



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



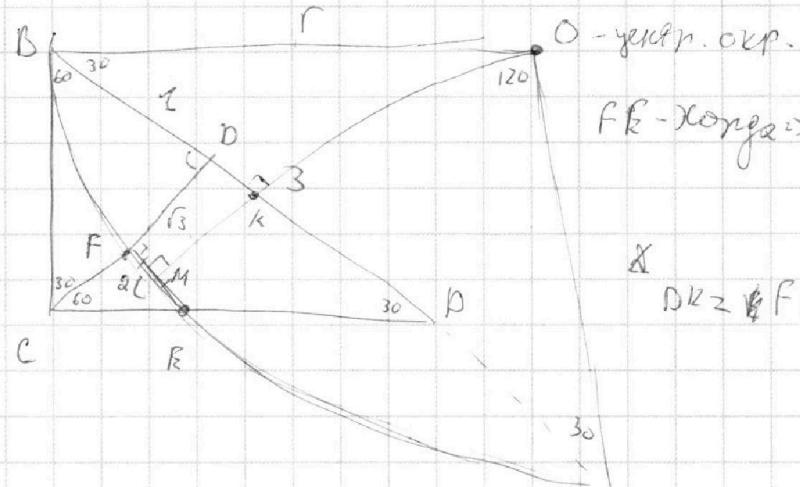
- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Число } DB = 1. \quad 2) CD = \sqrt{3} \cdot 1^2 + \sqrt{3}^2 = \angle DCA = 60^\circ \Rightarrow \angle A = 30^\circ \quad \angle CBA = 30^\circ \\ (\text{т.к. } \triangle ABC \text{ вписан в окружность с диаметром } BC \text{ и } \angle B = 60^\circ)$$

$$FE = 2L.$$



$$FK - \text{хорда} \Rightarrow OM \perp FK \\ EM = PM$$

$$DK \perp FM, \text{ т.к. } FM \text{ касательная}$$

$$(1) \Rightarrow BK = r \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l = \frac{1}{2} r \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2L}{\sqrt{3}} = \frac{2+2L}{\sqrt{3}} = \frac{2(1+L)}{\sqrt{3}}$$

$$(L+1)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow L^2 + 2L + 1 + \frac{r^2}{4} = r^2 \Rightarrow L^2 + 2L + 1 = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow L^2 + 2L + 1 = \frac{4L^2 + 8L + 4}{3} \Rightarrow L^2 + 2L + 1 = \frac{4L^2 + 8L + 4}{3}$$

$$FO^2 = r^2 = FM^2 + MO^2 \quad r^2 = l^2 + \left(\frac{l}{2} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}}\right)^2 / = 3$$

$$MO = \frac{l}{2} + \left(\sqrt{3} - \frac{2L}{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{l}{2} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\text{tang } CO + CD = \frac{FE}{DA} \cdot CD$$

$$3+6L+2L^2 = \left(\frac{1+L}{\sqrt{3}} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$3+6L+2L^2 = (4-L)^2$$

$$9+18L+6L^2 = 16 - 8L + L^2$$

$$5L^2 + 26L - 7 = 0$$

$$D_1 = 169 + 35 = 204$$

$$L = \frac{-13 \pm \sqrt{204}}{5} \Rightarrow L = \frac{-13 + \sqrt{204}}{5}$$

$$\frac{S_{1,2}}{S_2} \frac{(4)^2}{FE^2} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2+\frac{3}{\sqrt{3}}}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3} \\ (\text{найдено})$$

$$3r^2 = 3L^2 + (4-L)^2$$

$$3L^2 = 16 - 8L + 4L^2$$

$$16L = 12 \Rightarrow L = \frac{3}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$x^2 + (y-6)^2 = 2^2$$

построим гиперболы

покажем, что все вер. точки
на эллипсе есть члены конуса

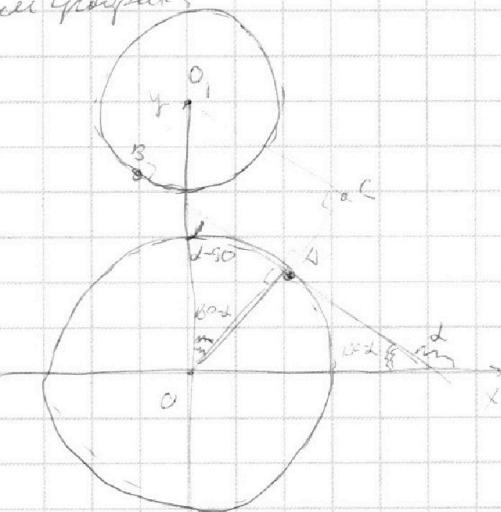
$$\text{гипербола} - \frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \geq y$$

единственное уравнение конуса

показем что все
члены конуса

$$y = a_1x + b_1$$

AB-вер. $O, C \parallel BA \Rightarrow AC \geq BO, \angle BO, CO$ -углы.



$$OO_1 = 6$$

$$OC = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{11}}{5} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{11}}{5}\right)$$

состр. уравнение конуса в системе координат

$$a_2 = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$-\frac{\sqrt{11}}{5} \leq -\frac{a}{2} \leq \frac{\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \frac{2a}{5} \leq \frac{2\sqrt{11}}{5} \Rightarrow a \leq \frac{2\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \text{максимум}$$

4 гориз.

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{11}}{5}\right] \cup \left(\frac{2\sqrt{11}}{5}; +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln 3^5}{2 \ln x} - 8$$

$$\text{последнее } L(x) = \log_3(x)$$

$$8x^2 = 5y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ln^4 z}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln z} = \frac{\ln 3^5}{2 \ln z} - 8 \\ \frac{\ln^4 3}{\ln^4 z} + \frac{1 \ln z}{\ln 3} = \frac{\ln 3^5}{2 \ln x} - 8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ln^4 x + 6}{\ln x} = \frac{5}{2 \ln x} - 8 \\ \frac{\ln^4 z + 2}{\ln z} = \frac{11}{2 \ln z} - 8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L(x) = 5 \\ L(z) = 11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L^4 + 2 = \frac{11}{2} - 8 \\ L^4 + 2 = \frac{11}{2} - 8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a^5 + 7 = 16a \\ 2b^5 + 7 = 16b \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(второй уравн.)} \\ \rightarrow \text{решение.} \end{array}$$

если т.к. первое $2a^5 + 7 = 16a$, то

$$\rightarrow \text{т.к. первое } 2b^5 + 7 = 16b$$

и

$$a^5 + b^5 = -8(a+b)$$

$$\stackrel{!}{\Rightarrow} a+b=0 \Rightarrow L(x+Lz)=0 \Rightarrow \log(x+z)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(x \cdot z) = 0 \Rightarrow x \cdot z = 1 \Rightarrow \boxed{x \cdot z = 1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

PQ - $\log_{10} \mu$, \Rightarrow year

5) доказать что $\angle PQR = \angle QPR$ (2)

\Rightarrow no self-rep. in SM.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

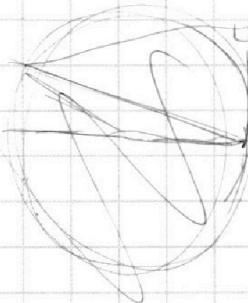
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$0^{\circ}$$

$$58 = 59 + 59$$



$$79 + 9 + 18 + 7 = 78 + 9$$

$$\frac{78 + 9}{2} = \left(\frac{5}{7} - \frac{5}{4} \right)$$

$$7 \frac{3}{4} + \frac{3}{7}$$

$$4 \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{4} \right)$$

$$+ 78 + 9 = 78 + 9$$

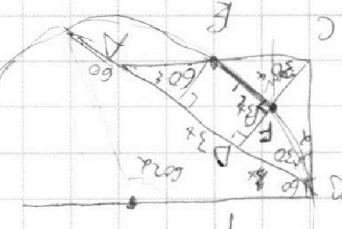
$$303 = 410$$

$$340 = 242$$

$$AB = \frac{1}{3}$$

$$AB \parallel BC$$

$$\begin{matrix} f \\ g \\ h \\ i \\ j \\ k \end{matrix}$$



$$528$$

$$525 = 250$$

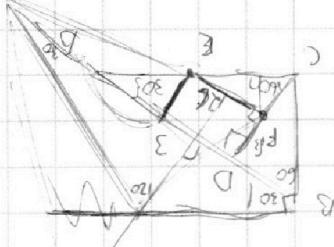
$$\frac{5}{7} = 1 + 8 + 1$$

$$j = \left(\frac{2}{3} + 1 \right)$$

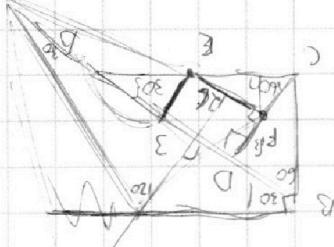
$$4780$$

$$\frac{2}{5}$$

$$| -j \frac{2}{5} z \rangle$$



$$\left(\frac{2}{7} + \frac{4}{3} \right) 288 + 72 = 1$$



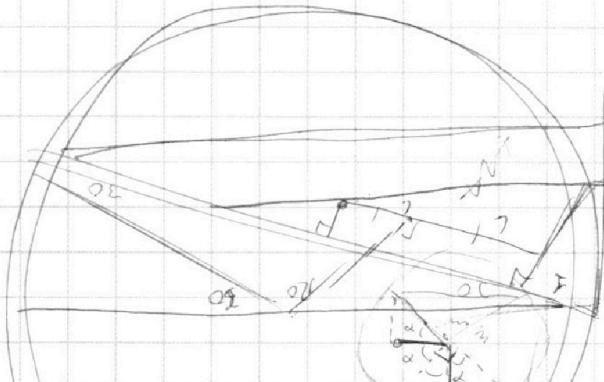
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

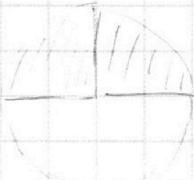
- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

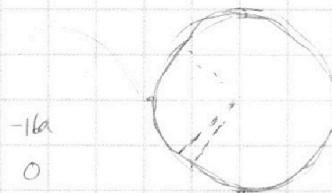


$$a^5 + b^5 = -8(a+b)$$



$$2(8x - 2a(a^4 + b)) = -7$$

$$a(a^4 + b) = -3,5$$



$$(q+0)8 - 2,5q + 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 7 \Rightarrow \frac{16}{\sqrt{2}}$$

$$3q + 8 - 6q$$

$$32 + 1 = 32 + 8 - 6q + 8 - 6q - 1$$

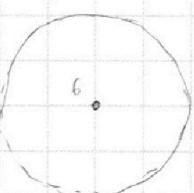
$$t = (8+0)2$$

$$\log_3^4(Sy) + 2 \log_{Sy} 3 = \log_{2Sy^2}(3) - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 3 = \log_2 243 - 8$$

$$\frac{\ln x}{\ln 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln 243}{2 \ln x} - 8$$

$$\frac{\ln^4(Sy)}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln(Sy)} = \frac{\ln 3}{2 \ln Sy} - 8$$

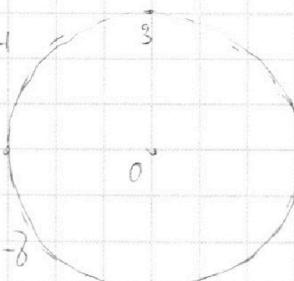


$$a + 12y - 3b = 0$$

$$y$$

$$-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b = y$$

$$243 \cdot 81 \cdot 3 = 3^5$$



$$25 - 8$$

$$8y - 5y$$

$$8y + 4V$$

$$-180^5$$

$$250^6$$

$$8y - 2y$$

$$-2y = 2y$$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Будем искать другого горизонтального вектора \vec{v} ,
занесенного, что дает нам-то горизонтальный вектор \vec{w} .

Наша форма задана, то мы можем выбрать точку P ,

которую будем искать $(9, 0)$. (Итак, мы можем выбрать любую точку, кроме горизонтальной \vec{w} , например $(13, 0)$.)

Причем, для каждого вектора \vec{v} будет единственное катета горизонтального вектора \vec{w} ,

$$\text{а именно: } 1 + 7 + 2 = 15 \quad (9, 3+1) = 420$$

где 1 и 7 это катеты горизонтального вектора \vec{v} , а 2 - катеты горизонтального вектора \vec{w} .

Горизонтальный вектор \vec{v} имеет длину 15 .

$$15 \cdot 420 = 6300$$

то есть длина горизонтального вектора \vec{v} равна 15 единицам.

$$0 \leq n \leq 9$$

и мы будем смотреть на координаты $(n, 0)$ и $(n+1, 0)$ как

единицы $(n, 1)$ и $(n, 2)$ как

$$(10 \leq n \leq 9).$$

Также мы можем выбрать любую точку P , для которой длина горизонтального вектора \vec{v} равна 15 .

$$42 \geq 0, \text{ а } 15, \text{ т.к. } \frac{42}{3} + 1 = 15.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\cos(x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = 6x + 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi + 2\pi k}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$$

$$\text{ответ: } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3} \text{ и } -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin(\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = -4x + 2\pi k$$

$$x = \frac{-2\pi + 2\pi k}{4}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

$$(\sin(x): [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

Waldosnake

$$\text{Nabucco, No. 27c yester'day} \quad a^2 b^2 c^2 : 2^9 3^{10} 5^{10} 7^8 13^8 19^8 30^8 \\ = 2^{42} 3^{41} 5^{33}$$

$$\begin{matrix} 1. k. \text{ uva yarice } 1000 \text{ sara rucad } 3 \text{ poje pogodzieniu } 2 & 3 & 5 & 53 \\ \left(\begin{matrix} 9 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{matrix} \right)^2 = 2 & 3 & 5 \end{matrix}$$

Sjyzen spyciobacco mae b kuge (a, b, c), kew no yajueb $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

$$\begin{array}{l} ab^2c : (23, 23, 23) \\ ac : (19, 18, 30) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \rightarrow ab^2c : (23, 23, 30) = BBBB \\ \text{or } \end{array} \right.$$

исследование природы и быта.

$$a = (a_1, a_2, a_3), \quad a_1 + b_1 > 9$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 > 9 \\ a_1 + c_1 > 19 \\ b_1 + c_1 > 14 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 11 \end{array} \right.$$

$$b_4^2(b_1, b_2, b_3) \quad b_2 + b_2 \geq 10 \\ c_4(c_1, c_2, c_3) \quad c_3 + b_3 \geq 10$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases} \quad \text{L.K. 18}$$

$$Q_2 + G_2 \geq 18$$
$$Q_3 + G_3 \geq 30$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 + c_2 > 30 \\ a_3 + c_2 > 30 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{EN} \\ \text{b}_1 + c_1 > 14 \\ \text{b}_2 + c_2 > 13 \end{array}$$

$$2) \begin{cases} a_3 + b_3 = 130 \\ a_3 + c_3 = 130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 + b_3 = 130 \\ a_3 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 = 15 \\ c_3 = 15 \end{cases}$$

Orange County, T. 16

$$c_{ij} + b_{ij} + l_{ij} \geq \max(c_{ij} + b_{ij}, c_{ij} + l_{ij}, b_{ij} + l_{ij})$$

$$a_3 + c_3 + b_3 \in \frac{30+30}{2} = 30$$

$$a + b + c - 3 \stackrel{?}{=} 3 + 11 = 12$$

$$6+11+1=7+2+12=21$$

$$abc = 2 \cdot 3 \cdot 5^{30}$$