



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ x^2 + (y-6)^2 = 2^2 \end{cases}$$

поиск точек касания

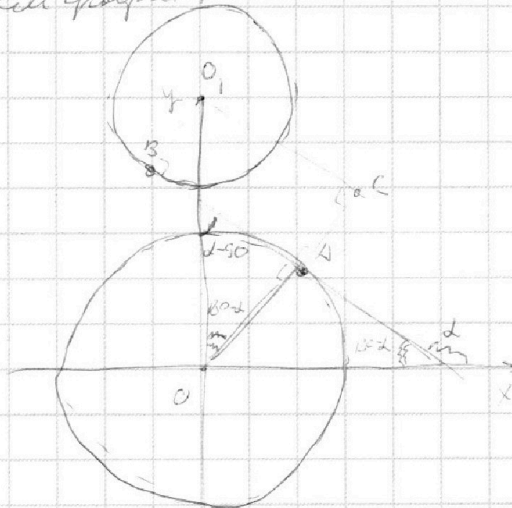
поиск точки касания,  $\vec{O_1O}$  на секущую формулу,  $\vec{O_1O}$  или формула

формула  $-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}by$

найти уравнение касательной

найти уравнение касательной

$$y = ax + b$$



$AB$ -кас.  $OC \parallel BA \Rightarrow AC \perp BO_1$  и  $BO_1, CO$ -высоты.

$$OO_1 = 6$$

$$OC = R_1 + R_2 = 3 + 2 = 5$$

$$BA = OC = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \alpha = -\text{tg}(180 - \alpha) = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

найти уравнение касательной в силу условия

$$a = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{5} \leq \frac{-a}{2} \leq \frac{\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \frac{2\sqrt{11}}{5} \geq a \geq \frac{-2\sqrt{11}}{5}$$

и формула

$$a \in \left(-i\frac{\sqrt{11}}{5}; -\frac{2\sqrt{11}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{11}}{5}; +i\frac{\sqrt{11}}{5}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln 3^5}{2 \ln x} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\ln^4 2}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 3^5}{2 \ln 2} - 8 \end{cases}$$

$$\text{пусть } L(x) = \log_3(x)$$

$$\text{где } z = 5y$$

$$\begin{cases} L^4 x + \frac{6}{Lx} = \frac{5}{2Lx} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lz = 5a \\ Lx = \frac{1}{4}a \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^4 z + \frac{2}{Lz} = \frac{11}{2Lz} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 47a = 5 - 16a \\ 2b^5 + 4b = 11 - 16b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 7 = -16a \\ 2b^5 - 7 = -16b \end{cases} \begin{matrix} (\text{возм. } 0 \text{ и } 5) \\ \rightarrow \text{Иксисис} \end{matrix}$$

если  $t$  корень  $2a^5 + 7 = -16a$ , то

$-t$  - корень  $2b^5 - 7 = -16b$

↓

$$a^5 + b^5 = -8(ab)$$

↑

$$a + b = 0 \Rightarrow Lx + Lz = 0 \Rightarrow \log_3(x \cdot z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x \cdot 5y) = 0 \Rightarrow x \cdot 5y = 1 \Rightarrow \boxed{x \cdot y = \frac{1}{5}}$$



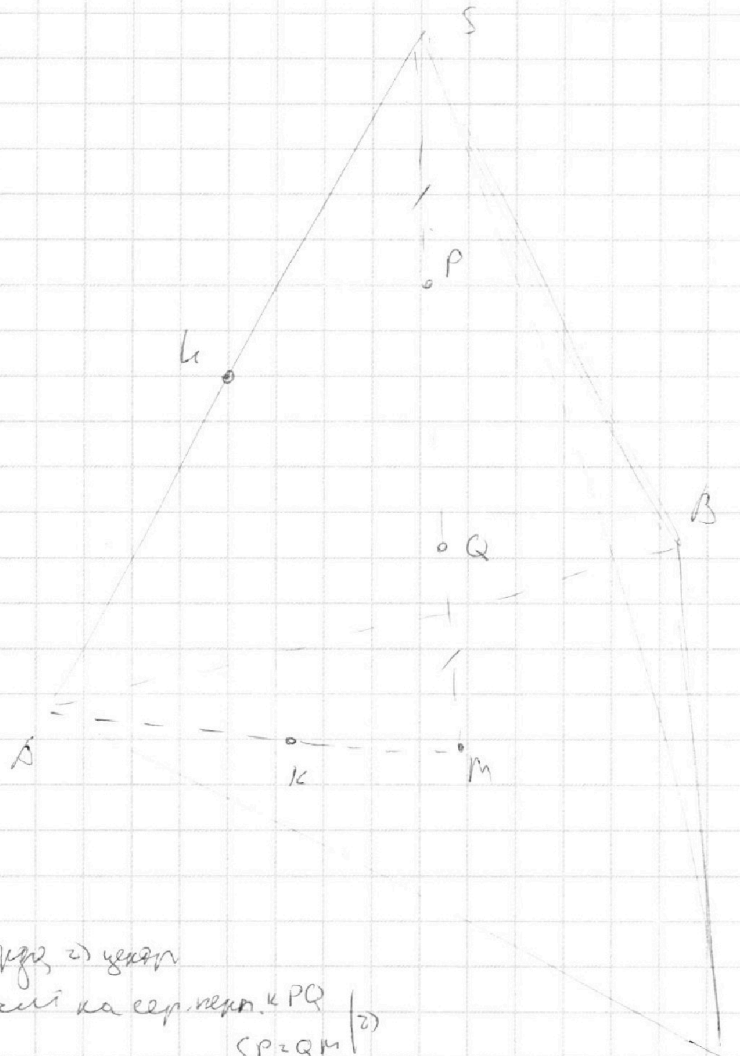
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$PQ$  - высота  $\Rightarrow$  равен  
 $\Omega$  лежит на перпендикуляре к  $PQ$   
 $SP = QM$   $\left| \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \right.$   
 $\Rightarrow$  на перпендикуляре к  $SM$ .

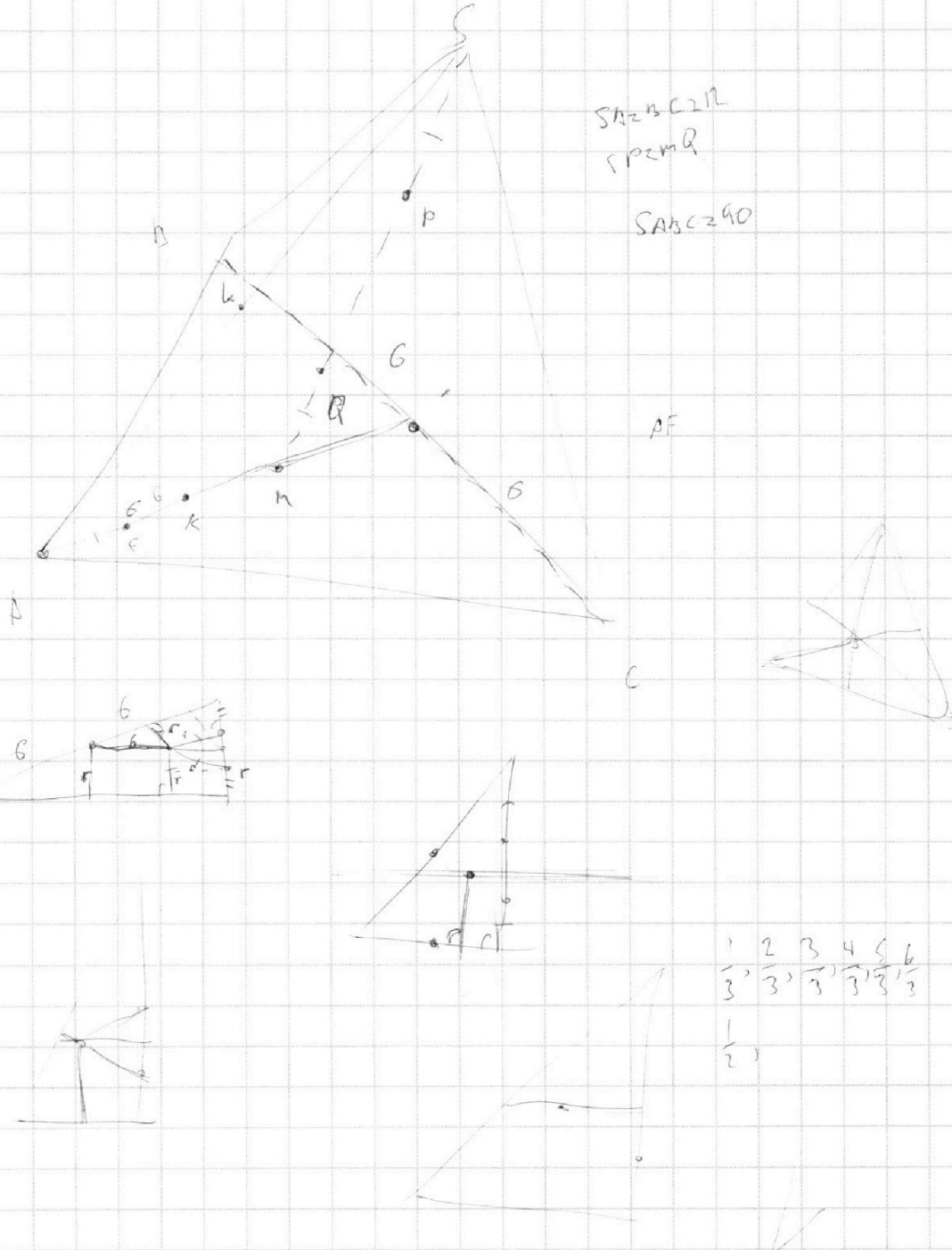
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

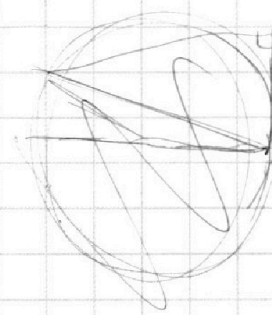


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$205 + 159 = 364$$



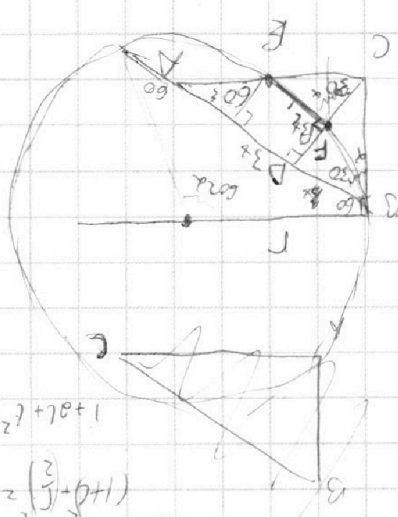
$$16 - 8\sqrt{3} + 2 = 9 + 18\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = 3 + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$\left(2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

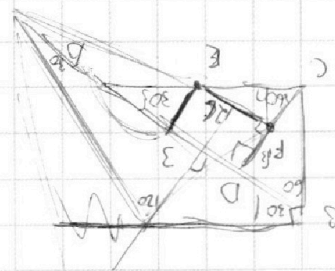
ABDE  
AD = 1/3  
DB = 2/3

$$316\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 318\sqrt{3}$$



$$\frac{225}{250} = \frac{9}{10}$$

$$1 + 2\sqrt{3} + 2 = \frac{3}{2}$$



$$\frac{213}{101} = \frac{21}{10}$$

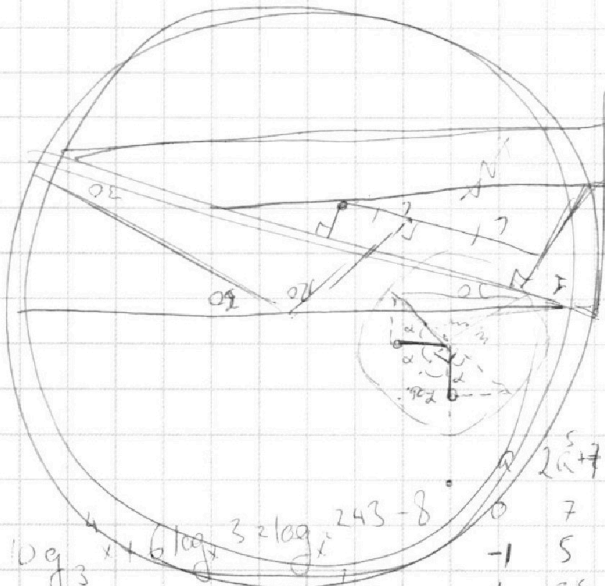
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^5 + b^5 = -8(a+b)$$

$$2(a^4 + 8) = -7$$

$$a(a^4 + 8) = -3,5$$

2	5	7	-16a
0	7	0	0
-1	5	16	
-1/2	6	16	

$$8x + 29y + 5z = kx + by$$

$$a_2 + 12y - 3b = 0$$

$$-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b = y$$

$$(4+a)z = 2q + b$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 7 \rightarrow \frac{16}{\sqrt{2}}$$

$$2b + 5 - 6b$$

$$2y + 1 - 2y + 5 = -4 + 5 = 1$$

$$2y + 1 - 2y + 5 = -4 + 5 = 1$$

$$t = (8+a)z$$

$$243 = 81 \cdot 3 = 3^5$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}^3(3^5) - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^5 243 - 8$$

$$\frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln^5 243}{2 \ln x} - 8$$

$$\frac{\ln^4(5y)}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln(5y)} = \frac{\ln^5 3}{2 \ln 5y} - 8$$

$$\frac{1}{2} - 4 = (8+1)^4 + 2^4 + 2^4$$

$$-2^4 = 2^4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



будем считать сумму денег  $A$  и количество всех возможных  
денег  $B$ .

замечим, что для  $n$ -го года  $B$  будет  $n \cdot OP$

Если же заметим, что мы можем вложить деньги  $A$ ,

которые находятся под  $n$ -м  $(n, 0)$ . (и только  $n, 1, 2$   $n$ -го года  
иначе будет  $n$   
пол-ма, тогда  $n \cdot OP$ )

Примем, что каждый год  $A$  будет удваиваться как-то года  $B$ ,

а именно:  $1 + 7 \cdot 2 = 15$   $(9 \cdot 3 + 1) = 420$

денег  $A$  мы можем вложить  $15 \cdot \cancel{1500} \cdot \cancel{1500}$  вариантов.

тогда всего:  $\cancel{420} \cdot 1500 = 2250$  вариантов.  
 $15 \cdot 420 = \cancel{6300}$   
 $6300$

или мы можем вложить деньги  $B$  в  $n$ -го году  $(n, 0)$   
 $0 \leq n \leq 9$

и мы можем сосчитать количество  $(n, 0)$  и  $(n+1, 0)$  если

еще  $(n, 1)$  и  $(n, 2)$   $(0 \leq n \leq 9)$ .

тогда на  $n$ -го году  $n$  мы можем вложить  $15$  денег,  $1, 2$ .

$42 \equiv 0 \pmod{3}$ , а  $15$ , т.к.  $\frac{42}{3} + 1 = 15$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7



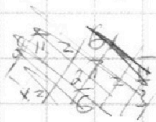
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))) = x + \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = 6x + 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi + 2\pi k}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3} \text{ и } -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin(\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = -4x + 2\pi k$$

$$x = \frac{-2\pi + 2\pi k}{4}$$

$$(\arcsin(x): [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*фракталы*

наблюдим, но что получится  $a^2 b^2 c^2 = 2^9 3^{10} 5^{10} = 2^{14} 3^{13} 5^{15} = 2^{18} 3^{18} 5^{30}$   
 $= 2^{42} 3^{41} 5^3$

т.к. мы ушли НОД этих чисел 3 раза получим  $2^2 3^4 5^3$   
 $(2^9 3^{10} 5^{10})^2 = 2^{22} 3^{21} 5^3$

будем предположить такие входы  $(a, b, c)$ , тогда получим  $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

$a^2 b^2 c^2 = (23, 23, 23)$   
 $ac = (19, 18, 30)$     2)  $a^2 b^2 c^2 = (23, 23, 30) \Rightarrow \sqrt{23} \sqrt{23} \sqrt{30}$

*линейные тригонометрия*

$a = (a_1, a_2, a_3)$	$a_1 + b_1 \geq 9$	$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 & a_1 + b_1 = 9 \\ a_1 + c_1 \geq 19 & \Rightarrow a_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 \geq 14 & b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$
$b = (b_1, b_2, b_3)$	$a_2 + b_2 \geq 10$	
$c = (c_1, c_2, c_3)$	$a_3 + b_3 \geq 10$	
	$a_1 + c_1 \geq 19$	$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 & \begin{cases} a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \end{cases} \\ a_2 + c_2 \geq 18 & \begin{cases} a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \end{cases} \\ a_3 + c_3 \geq 30 & \begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 11 \end{cases}$
	$a_2 + c_2 \geq 18$	
	$a_3 + c_3 \geq 30$	
	$b_1 + c_1 \geq 14$	
	$b_2 + c_2 \geq 13$	
	$b_3 + c_3 \geq 13$	

стандартно, т.к.  $a_3 + b_3 + c_3 \geq \max(a_3 + b_3, a_3 + c_3, b_3 + c_3)$

$a_3 + c_3 + b_3 \geq \frac{30+30}{2} \geq 30$   
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{7+3+11}{2} = 21$   
 $a_1 + b_1 + c_1 = 7+2+12 = 21$   
 2)  $a^2 b^2 c^2 = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$