и AA_1C острый, другой тупой,

$$\text{т.к. } \cos \angle AA_1B = \frac{\sqrt{11}}{6}, \cos \angle AA_1C = -\frac{\sqrt{11}}{6},$$

$$AA_1 = \frac{AA_1}{3} = 6 \Rightarrow MB = MA_1^2 + A_1B^2 - 2MA_1 \cdot A_1B \cos 144^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$$

$x \neq 1 \Rightarrow \log_3 x \neq 0$. Доказываем первое
равенство на $\log_3 x$

$$\log_3^5 x + 6 = \frac{5}{2} \log_x 3 \log_3 x - 8 \log_3 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3^5 x + 8 \log_3 x = -\frac{7}{2}$$

Сделаем замену $t = 5y$, $t \neq 1 \Rightarrow \log_3 t \neq 0$

Доказываем второе равенство $\log_3 t$

$$\log_3^5 t + 2 = \frac{11}{2} \log_t 3 \log_t - 8 \log_3 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3^5 t + 8 \log_3 t = -\frac{7}{2}$$

Сложили 2 получившиеся равенства

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \log_3^5 t + 8 \log_3 t = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}$$

$$(\log_3 x + \log_3 t)(\log_3^4 x + \log_3^3 x \log_3 t + \log_3^2 x \log_3^2 t - \log_3 x \log_3^3 t + \log_3^4 t) + 18(\log_3 x + \log_3 t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x + \log_3 t)(\log_3^3 x (\log_3 x + \log_3 t) + \log_3^3 t (\log_3 t - \log_3 x) + \log_3^2 t \log_3^2 x + 8) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Приогда $x_1 = k - \frac{y_1}{3}$ слева подходит все
 $y \in [0, 42]$, $y \neq 3$ ибо ~~$y_2 = 3k + y_1$~~ $y_2 \in [0, 60]$ то же
время $x_2 = \frac{33 + 3k - y_2}{3} = 11 + k - \frac{y_2}{3}$, слева также
подходит все $y_2 \in [0, 60]$ кроме 3. При этом
таких k : $\frac{27}{3} + 1 = 10$ (бескрайние 3 от 190 27 и 0).

Найти y_2 такие что удовлетворяется $10 \cdot 15^2 - 3$

Если $3x_1 + y_1 = l$, то $x_1 = \frac{l - y_1}{3}$

Если $l = 3k + 1$, то $y = 3k + 1$, $y \in [0, 42]$, таких

y ровно $\frac{42}{3} = 14$, также $l = 3k + 2$

$y_2 + 3x_2 = 33 + l$, $x_2 = 11 + \frac{l - y_2}{3}$, также y_2 будет

также 14 (все они подходят, т.к. $y_2 + 3x_2 \in [0, 60]$),

что верно для всех оставшихся l , кроме
роях 28-10. Приогда все удовлетворяют $18 \cdot 14^2$ пар

Ответ: всего $10 \cdot 15^2 + 18 \cdot 14^2$ пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = 20 - \frac{y_1}{3}$$

15

$$x_2 = 9 - \frac{y_2}{3}$$

10

$$x_1 = \frac{59 - y_1}{3}, x_2 = \frac{28 - y_2}{3}$$

14

9

$$x_2 = \frac{58 - y_1}{3}$$

14

, 9

$$19 - \frac{y_1}{3}$$

15

9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

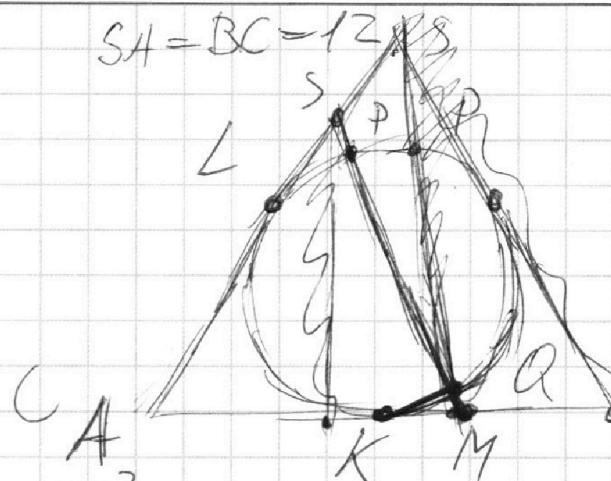
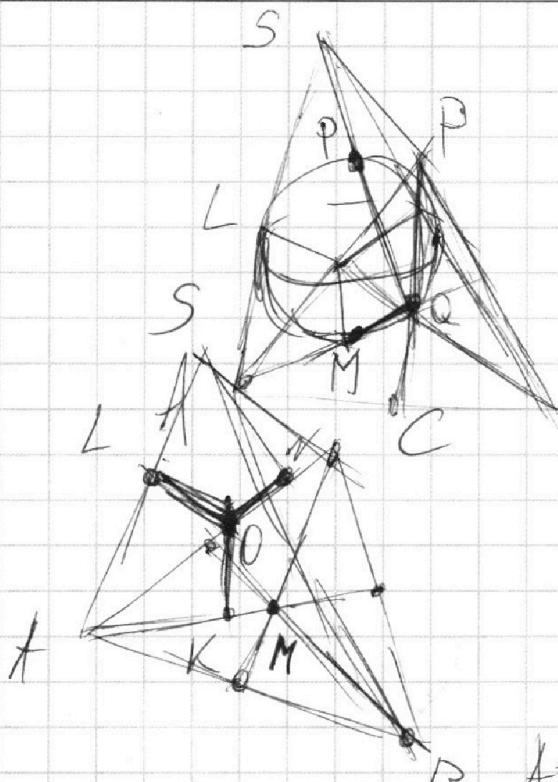
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SL^2 = SP \cdot SQ = MK^2 = \Delta AS - AM$$

$$AM = BC = 12 \Rightarrow AM = 12, AC = 18$$

$$\begin{aligned} &AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin \angle A_1B = \\ &= \frac{S}{R} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \\ &\sin \angle A_1B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &18 \cdot 6 \cdot \sin \alpha = \\ &= 90 \sin \alpha = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\frac{AA_1 \cdot A_1B \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{S}{R} \quad 18 \cdot 6 \cdot \sin \alpha = 90 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \frac{\sqrt{11}}{6} \quad MB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1A_1B \cos \alpha = \\ &= 2 \cdot 36 \left(1 \pm \frac{\sqrt{11}}{6}\right) \quad MB^2 \cdot MC^2 = 4 \cdot 36 \left(1 - \frac{11}{36}\right) = \\ &= 100 \cdot 36 \quad MB \cdot MC = 360 \cdot 60 \quad BB_1 \cdot CG = \dots \end{aligned}$$

$$SN = 4, OV = 5 \quad MB \cdot CG$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

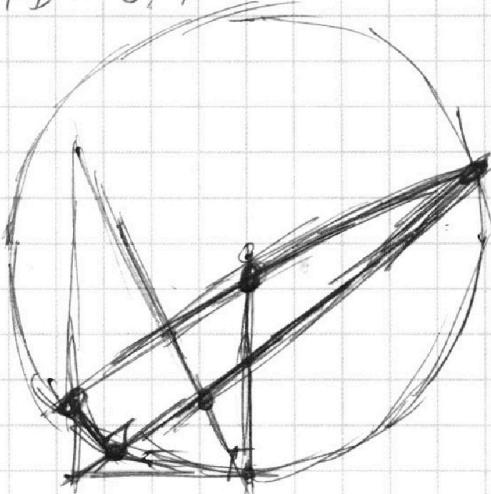
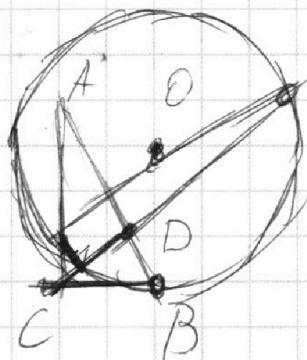
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{93} \cdot 5^{10}, bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^7 \cdot 7^3, ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10}$$

$$\begin{aligned}x_a + x_b &\geq 9 \\ x_b + x_c &\geq 14 \\ x_a + x_c &\geq 19 \Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq 21\end{aligned}$$

$$AP:AD = 3:1$$



$$\begin{array}{r} +135 \\ 18 \\ \hline 1080 \\ 135 \\ \hline 2930 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ✗ | | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | |

МФТИ

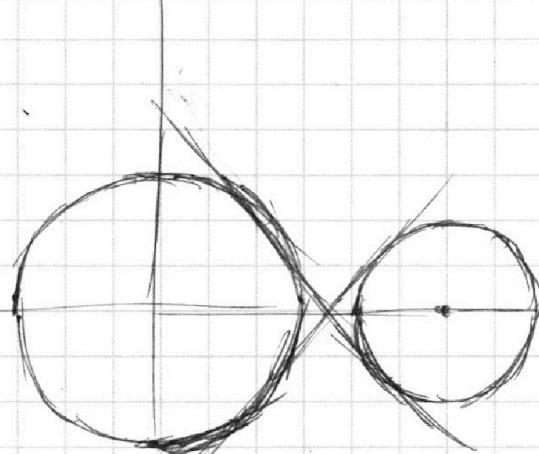
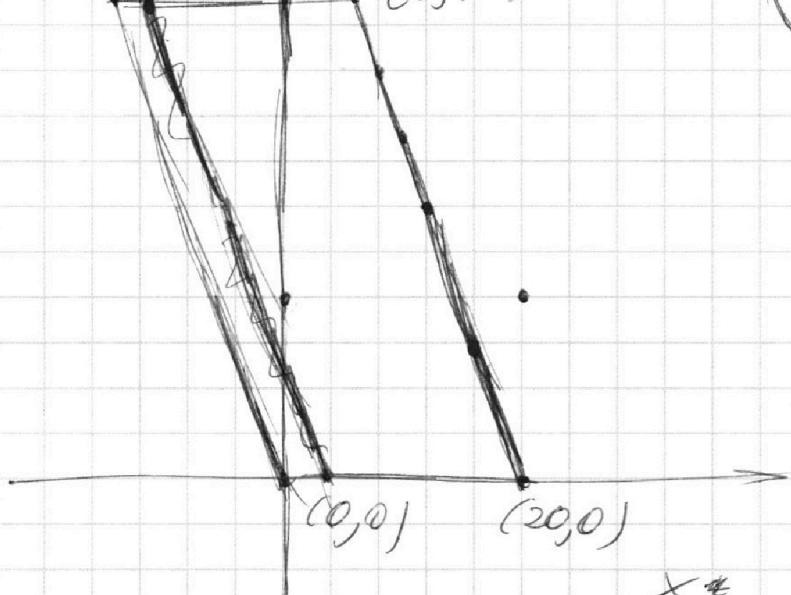


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 - 36 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12 + t_3) = 0$$
$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$g = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}t$$
$$(-14, 42) \quad (10, 42)$$
$$(6, 42)$$



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$\frac{x-6}{20-6} = \frac{y-42}{-42}$$

$$x-6 = \frac{y-42}{3} + 14$$

$$x = \frac{y}{3} + 20$$

$$x \leq \frac{y}{3} + 20$$

$$x \geq \frac{y}{3}$$

$$\frac{x-6}{14} = \frac{y}{42} \quad x \geq -\frac{y}{3}$$

$$0 \leq y \leq 42 \quad 0 \leq 3x + y \leq 60 \quad 0 \leq y \leq 42$$

$$3x \leq 60 - y \quad -y \leq 60 - 3x \quad y \geq -3x$$

$$-y \leq t \leq 60 - y \quad t_2 + y_2 - t_1 - y_1 = 33$$

$$y_1 = 42 \quad t \in [-42, 18] \quad y_1 + t_1 \in [0, 60]$$

$$y_1 + t_1 = 60 \quad t_1 = 60 - y_1 \quad t_1 \in [3, 57]$$

$$t_2 = 27 - y_2 \quad y_2 = 0, \dots, 10 \quad 59 \geq y_2 = 5, \dots, 9, 14$$

$$\frac{4\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3} \quad 120 \quad -60 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

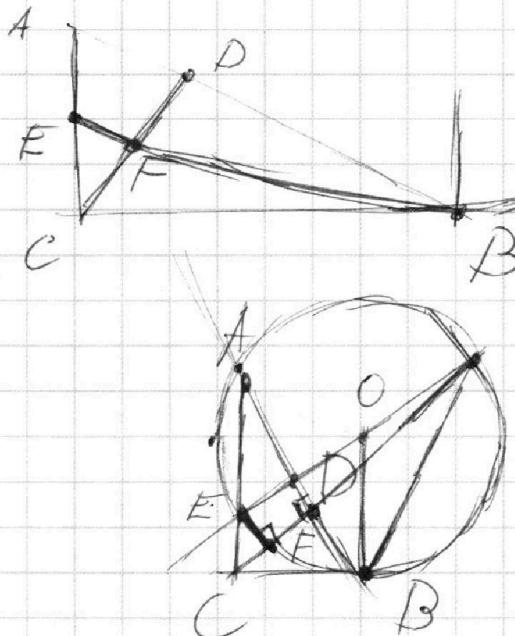
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF \quad AD \cdot PB = 3 \cdot r$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{PB}{r}$$

$$\frac{AD}{PB} = 3 \quad \frac{AD}{CD} = \frac{r}{PB}$$

$$CD^2 = 3PB^2 \quad CP = \sqrt{3}PB$$

$$BC = 2PB$$

$$\angle ABC = 60^\circ$$

$$CB^2 = 4PB^2 \quad CF \cdot CR = CB^2 = 4PB^2 = \frac{4}{3}CD^2$$

$$\angle EFB = 60^\circ$$

$$5\sqrt{t-x^2} = x + \frac{\pi}{2} \quad \arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2} \quad 2\pi = 6x \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$\log_3 t + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 =$$

$$= \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \quad \log_3^5 t + 6 = \frac{5}{2} - 8 \log_3 t$$

$$\log_3^7 t + 2 \log_t 3 = \log_t 2(3^{11}) - 8$$

$$\log_3^5 t + 2 = \frac{11}{2} - 8 \log_3 t \quad \frac{7}{2} - \frac{7}{2}$$

$$\log_3^8 t + 18 \log_3 t = \frac{7}{2} \quad + \log_3^3 t (\log_3 t + \log_3 x)$$

$$\log_3^5 t + 8 \log_3 x = -\frac{7}{2} \quad + t = 1$$

$$\log_3 x t \cdot (\log_3^4 t - \log_3^3 t \log_3 x + \log_3^2 t \log_3^2 x - \log_3^2 t \log_3^3 x + \log_3^4 t + 8) = 0$$