МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} ab \vdots 2^7\cdot 3^{11}\cdot 5^{14} \\ a, b \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow ab = k\cdot 2^7\cdot 3^{11}\cdot 5^{14},\ k\in\mathbb{N}$

$\begin{cases} bc \vdots 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18} \\ b, c \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow bc = m\cdot 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18},\ m\in\mathbb{N}$

$\begin{cases} ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43} \\ a, c \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow ac = n\cdot 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43},\ n\in\mathbb{N}$

$a^2b^2c^2 = kmn\cdot 2^{34}\cdot 3^{43}\cdot 5^{75} = 3\cdot 5\cdot kmn\cdot(2^{17}\cdot 3^{21}\cdot 5^{37})^2$

$abc = \sqrt{15kmn}\cdot 2^{17}\cdot 3^{21}\cdot 5^{37}$, $abc\in\mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{15kmn}\in\mathbb{N}$

Поймём, что $\sqrt{15kmn} = (\sqrt{15}\cdot\sqrt{kmn})\in\mathbb{N}$

Чтобы получить натуральное число, наименьшее, на что нужно домножить $\sqrt{15}$ — это $\sqrt{15}$ (чтобы в итоге был корень из квадрата натурального числа, равный этому натуральному числу), т.к. $15=3\cdot5$, а 3 и 5 — простые числа, и им под корнем нужна „пара", чтобы выйти натуральным числом из под радикала: тройке — тройка, пятёрке — пятёрка.

Тогда: $\sqrt{kmn} = \sqrt{15}$ ~~$\Rightarrow kmn = 15$~~

Следовательно: $abc = \sqrt{15kmn}\cdot 2^{17}\cdot 3^{21}\cdot 5^{37} =$
$= \sqrt{15^2}\cdot 2^{17}\cdot 3^{21}\cdot 5^{37} = 15\cdot 2^{17}\cdot 3^{21}\cdot 5^{37} = 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}$

К, примеру, $k=5$, $m=1$, $n=3$

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}$

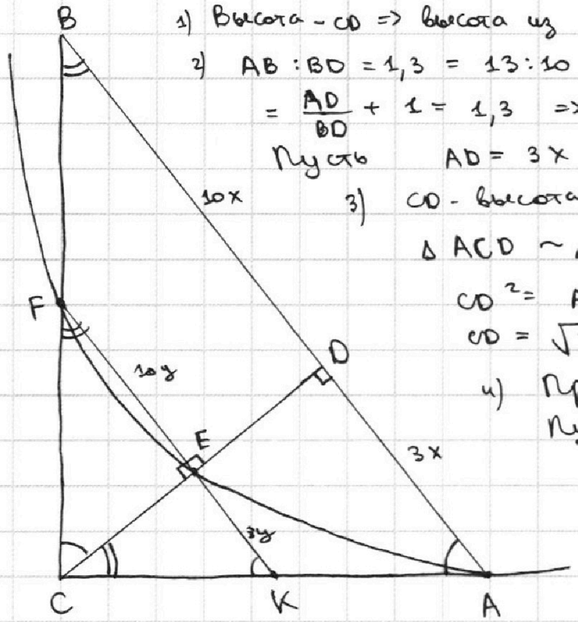
(N 1)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



1) Высота – CD => высота из C => $\angle C = 90°$ в $\triangle ABC$

2) $AB : BD = 1{,}3 = 13:10$; $AB = AD + BD$ => $AB:BD = \frac{AD+BD}{BD} =$
$= \frac{AD}{BD} + 1 = 1{,}3$ => $AD : BD = 0{,}3 = 3:10$

Пусть $AD = 3x$, $BD = 10x$, тогда $AB = AD + BD = 13x$

3) CD - высота в $\triangle ABC$ => $CD \perp AB$ => $\angle BDC = \angle ADC = 90°$

$\triangle ACD \sim \triangle BCD$ (по двум углам) => $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

$CD^2 = AD \cdot BD = 3x \cdot 10x = 30x^2$

$CD = \sqrt{30x^2} = x\sqrt{30}$

4) Продлим (EF) до пересечения с AC. Пусть точка пересеч. – K.

$EF \parallel AB$ => $\cancel{\angle FCE}$ $\angle CFE = \angle CBD$, $\angle EKC = \angle DAC$ } как соотв.

Тогда: $\triangle CFE \sim \triangle BDC$ (по 2 углам) => $\frac{FE}{BD} = \frac{CE}{CD}$

$\triangle CKE \sim \triangle ACD$ (по 2 углам) => $\frac{KE}{AD} = \frac{CE}{CD}$

Получаем, что $\frac{FE}{BD} = \frac{KE}{AD}$, т.е.
$FE : KE = BD : AD = 10:3$

5) Пусть $FE = 10y$, $KE = 3y$;
В $\triangle CKF$ CE – высота;
$\triangle CEF \sim \triangle CKE$ (по 2 углам) => $\frac{KE}{CE} = \frac{CE}{FE}$ => $CE = \sqrt{FE \cdot KE} = y\sqrt{30}$

6) По св-ву кас. и секущ., пров. из одной точки к окр-ти:
$KE \cdot KF = KA^2$
$3y(3y + 10y) = KA^2$ => $KA = y\sqrt{39}$

7) $\triangle CKE \sim \triangle ACD$ => $\frac{KE}{AD} = \frac{CK}{AC}$; $\frac{3y}{3x} = \frac{AC - AK}{AC}$; $\frac{y}{x} = 1 - \frac{AK}{AC}$

AC по т. Пифагора из $\triangle ACD$: $AC^2 = CD^2 + AD^2$
$AC = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = x\sqrt{39}$

Тогда: $\frac{y}{x} = 1 - \frac{AK}{AC} = 1 - \frac{y\sqrt{39}}{x\sqrt{39}} = 1 - \frac{y}{x}$;

$\frac{2y}{x} = 1$ => $2y = x$; $y = \frac{x}{2}$; $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$; $\frac{x}{y} = 2$

8) $S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{3x \cdot x\sqrt{30}}{2} = \frac{3\sqrt{30}}{2} x^2$

$S_{CEF} = \frac{CE \cdot EF}{2} = \frac{y\sqrt{30} \cdot 10y}{2} = 5\sqrt{30}\, y^2$

$S_{ACD} : S_{CEF} = \frac{3\sqrt{30}}{2 \cdot 5\sqrt{30}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{3}{10} \cdot 2^2 = \frac{12}{10} = 1{,}2$

Ответ: 1,2
(N2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\arccos(\sin x) = 5\cdot\frac{\pi}{2} - \pi + x$

Зная, что $\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$:

$5\arccos(\sin x) = 5(\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x)) - \pi + x$

$5\arcsin(\sin x) = \pi - x$; $x = \pi - 5\arcsin(\sin x)$

$\exists f(x) = \arcsin(\sin x)$

$E_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, т.е. $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(\sin x) \le \frac{\pi}{2}$ $\Big|\cdot 5$

$-\frac{5\pi}{2} \le 5\arcsin(\sin x) \le \frac{5\pi}{2}$ $\Big|\cdot(-1)$

$-\frac{5\pi}{2} \le -5\arcsin(\sin x) \le \frac{5\pi}{2}$ $\Big| +\pi$

$-\frac{3\pi}{2} \le \pi - 5\arcsin(\sin x) \le \frac{7\pi}{2}$, т.е.

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$

$\sin x = \sin(\pi - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ функция $g(x) = \sin x$ симметрична отн. прямой $x = \pi$

Проверим $x = \pi$: $5\arcsin(\sin\pi) = \pi - \pi$

$5\arcsin(0) = 0$ — подходит

Теперь найдём решения на $[\pi; \frac{7\pi}{2}]$ и потом отразим их отн. $x = \pi$ — такие решения также будут верными.

$g(x) = \sin x$ периодична: $T = 2\pi$, тогда:

$5\arcsin(\sin x) = 5\arcsin(\sin(x + 2\pi n))$, $n \in \mathbb{Z}$

$5\arcsin(\sin(x + 2\pi n)) = 5(x + 2\pi n)$ при условии, что

$-\frac{5\pi}{2} \le 5(x + 2\pi n) \le \frac{5\pi}{2}$

$n = 0$: $5x = \pi - x$

$x = \frac{\pi}{6} < \pi$ — не подходит для $(\pi; \frac{7\pi}{2}]$

$n = -1$: $5x - 10\pi = \pi - x$

$x = \frac{11\pi}{6}$ — подходит + его отражение: ~~$x = \pi - \frac{11\pi}{6} =$~~

$x = \pi - (\frac{11\pi}{6} - \pi) = \frac{\pi}{6}$

$n = -2$: $5x - 20\pi = \pi - x$

$x = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2}$ — подходит + его отражение:

$x = \pi - (\frac{7\pi}{2} - \pi) = -\frac{3\pi}{2}$

$n = -3$: $5x - 30\pi = \pi - x$

$x = \frac{31\pi}{6} > \frac{7\pi}{2}$ — не подходит для $(\pi; \frac{7\pi}{2}]$

Ответ: $\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\}$

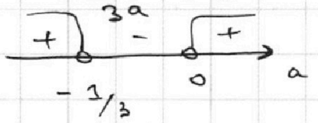
(N3)

(продолжение №4)

1) $-1 < \frac{1}{3a}$;

$\frac{1}{3a} + 1 > 0$

$\frac{3a+1}{3a} > 0$



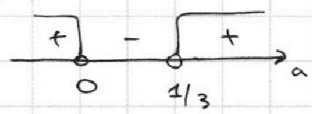
$\left[\begin{array}{l} a < -\frac{1}{3} \\ a > 0 \end{array}\right.$

2) $\frac{1}{3a} < 1$

$\frac{1}{3a} - 1 < 0$

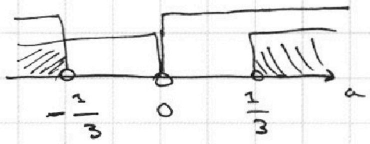
$\frac{1-3a}{3a} < 0$

$\frac{3a-1}{3a} > 0$



$\left[\begin{array}{l} a > \frac{1}{3} \\ a < 0 \end{array}\right.$

Пересечение 1) и 2):



т.е. $\left[\begin{array}{l} a < -\frac{1}{3} \\ a > \frac{1}{3} \end{array}\right.$

<u>Ответ</u>: $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$
(№4)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

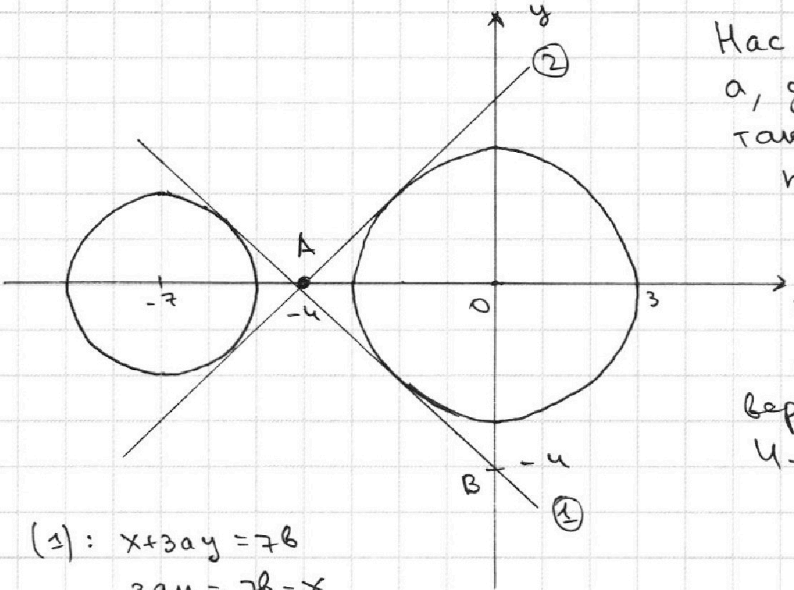
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1)\\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2)\end{cases}$$

(2): $\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0\\ x^2+y^2-9=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=4 \text{ — ур-е окр-ти с ц. в } (-7;0) \text{ и } r_1=2\\ x^2+y^2=9 \text{ — ур-е окр-ти с центром в } (0;0) \text{ и } r_2=3\end{array}\right.$

Изобразим (2) на пл-сти (x,y):



Нас интересуют значения a, для которых сущ. b, такое, что прямая (1) пересечёт эти две окр-ти в 4_x точках. (при $a\neq 0$)

$a=0$: (1): $\cancel{x}=7b$ — вертик. прямая => не будет 4_{-x} пересечений => $a=0$ – нез подходит.

(1): $x+3ay=7b$

$3ay=7b-x$

$y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}=kx+c$, где $k=-\frac{1}{3a}$, $c=\frac{7b}{3a}$

$c\in\mathbb{R}$ – насколько сдвинута по вертикали прямая $y=\frac{-1}{3a}x$ $\frac{7b}{3a}$

Найдём такие a, что $y=-\frac{1}{3a}x$ можно как-то сдвинуть по вертикали на "c" и получить 4 пересечения.

Найдём для этого такие $-\frac{1}{3a}$ – углы наклона прямой (1). Очевидно, самый маленький будет у внут. кас. 1, а самый большой – у внут. кас. 2, причём $k_{1}=-k_{2}$ в силу симметрии

$k_{1}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-4-0}{0-(-4)}=-1$ => $k_{2}=1$, причём у кас. 2 решения => -1 и 1 не подх.

Тогда: ~~$-\frac{1}{3a}$~~ ~~…~~ $-1<\frac{-1}{3a}<1$

$-1<\frac{1}{3a}<1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$

$\log_7^4(6x) - \dfrac{2}{\log_7(6x)} = \log_{(6x)^2}7^3 - 4$ ОДЗ: $\begin{cases}6x>0\\6x\neq 1\end{cases}$

$\log_7^4(6x) - \dfrac{2}{\log_7(6x)} = \dfrac{3}{2\log_7(6x)} - 4$ $\begin{cases}x>0\\x\neq \frac{1}{6}\end{cases}$

$\exists\ \log_7 6x = a$

$a^4 - \dfrac{2}{a} = \dfrac{3}{2a} - 4;\quad \dfrac{2a^5+8a-7}{2a} = 0 \quad (1)$

2) $\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$ ОДЗ: $y>0$, $y\neq 1$

$\log_7^4 y + \dfrac{6}{\log_7 y} = \dfrac{5}{2\log_7 y} - 4$

$\exists\ \log_7 y = b$

$b^4 + \dfrac{6}{b} = \dfrac{5}{2b} - 4;\quad \dfrac{2b^5+8b+7}{2b} = 0 \quad (2)$

$a+b = \log_7 6x + \log_7 y = \log_7(6xy)$

$6xy = 7^{(a+b)}$

$xy = \dfrac{7^{(a+b)}}{6}$ – необходимо найти все возможные значения этого выражение

$(1): \begin{cases}2a^5+8a-7=0\\2a\neq 0\end{cases} \Rightarrow 2a^5+8a=7$

$(2): \begin{cases}2b^5+8b+7=0\\2b=0\end{cases} \Rightarrow 2b^5+8b=-7 = -(2a^5+8a)$

① $2b^5+8b = -2a^5-8a = 2(-a)^5+8(-a) \Rightarrow b=-a$, тогда

$a+b=0$, и $xy = \dfrac{7^{(a+b)}}{6} = \dfrac{7^0}{6} = \dfrac{1}{6}$

~~② $2a^5+8a-2b^5-8b=0$~~

Ответ: $\dfrac{1}{6}$
(N 5)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$ $\quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ $\quad \Rightarrow \begin{cases}(x_2-x_1) \in \mathbb{Z} \\ (y_2-y_1) \in \mathbb{Z}\end{cases}$

$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$

$a = (x_2 - x_1)\cdot 4$ – горизонтальный катет прямоуг. Δ-ка

$b = y_2 - y_1$ – вертикальный катет

Нас интересуют Δ-ки : 1) $a = 0$, $b = 40$;

таких Δ-ов в параллелограмм влезет $(68-40+1)\cdot 3 = 87$

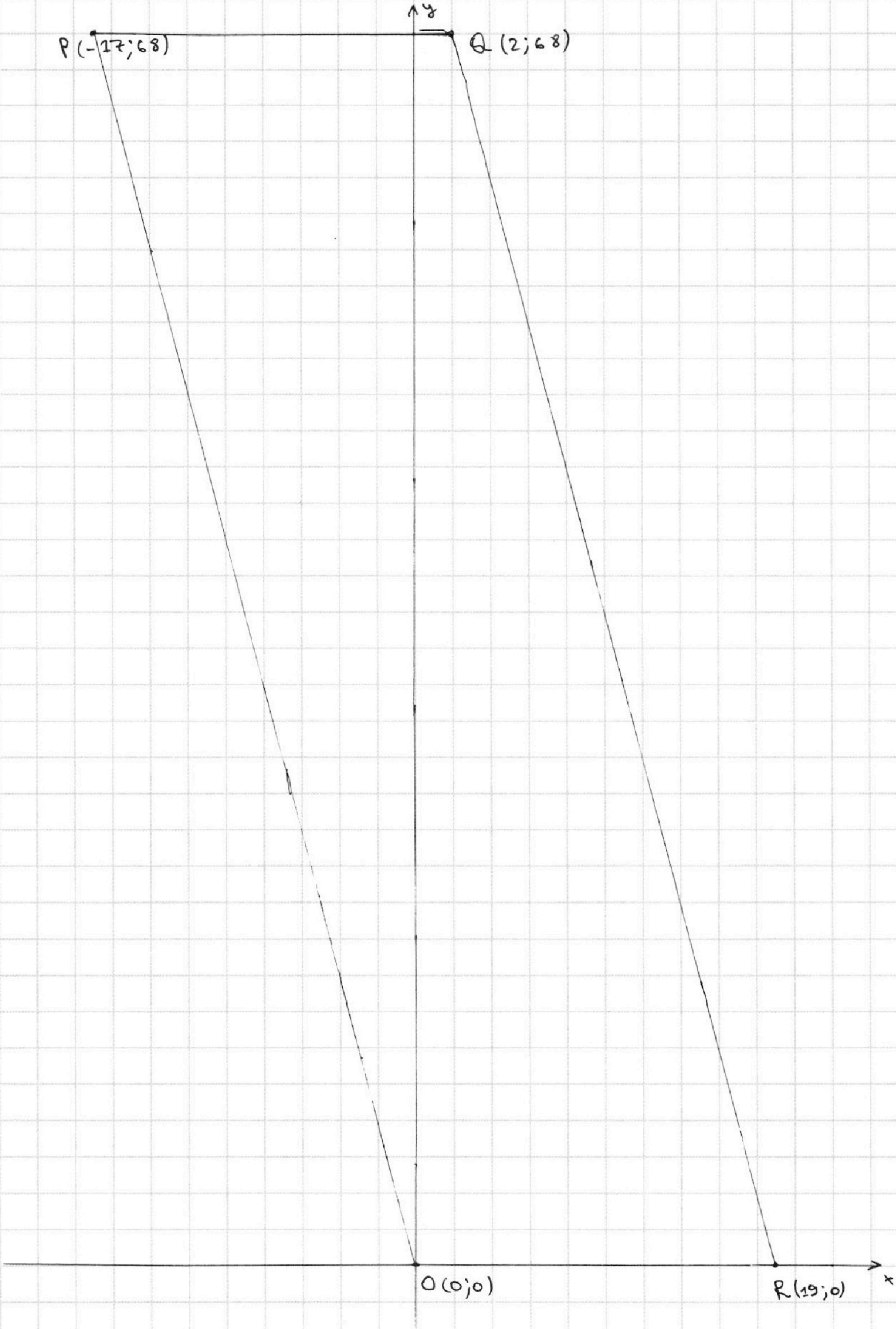
2) $a = 1$, $b = 36$

таких:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 ☒ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черн

$\log_7 6x = -\log_7 8$

$6x = 7^{-2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5\arccos(\sin x) = 5\cdot\frac{\pi}{2} - \pi + x$

$k=4$

$k\Delta x + \Delta y = 40$

$4\Delta x + k\Delta x = 40 \cdot 6$

$(k+4)\Delta x = 40 \cdot 6$

С учётом равенства: $\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2}$:

$5\arccos(\sin x) = 5(\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x)) - \pi + x$

$5\arccos(\sin x) = 5\arccos(\sin x) + 5\arcsin(\sin x) - \pi + x$

$5\arcsin(\sin x) = \pi - x$

Композиция возрастающих функций $f(x) = \arcsin x$ и $g(x) = \sin x$ на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ есть возрастающая функция $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ 5\arcsin(\sin x)\uparrow$ на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

На $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin x) = x$, тогда:

$5x = \pi - x$; $6x = \pi$; $x = \frac{\pi}{6}$

$h(x) = \pi - x$ – убывает (т.к. $-x\downarrow$)

Получаем, что $\uparrow = \downarrow$ $\Rightarrow$ есть единственный корень $x = \frac{\pi}{6}$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

(N3)

$y = -\frac{4}{3a} + \frac{\cancel{7a}}{3a}$

$5x + 10\pi = \pi - x$

$6x = -9\pi$

$\frac{22\pi}{6}$

$5x - 10\pi = \pi - x$

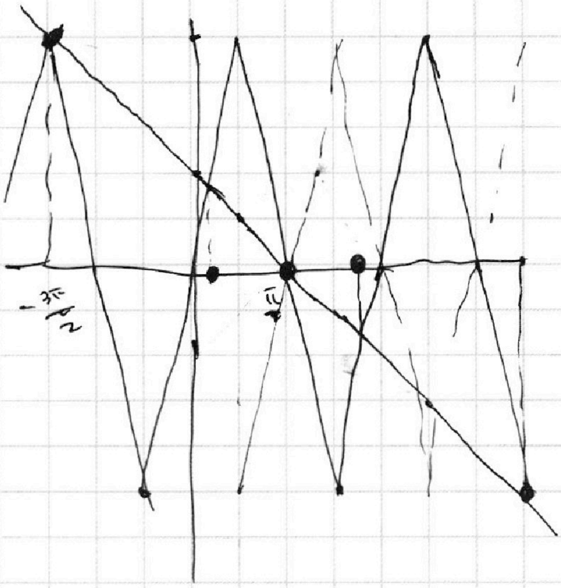
$5x - 20\pi = \pi - x$

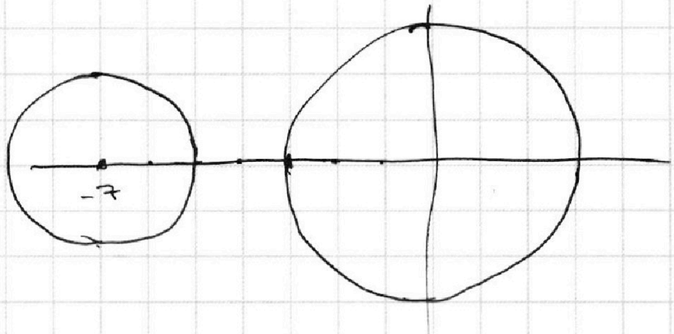
$\frac{22\pi}{6} = \frac{7}{2}\pi$

Черновик

$a = 0$ ⊗

$-\frac{\pi}{2} \le x + 2\pi n \le \frac{5\pi}{2}$





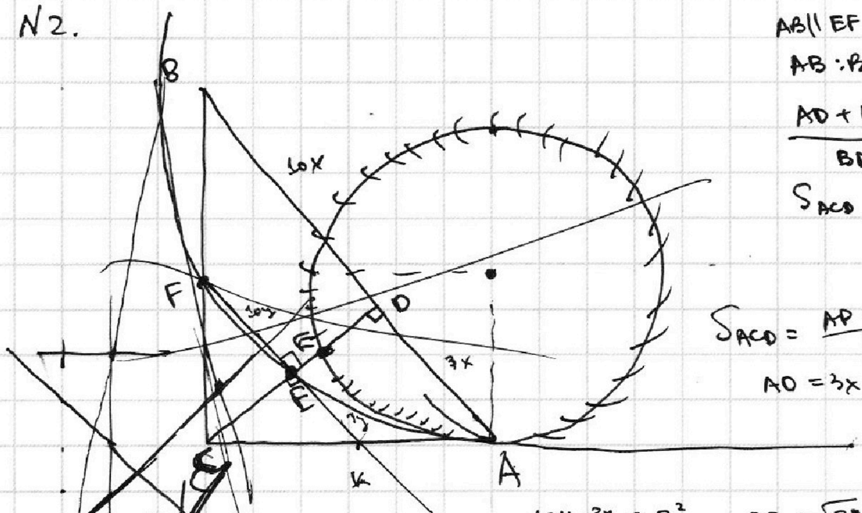
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N2.

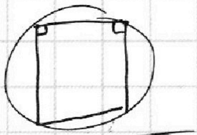


$AB \parallel EF$

$AB : BD = \frac{13}{10}$

$\frac{AD + BD}{BD} = \frac{13}{10}; \; AD/_{BD} = \frac{3}{10}$

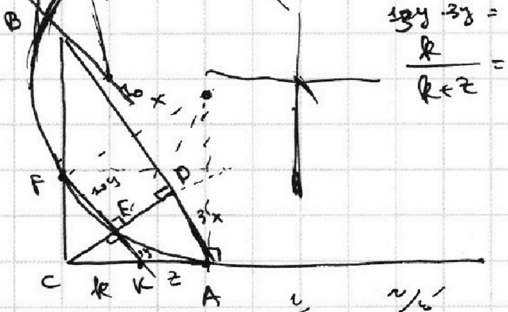
$S_{ACD} : S_{CEF} - ?$



$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2}$

$AD = 3x; \; CD = \sqrt{(k + y\sqrt{39})^2 - 9x^2} =$

$= \sqrt{\left(y\sqrt{39}\left(1 + \frac{2}{x-y}\right)\right)^2 - 9x^2}$



$13y \cdot 3y = z^2 \qquad z = y\sqrt{39}$

$\frac{k}{k+z} = \frac{y}{x};$

$\frac{k}{k + y\sqrt{39}} = \frac{y}{x}$

$kx = ky + y^2\sqrt{39}$

$k = \frac{y^2\sqrt{39}}{x-y}$

$1 + \frac{1}{x-y} = \frac{x-y+1}{}$

N5.

1) $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{(6x)^2}7^3 - 4$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2\log_7(6x)} - 4$

ОДЗ: $\begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$

2) $\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$

$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4$

$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4$

$2b^5 + 8b + 7 =$

$= 2a^5 + 8a - 7$

$2(a^5 - b^5) + 8(a-b) = 14$

$\exists \begin{cases} \log_7 6x = a \\ \log_7 y = b \end{cases}$

$a^4 - \frac{4}{2a} = \frac{3}{2a} - 4;$

$\frac{2a^5 - 4 - 3 + 8a}{2a} = 0$

$\frac{2a^5 + 8a - 7}{2a} = 0$

$a + b = \log_7 6xy$

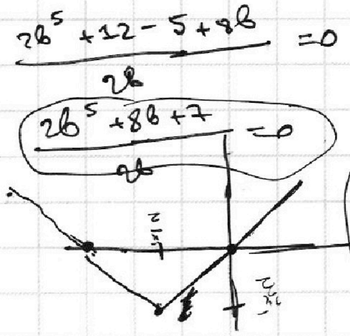
$a \neq 0$

$2a^5 + 8a - 7 = 0$

$\frac{2b^5 + 12 - 5 + 8b}{2b} = 0$

$\frac{2b^5 + 8b + 7}{2b} = 0$

$\frac{2ab^5 + 8ab + 7a + 2a^5b + 8ab - 7b}{2ab} = 0$



$CD \cdot 13x = AB \cdot BC$

$\frac{CD}{10x} = \frac{3x}{CD} \Rightarrow CD = x\sqrt{30}$

$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{3x \cdot x\sqrt{30}}{2} = \frac{3\sqrt{30}}{2}x^2$

Черновик. 1

17

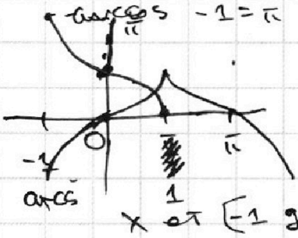
№3.

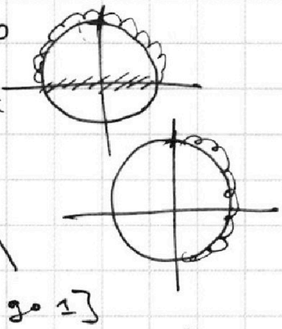
$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\arccos 1 = 0$

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

$\arccos -1 = \pi$





x от [-1 до 1]

arccos от [0 до π]

$-1 \le \sin x \le 1$

$\arccos(\sin x) = t$

$\cos t = \sin x$

$\sqrt{1-\sin^2 t} = \sin x$

$1-\sin^2 t = \sin^2 x$

$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin x$

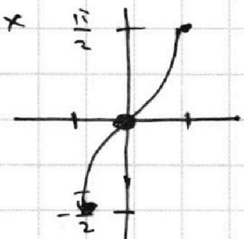
$5\arccos(\sin x) = 5\arccos(\sin x) + 5\arcsin \sin x - \pi + x$

$5\arcsin(\sin x) = \pi - x$

$\arcsin 0 = 0$

$\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$

$\arcsin +1 = \pi/2$



$5x = \pi - x$

$x = \frac{\pi}{6}$

sin x от -1 до 1

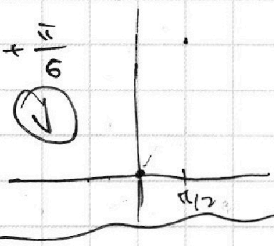
arcsin от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$

Пров:

$5\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{3} = \frac{9\pi+\pi}{6}$

$\frac{10\pi}{3} = \frac{9+7}{6}$



$\arcsin \sin x = x$ при $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$x + \arcsin(\sin 5x) = 0$

$5x + 10\pi = \pi - x$

$6x = -9\pi$

$x = -\frac{3\pi}{2}$

N 1.

$ab = k \cdot 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc = m \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ $\Rightarrow$

$32+43 = 75$

$a^2b^2c^2 = \underbrace{k \cdot m \cdot n}_{\ge 1} \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} =$

$= 15\underbrace{kmn}_{\ge 1} \cdot (2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37})^2$

$abc = \sqrt{15kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$

$\min(abc) = \sqrt{15} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$

Например: $k=5, m=3, n=1$

$ab = 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$

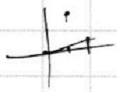
$bc = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{18}$

$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$15kmn = x^2$

$x = \sqrt{15kmn} \Rightarrow kmn = 15$

$\in \mathbb{N}$



$a = \sqrt{\frac{a^2bc}{bc}} = \sqrt{\frac{2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{58}}{2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{18}}} = \sqrt{2^{8} \cdot 3^{12} \cdot 5^{40}} = 2^{4} \cdot 3^{6} \cdot 5^{20}$

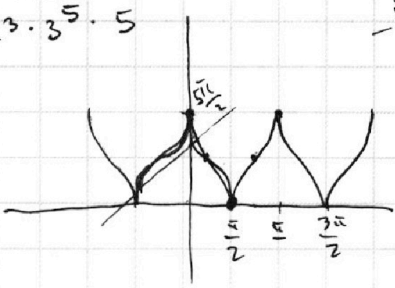
$b = 2^{3} \cdot 3^{5} \cdot 5$

$5\arccos\left(\sin\frac{23}{6}\pi\right) =$

$= \frac{5\pi}{3} = \pi - \frac{13\pi}{6}$

c $5\pi/2$

arccos



$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin \le \frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \le 5\arcsin \le \frac{5\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \le -5\arc \le \frac{5\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$

6π

$5\pi - 5x = \pi - x$

$4x = 4\pi$

$x = \pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

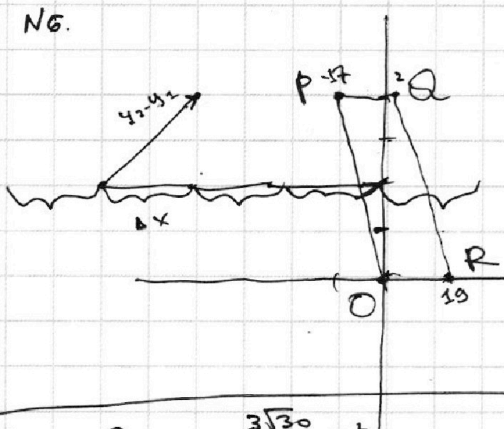
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик 2

N6.



$4x_2-4x_1+y_2-y_1=40$

$4(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=40$

ур. с прямой: $y=kx+b$

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(9;4)

6;2

$k=\frac{2}{3}$

$4\Delta x+\Delta y=40$

0;40

28;68

29 шт.

N2. $S_{ACD}=\frac{3\sqrt{30}}{2}x^2$

$S_{ABC}=\frac{CD\cdot AB}{2}=\frac{x\sqrt{30}\cdot 13x}{2}$

$S_{CEF}=CE\cdot EF$; $EF=10y$, $CE=y\sqrt{30}$

$S_{BCD}=\frac{10}{13}S_{ABC}=\frac{x\sqrt{30}\cdot 10x}{2}=$

$=5\sqrt{30}x^2$

$S_{CEF}:S_{ACD}=\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{1}{4}$

$0\le\Delta x\le\frac{19}{4}$

$AC=\sqrt{CD^2+AD^2}=\sqrt{30x^2+9x^2}=x\sqrt{39}$

$0\le\Delta x\le 10$

$AK=y\sqrt{39}$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

$\frac{y}{x}=CK:AC=\frac{AC-AK}{AC}=1-\frac{AK}{AC}=1-\frac{y}{x}$

$\frac{2y}{x}=1$ $\quad y=\frac{x}{2}$

$S_{CEF}=\frac{10y\cdot y\sqrt{30}}{2}=5\sqrt{30}y^2$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}=\frac{3\sqrt{30}x^2}{2}:5\sqrt{30}y^2=\frac{3\sqrt{30}}{2\cdot 5\sqrt{30}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{3}{10}\cdot 2^2=$

$=1,2$

N4.

$x=7b$ ← 1) $a=0$

$x+3ay=7b$

$3ay=7b-x$

$x+3ay-7b=0$

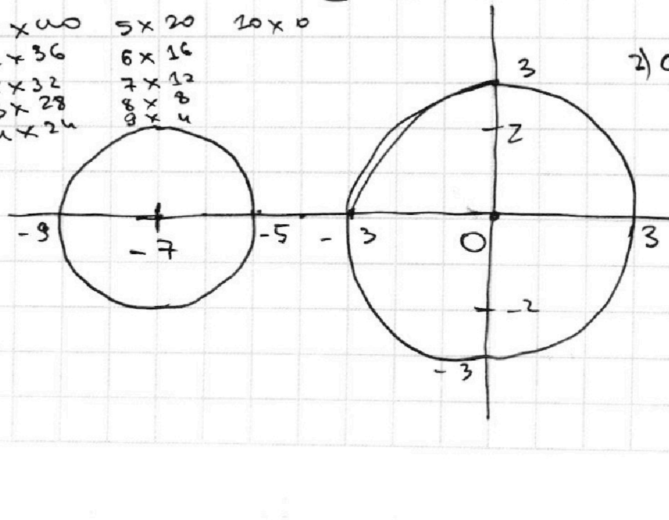
$\begin{cases}(x^2+14x+49)+y^2=2^2\\ x^2+y^2=9\end{cases}$

$\begin{cases}(x+7)^2+y^2=2^2\\ (x+0)^2+(y+0)^2=3^2\end{cases}$

$\frac{x}{3a}+y=\frac{7b}{3a}$

2) $a\neq0$: $y=-\frac{x}{3a}+\frac{7b}{3a}$

6 шт: 0×40, 1×36, 2×32, 3×28, 4×24, 5×20, 6×16, 7×12, 8×8, 9×4, 10×0



$a^5+b^5+8(a+b)$

$(a+b)(a^4-\ldots+8)=0$

$a-b$

$a^5-b^5+4(a-b)=0$

$(a-b)(\sim)+$

~~1~~?	5
~~2~~	6
~~3~~	7 а
4	7 б

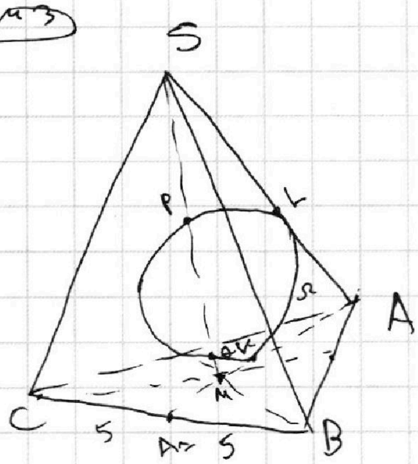
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

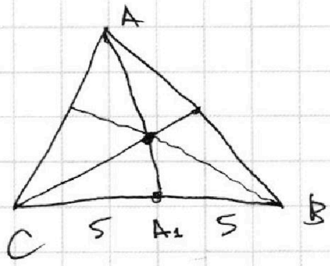
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черн 3





$a = \log_7 6x$

$b = \log_7 y$

$a+b = \log_7 6xy = \log_7 6 + \log_7 xy$

$\frac{(a+b)^7}{6} = xy$

$\frac{2a^5+8a-7}{2a} = 0 = \frac{2b^5+8b+7}{2b}$

$2a^5+8a-7 =$
$= 2b^5+8b+7$

$7 = 2a^5+8a$

$7 = -2b^5 - 8b$

$a+b = \log_7 6xy$

$\frac{7^{a+b}}{6} = xy$

$a+b = \log_7 6xy$

$7^{(a+b)} = 6xy$

$\frac{7^{(a+b)}}{6} = \dots$

$\frac{((a^5-b^5)+4(a-b))^{a+b}}{6} = \dots$

$a^5-b^5+4(a-b) = 7^1$

~~$(a-b)(a^4+\dots+b^4+4) = 7$~~

~~$(a+b)^7 = (a+b)\dots$~~

$7^{(a+b)} = ?$

$\log_7 \dots = 1$

$\log_7 \underbrace{6xy} = a+b$

x, y ?