



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

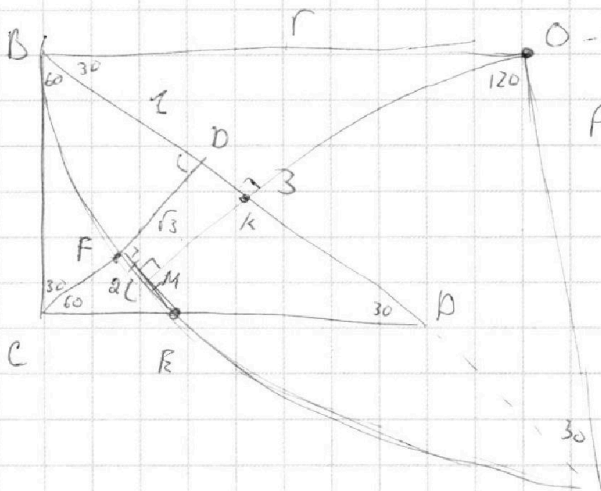
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ИУО  $DB \perp I \Rightarrow CD \approx \sqrt{3 \cdot 1^2 + 3^2} \Rightarrow \angle DCA \approx 60^\circ \Rightarrow \angle A \approx 30^\circ \dots \angle OBA \approx 30^\circ$   
 (т.к. радиус. Векторы  $\sqrt{3}$  и  $3$ ) (1)

$FE = 2L$

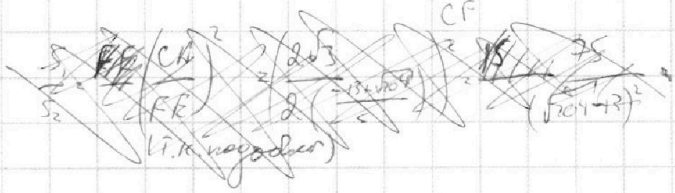


$O$  - центр окр.  
 $FE$  - хорда  $\Rightarrow OM \perp FE \Rightarrow EM = FM$

$DK \approx FM$ , т.к.  $FM$  - медиана

(1)  $\Rightarrow BK \approx r \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L \approx 4r \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \Rightarrow r \approx \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2L}{\sqrt{3}} = \frac{2+2L}{\sqrt{3}}$   
 $(L+1)^2 + \left( \frac{r}{2} \right)^2 = r^2 \Rightarrow L^2 + 2L + 1 = \frac{3}{4}r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{4L^2 + 8L + 4}{3}$

$FO^2 \approx r^2 = FM^2 + MO^2$   
 $MO \approx \frac{r}{2} + \left( \sqrt{3} - \frac{2L}{3} - \sqrt{3} \right) = \frac{r}{2} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}}$   
 $KO + (CD - \frac{FE}{DA} \cdot CD)$



$r^2 = L^2 + \left( \frac{r}{2} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot 3$   
 $3 + 6L + 2L^2 = \left( \frac{1+L}{\sqrt{3}} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}} \right)^2$   
 $9 + 18L + 6L^2 = (4-L)^2$   
 $9 + 18L + 6L^2 = 16 - 8L + L^2$   
 $5L^2 + 26L - 7 = 0$   
 $D_1 = 169 + 85 = 254$   
 $L = \frac{-13 \pm \sqrt{204}}{5} \Rightarrow L = \frac{-13 + \sqrt{204}}{5}$

$\frac{S_1}{S_2} \approx \frac{CD^2}{FE^2} \approx \left( \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3}{4}} \right)^2 = \left( \frac{4}{3} \right)^2 = \frac{16}{9}$   
 (не подходит)

$3r^2 \approx 3(L^2 + (4-L)^2)$   
 $3r^2 \approx 16 + 8L + 4L^2$   
 $16L = 12 \Rightarrow L = \frac{3}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ x^2 + (y-6)^2 = 2^2 \end{cases}$$

поиск точек касания

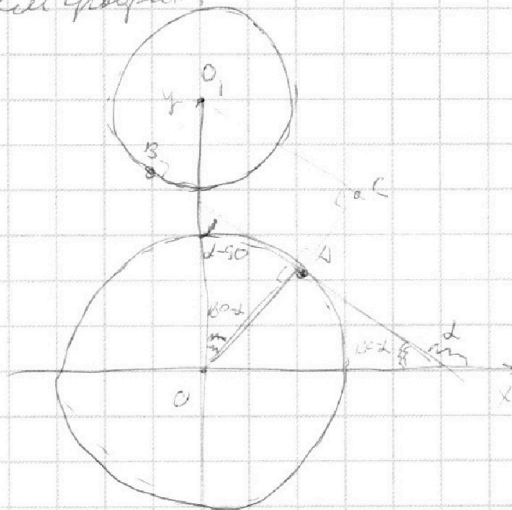
поиск точки касания, т.е. касательная к окружности

уравнение касательной:  $-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \geq y$

найти уравнение касательной

поиск уравнения касательной

$$y = ax + b$$



AB-касательная, OC || BA, AC || BO, и BO, CO-касательные.

$$OO_1 = 6$$

$$OC = R_1 + R_2 = 3 + 2 = 5$$

$$BA = OC = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

$$\alpha, \text{ где } \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180 - \alpha) = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

способ. у касательной касательной в касательной

$$a = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{5} \leq \frac{-a}{2} \leq \frac{\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \frac{2\sqrt{11}}{5} \geq a \geq \frac{-2\sqrt{11}}{5}$$

и т.д.

$$a \in \left(-\frac{2\sqrt{11}}{5}; \frac{2\sqrt{11}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{11}}{5}; +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln 3^5}{2 \ln x} - 8 \\ \frac{\ln^4 2}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 3^{11}}{2 \ln 2} - 8 \end{cases}$$

$$\text{пусть } L(x) = \log_3(x)$$

$$\text{где } z = 5y$$

$$\begin{cases} 1^4 x + \frac{6}{x} = \frac{5}{2x} - 8 \\ L^4 z + \frac{2}{Lz} = \frac{11}{2Lz} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lz = a \\ Lx = \frac{1}{4}a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 47z = 5 - 16a \\ 2b^5 + 47z = 11 - 16b \end{cases} \begin{cases} 2a^5 + 7z = -16a \\ 2b^5 - 7z = -16b \end{cases} \begin{cases} \text{(возм. 0 и } z=2) \\ \rightarrow \text{Изначально} \end{cases}$$

если  $t$  корень  $2a^5 + 7z = -16a$ , то

$-t$  - корень  $2b^5 - 7z = -16b$

↓

$$2a^5 + b^5 = -8(a+b)$$

↑

$$a+b=0 \Rightarrow Lx + Lz = 0 \Rightarrow \log_3(x \cdot z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x \cdot 5y) = 0 \Rightarrow x \cdot 5y = 1 \Rightarrow \boxed{x \cdot y = \frac{1}{5}}$$



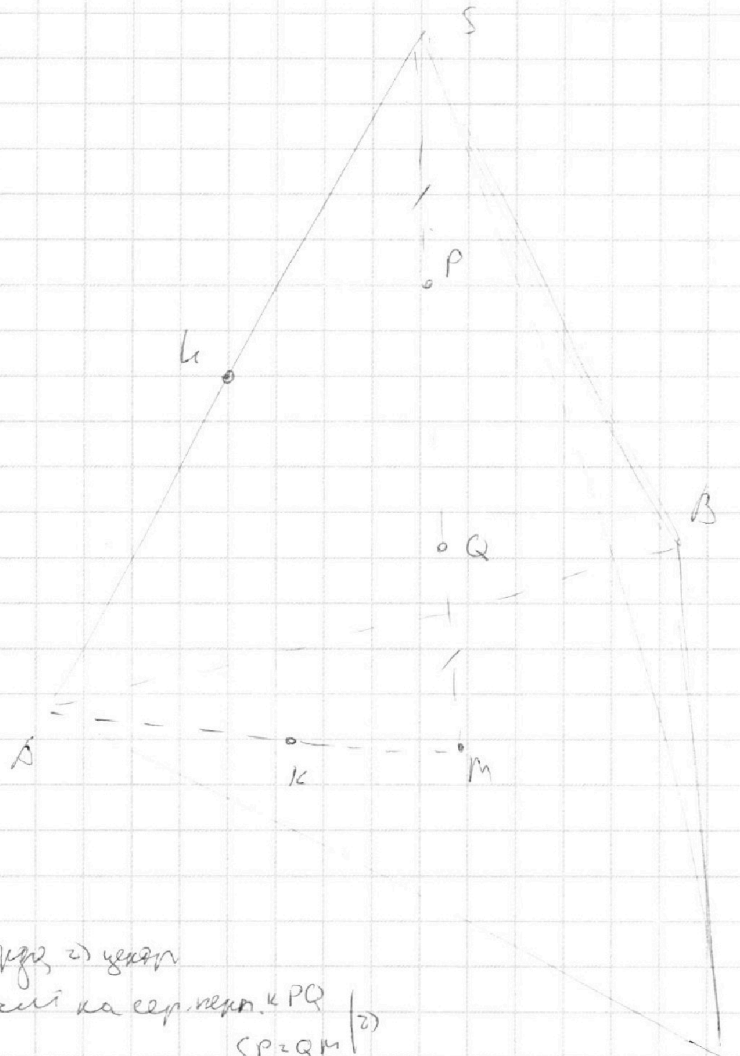
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$PQ \perp AC \Rightarrow \angle SPQ = \angle CQP$   
 $SK \perp PQ$  на сер-перп. к  $PQ$   
 $SK = QM$  (2)  
 $\Rightarrow$  на сер-перп. к  $SM$ .



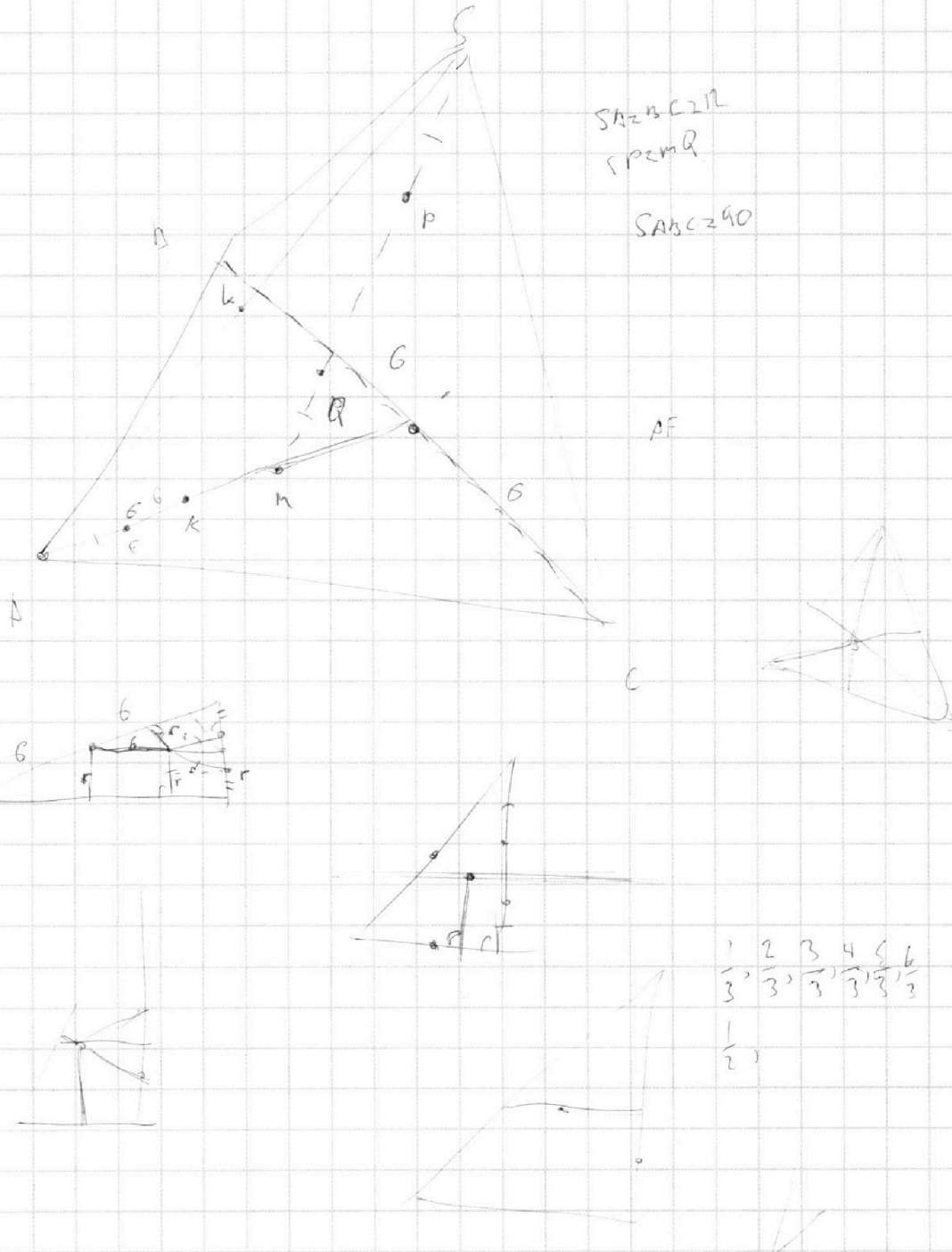
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

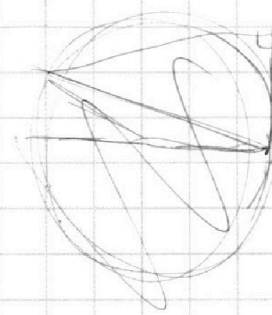
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$205 + 159 = 364$$



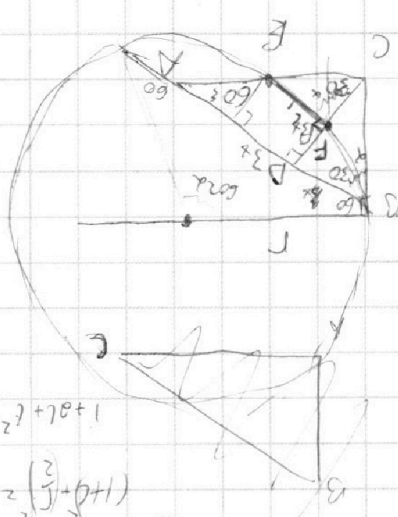
$$16 - 8\sqrt{3} + 2 = 9 + 18\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = 3 + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

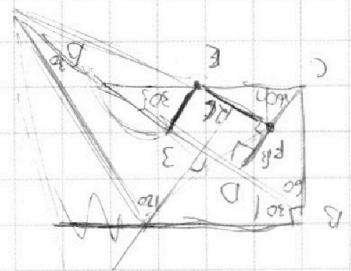
$$\left(2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ABDE  
AD = 1/3  
DB = 2/3

$$316\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 318\sqrt{3}$$

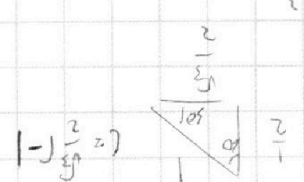


$$r^2 + 2r + \frac{3}{4} = r^2 + 2r + \frac{3}{4}$$



$$\frac{225}{25} = 9$$

$$1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$$



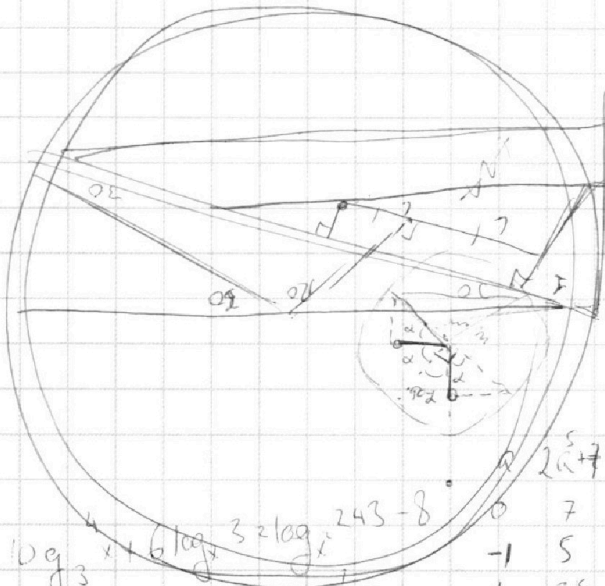
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

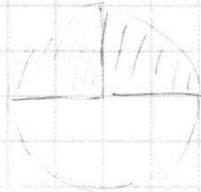
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

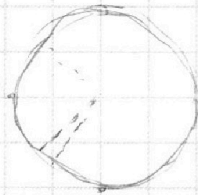


$$a^5 + b^5 = -8(a+b)$$



$$2(a^4 + 8) = -7$$

$$a(a^4 + 8) = -3,5$$

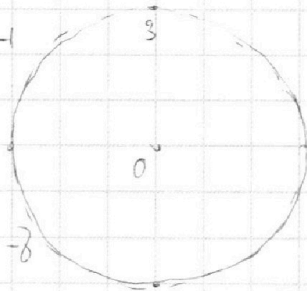
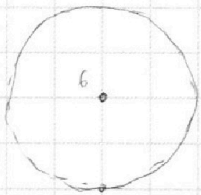


|    |   |    |      |
|----|---|----|------|
| 2  | 5 | 7  | -16a |
| 0  | 7 | 0  | 0    |
| -1 | 5 | 16 | 0    |

$$8x + 29y + 5z = kx + by$$

$$a_2 + 2y - 3b = 0$$

$$-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b = y$$

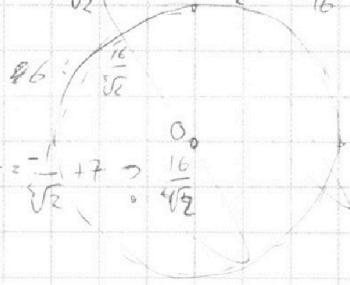


$$243 = 81 \cdot 3 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3^2 243 - 8$$

$$(4+a)z = 2q + b$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$3y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$z = (8+a) \cdot 2$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3 3 = \log_3^2 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3^2 243 - 8$$

$$\frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln x}{\ln 3} = \frac{\ln^2 243}{2 \ln 3} - 8$$

$$\frac{\ln^4 (5y)}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln (5y)} = \frac{\ln^2 3}{2 \ln 5y} - 8$$

$$-2 = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

будем считать сумму денег  $A$  и количество всех возможных  
денег  $B$ .

замечим, что для  $m$ -го случая  $B$  будет  $\parallel^* OP$

чтобы найти заметим, что мы можем выбрать деньги  $A$ ,

которые находятся под  $m$ -м  $(9, 0)$ . (и только  $m, 1, 2$  м.б. если  
используем  $OP$ , то  $m$  будет  $2(3+5)$  тогда  $2(3+5)$ )

Примем, что для каждого случая  $A$  будет определенное кол-во денег  $B$ ,

а именно:  $1 + 7 \cdot 2 = 15$   $(9 \cdot 3 + 1) = 420$   
денег  $A$  мы можем выбрать  $15 \cdot 420 = 6300$  вариантов.

тогда всего:  ~~$420 \cdot 15 = 6300$~~   $6300$  вариантов.

или мы можем выбрать деньги  $B$ . В данном случае  $(N, 0)$   
 $0 \leq N \leq 9$

т.е. мы должны рассмотреть варианты  $(N, 0)$  и  $(N+1, 3, 0)$  если

еще варианты:  $(N, 1)$  и  $(N, 2)$  ~~еще~~  
 $(0 \leq N \leq 9)$ .

тогда для каждого варианта  $N$  мы можем выбрать  $15$  денег,  $1, 2$ .

$$42 \equiv 0 \pmod 3, \text{ а } 15, \text{ т.к. } \frac{42}{3} + 1 = 15.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))) = x + \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = 6x + 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi + 2\pi k}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3} \text{ и } -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin(\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = -4x + 2\pi k$$

$$x = \frac{-2\pi + 2\pi k}{4}$$

$$(\arcsin(x): [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*фракталы*

найдем, по чему делится  $a^2 b^2 c^2$ :  $2^9 3^{10} 5^{10} = 2^{14} 3^{13} 5^{15} = 2^{18} 3^{18} 5^{30}$   
 $= 2^4 3^4 5^3$

т.к. мы у нас НОД этих чисел 3 раза поделится  $2^2 3^4 5^3$  на  
 $(2^9 3^{10} 5^{10})^2 = 2^{18} 3^{20} 5^{20}$

будем предположить такие входы  $(a, b, c)$ , как поделится  $2^9 \cdot 3^b \cdot 5^c$

$a^2 b^2 c^2 \equiv (23, 23, 23)$   
 $ac \equiv (19, 18, 30)$  |  $\Rightarrow a^2 b^2 c^2 \equiv (23, 23, 30) \Rightarrow \text{HKT}$

*линейные тригонометрия*

$a = (a_1, a_2, a_3)$   
 $b = (b_1, b_2, b_3)$   
 $c = (c_1, c_2, c_3)$

$a_1 + b_1 \geq 9$   
 $a_2 + b_2 \geq 10$   
 $a_3 + b_3 \geq 10$

$a_1 + c_1 \geq 19$   
 $a_2 + c_2 \geq 18$   
 $a_3 + c_3 \geq 30$

$b_1 + c_1 \geq 14$   
 $b_2 + c_2 \geq 13$   
 $b_3 + c_3 \geq 13$

$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 & a_1 + b_1 = 9 \\ a_1 + c_1 \geq 19 & \Rightarrow a_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 \geq 14 & b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 & a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 & a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 \geq 13 & b_2 + c_2 = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 & a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 \geq 30 & a_3 + c_3 = 30 \\ b_3 + c_3 \geq 13 & b_3 + c_3 = 13 \end{cases}$

т.к. для максимизации суммы  $a_2 + b_2 + c_2$ , то (НОД) идем по пути, когда система дается на 2 компонента

$\in \mathbb{N}$   
 стационарно, т.к.  
 $a_3 + b_3 + c_3 \geq \max(a_3 + b_3, a_3 + c_3, b_3 + c_3)$

$\Rightarrow \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 = 15 \\ c_3 = 15 \\ b_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 11 \end{cases}$

$a_3 + c_3 + b_3 \geq \frac{30+30}{2} \geq 30$   
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{7+3+11}{1} = 21$   
 $a_1 + b_1 + c_1 = 7+2+12 = 21$

$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$