МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

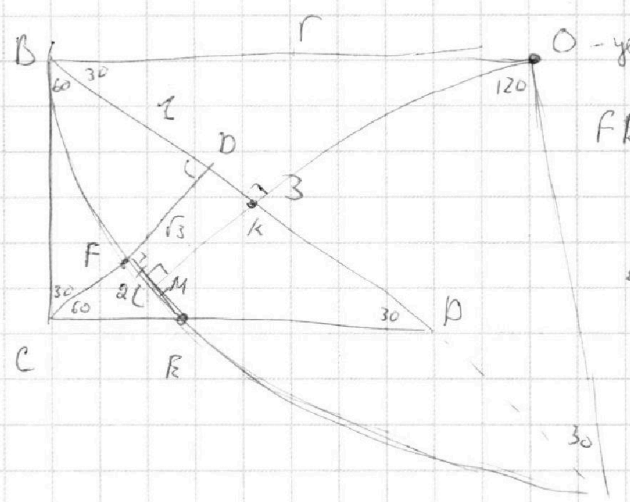
а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

НУО $DB=1 \Rightarrow CD = \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3} \Rightarrow \angle DCA = 60^\circ \Rightarrow \angle A = 30^\circ$ ... $\angle OBA = 30^\circ$ (1)

(т.к. прямоуг. Δ с катетами $\sqrt3$ и 3)

$FE = 2l$.



O - центр. окр.

FE - хорда $\Rightarrow OM \perp EF$, $EM = FM$

$DK = FM$, т.к. $FMKD$ - прямоуг.

$(1) \Rightarrow BK = r\frac{\sqrt3}{2} \Rightarrow l = r\frac{\sqrt3}{2} - 1 \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt3} + \frac{2l}{\sqrt3} = \frac{2+2l}{\sqrt3}$

$(l+1)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow l^2+2l+1 = \frac34 r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{4l^2}{3} + \frac{8l}{3} + \frac43$

$FO^2 = r^2 = FM^2 + MO^2$

$MO = \frac{r}{2} + \left(\sqrt3 - \frac{2l}{3}\cdot\sqrt3\right) = \frac{r}{2} + \frac{3-2l}{\sqrt3}$

$KO + \left(CD - \frac{FE}{DA}\cdot CD\right)$

CF

$\Rightarrow r^2 = l^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{3-2l}{\sqrt3}\right)^2 \Big| \cdot 3$

$\cancel{3+6l+2l^2 = \left(\frac{1+l}{\sqrt3} + \frac{3-2l}{\sqrt3}\right)^2}$

$9+18l+6l^2 = (4-l)^2$

$9+18l+6l^2 = 16-8l+l^2$

$5l^2+26l-7=0$

$D_1 = 169+35 = 204$

$\cancel{l = \frac{-13\pm\sqrt{204}}{5} \Rightarrow l = \frac{-13+\sqrt{204}}{5}}$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{CA^2}{FE^2} = \left(\frac{2\sqrt3}{2\cdot\frac34}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt3}\right)^2 = \frac{16}{3}$

(подобие)

$l =$

$3r^2 = 3l^2 + (4-l)^2$

$3r^2 = 16 - 8l + 4l^2$

$\parallel$

$16l = 12 \Rightarrow l = \frac34$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

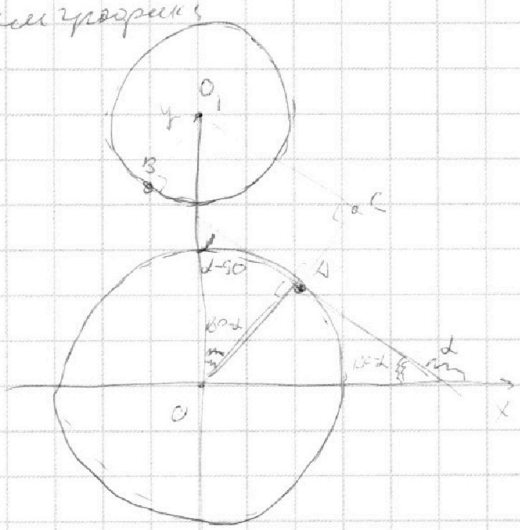
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ x^2+(y-6)^2=2^2 \end{array}\right.$$

построим графики



понятно, что ... не сущ. Точки ... что... если угол наклона графика $-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b=y$ лежит м/у углами касательных.

найдем ур-ния касательных.

$y=a_1x+b_1$

AB - кас. $\Rightarrow O_1C \parallel BA \Rightarrow AC=BO_1$ и BO_1CA — прямоуг.

$OO_1=6$

$OC=R_1+R_2=3+2=5$ $\Rightarrow BA=O_1C_1=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$

$a_1=tg\alpha=-tg(180-\alpha)=-\frac{\sqrt{11}}{5}$

Сост. ур второй касательной в силу симм.

$a_2=\frac{\sqrt{11}}{5}$

$-\frac{\sqrt{11}}{5}<-\frac{a}{2}<\frac{\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \frac{2\sqrt{11}}{5}>a>-\frac{2\sqrt{11}}{5}$ - меньше 4 точек

$a\in\left(-\infty;-\frac{2\sqrt{11}}{5}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{11}}{5};+\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \dfrac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \dfrac{6\ln 3}{\ln x} = \dfrac{\ln 3^5}{2\ln x} - 8 \\ \dfrac{\ln^4 z}{\ln^4 3} + \dfrac{2\ln 3}{\ln z} = \dfrac{\ln 3^{11}}{2\ln z} - 8 \end{cases}$$

пусть $l(x) = \log_3(x)$

$\cancel{8x}\, z = 5y$

$$\begin{cases} l^4 x + \dfrac{6}{lx} = \dfrac{5}{2lx} - 8 \\ l^4 z + \dfrac{2}{lz} = \dfrac{11}{2lz} - 8 \end{cases}$$

$lz = b$
$lx = a$

$$\begin{cases} a^4 + \dfrac{6}{a} = \dfrac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \dfrac{2}{b} = \dfrac{11}{2b} - 8 \end{cases}$$

$2a^5 + 12 = 5 - 16a$

$2b^5 + 4 = 11 - 16b$

$$\begin{cases} 2a^5 + 7 = -16a \\ 2b^5 - 7 = -16b \end{cases}$$

(возр. ∩ убыв) → 1 решение

если t корень $2a^5 + 7 = -16a$, то

$-t$ – корень $2b^5 - 7 = -16b$

⇓

$a^5 + b^5 = -8(a+b)$

⇓

$a + b = 0 \Rightarrow lx + lz = 0 \Rightarrow \log_3(x \cdot z) = 0 \Rightarrow$

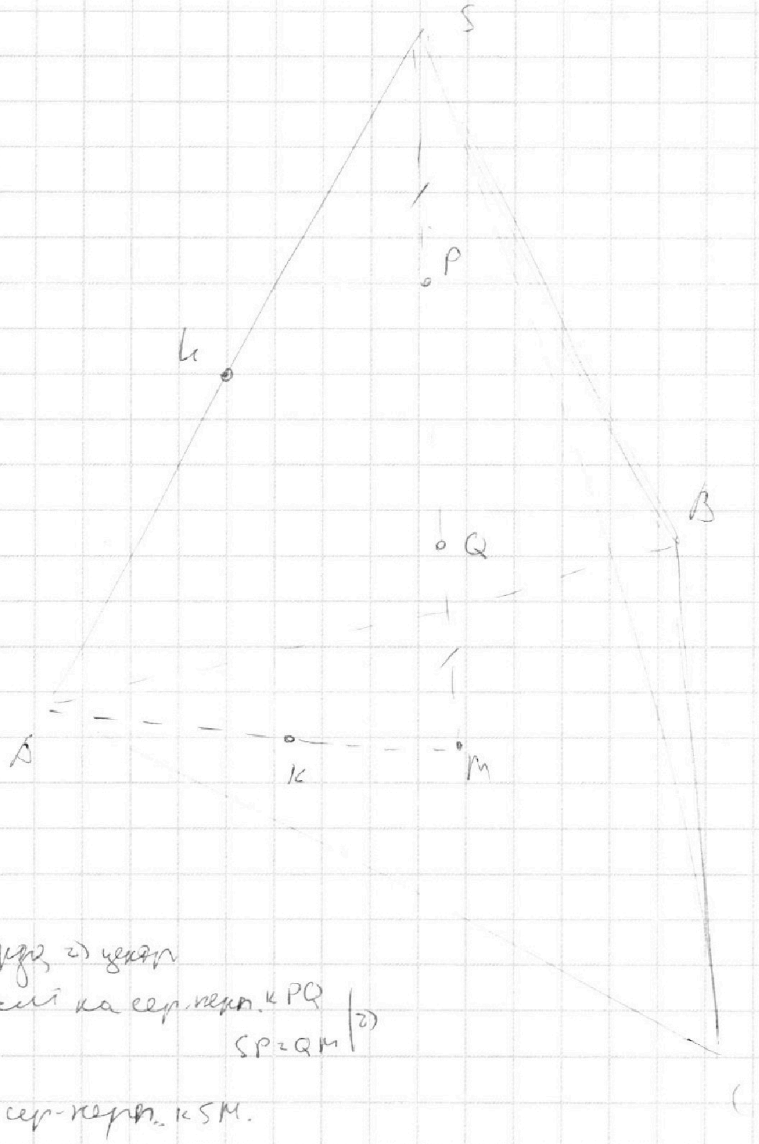
$\Rightarrow \log_3(x \cdot 5y) = 0 \Rightarrow x \cdot 5y = 1 \Rightarrow \boxed{x \cdot y = \frac{1}{5}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



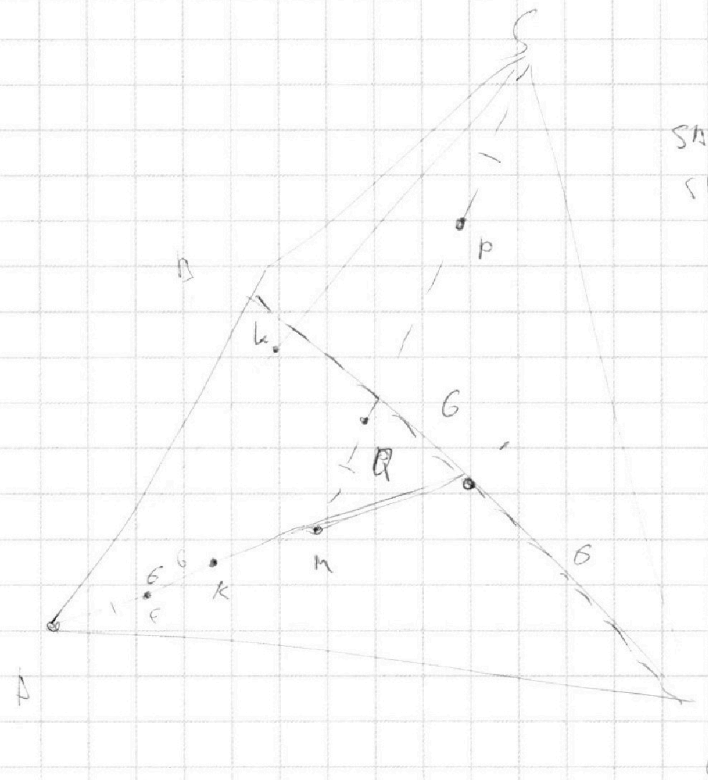
PQ - хорда ⇒ центр
Ω лежит на сер.перп. к PQ
SP = QM | ⇒

⇒ на сер.-перп. к SM.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

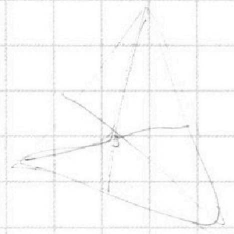
1 2 3 4 5 6 7

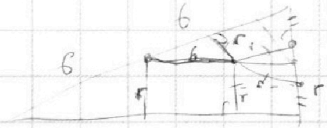
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

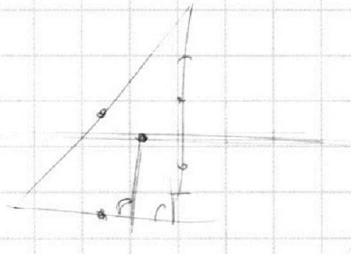


$S_{ABC}=12$
S_{PQM}
$S_{ABC}=90$

AF

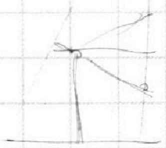


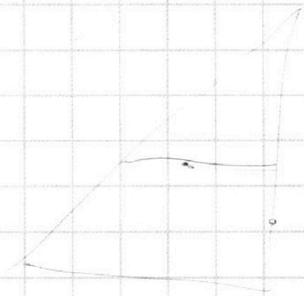




$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$

$\frac{1}{2},$



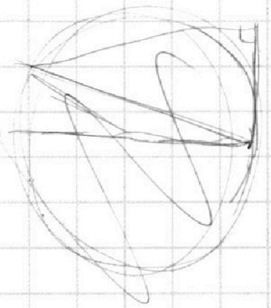


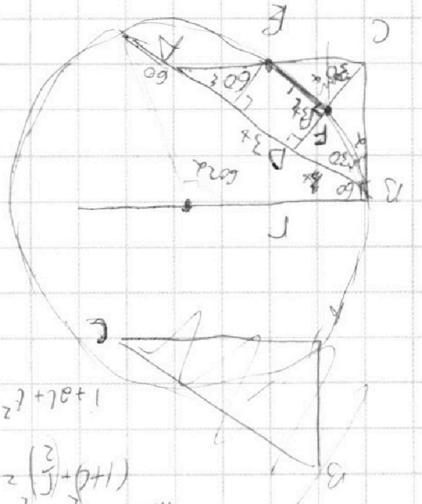
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

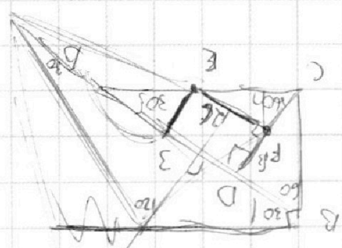
1 2 3 4 5 6 7

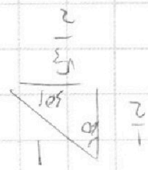
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$3(x_2-x_1)+(y_1-y_1)=33$









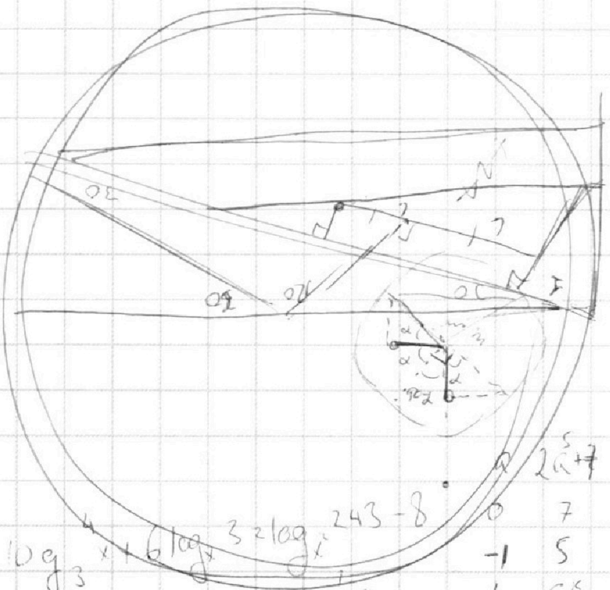
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

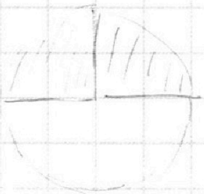
1	2	3	4	5	6	7
x	x	x	x	x	x	x

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

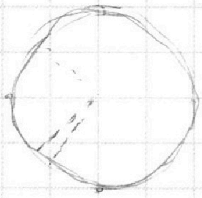
$a^5+b^5=-8(a+b)$





$2a(a^4+8)=-7$

$a(a^4+8)=-3,5$



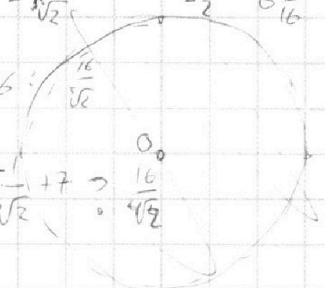
a	$2a^5+7$	$-16a$
0	7	0
-1	5	16
$-\frac{1}{2}$	$6\frac{15}{16}$	

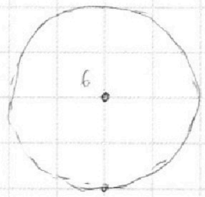
$\log_3^4 x+6\log_x 3=\log_{x^2}243-8$

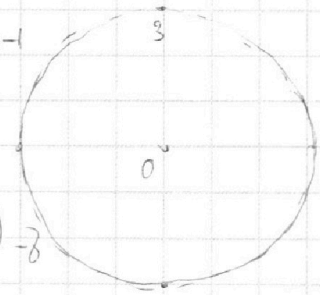
$kx+b=y$

$ax+2y-3b=0$

$-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b=y$







$243=81\cdot 3=3^5$

$\log_3^4(5y)+2\log_{5y}3=\log_{25y^2}(3^{11})-8$

$\log_3^4 x+6\log_x 3=\log_{x^2}243-8$

$\frac{\ln^4 x}{\ln^4 3}+\frac{6\ln 3}{\ln x}=\frac{\ln 3^5}{2\ln x}-8$

$\frac{\ln^4(5y)}{\ln^4 3}+\frac{2\ln 3}{\ln(5y)}=\frac{\ln 3^{11}}{2\ln 5y}-8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Будем ~~ставить~~ брать точки A и искать к ним все возможные точки B.

заметим, что ~~для~~ мн-во точек B будет $\parallel^*$ OP

~~Тогда~~ также заметим, что мы можем выбирать точки A,

которые находятся ~~все~~ левее* (9;0). (И только их, т.к. мн-во точек иначе будет вне пол-на, точнее за (9;0))

(во мн. прямой $\parallel$ OP, проходящей через точку)

Причем, для каждой точки A будет одинаковое кол-во точек B,

а именно: $1+7\cdot 2 = 15$

точку A мы можем выбрать $(9\cdot 3+1) = 420$ вариантов.

Тогда всего: ~~[illegible]~~ вариантов.

$15\cdot 420 = 6300$

как мы можем выбрать точку B: 1. Сл. брать прямую* (N;0)

$0 \le N \le 9$

2. м/у двумя соседними прямыми* (N;0) и (N+1;0) есть

еще 2 прямые*: (N;1) и (N;2)

$(0 \le N \le 9)$.

~~Тогда~~ на каждой прямой* мы можем выбрать 15 точек, т.к.

$42 \underset{3}{\equiv} 0$, а 15, т.к. $\frac{42}{3}+1 = 15$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$5\arcsin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\operatorname{asin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2} \qquad \left(0 \le x \le \pi\right)$$

$$\pi \le x \le 2\pi$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = 6x + 2\pi k$$

$$2\pi = -4x + 2\pi k$$

$$x = \frac{-2\pi + 2\pi k}{4}$$

$$x = \frac{2\pi + 2\pi k}{6}$$

$$\left(\operatorname{asin}(x): [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~[illegible]~~

получим, что abc делится $a^2b^2c^2 : 2^9 3^{10} 5^{10} \cdot 2^{14} 3^{13} 5^{13} \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} =$
$= 2^{42} 3^{41} 5^{53}$

Т.к. мы ищем НОД этих чисел в кода рождения $2^{42} 3^{41} 5^{53}$ но
$(2^9 3^{10} 5^{10})^2 = 2^{22} 3^{21} 5^{23}$

будем представлять числа в виде (a, b, c), подразумевая $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

$ab^2c \vdots (23, 23, 23)$
$ac : (19; 18, 30)$ $\Rightarrow$ $ab^2c : (23, 23, 30)$ $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

минимум произведения.

$a = (a_1, a_2, a_3)$
$b = (b_1, b_2, b_3)$
$c = (c_1, c_2, c_3)$

$a_1 + b_1 \geq 9$
$a_2 + b_2 \geq 10$
$a_3 + b_3 \geq 10$
$a_1 + c_1 \geq 19$
$a_2 + c_2 \geq 18$
$a_3 + c_3 \geq 30$
$\in \mathbb{N}_0$ $b_1 + c_1 \geq 14$
$b_2 + c_2 \geq 13$
$b_3 + c_3 \geq 13$

$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 \\ a_1 + c_1 \geq 19 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 = 9 \\ a_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases}$ - нет решений в $\mathbb{N}$. Т.к. мы минимизируем сумму $a_2 + b_2 + c_2$, то (на $\mathbb{N}$) следующий вариант будет, когда сумма больше на 1, например:

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \end{cases} \Rightarrow$

одно из решений. ~~[illegible]~~

$\Rightarrow \begin{cases} a_3 = 15 \\ c_3 = 15 \\ b_3 = 0 \end{cases}$

оптимально, т.к. $a_3 + b_3 + c_3 \geq \max(a_3 + b_3, a_3 + c_3, b_3 + c_3)$

$a_3 + c_3 + b_3 = \frac{30+30}{2} = 30$
$a_2 + b_2 + c_2 = 7 + 3 + 11 = 21$
$a_1 + b_1 + c_1 = 7 + 2 + 12 = 21$ $\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$