МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}\cdot 5^{\gamma_3}$

• $\begin{cases}\alpha_1+\beta_1 \geq 9\\ \alpha_2+\beta_2\geq 10\\ \alpha_3+\beta_3\geq 10\end{cases}$ $\begin{cases}\beta_1+\gamma_1\geq 14\\ \beta_2+\gamma_2\geq 13\\ \beta_3+\gamma_3\geq 13\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha_1+\gamma_1\geq 19\\ \alpha_2+\gamma_2\geq 18\\ \alpha_3+\gamma_3\geq 30\end{cases}$

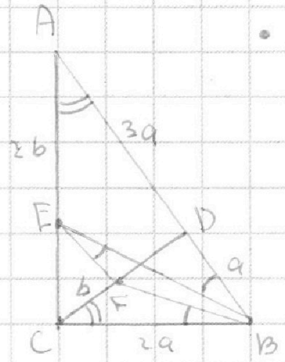
• Из этого следует, что $2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\geq 42$.
Посмотрим на решение сист. системы:
$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1=9\\ \beta_1+\gamma_1=14\\ \alpha_1+\gamma_1=19\end{cases}$ сумма равна $\frac{42}{2}=21 \Rightarrow \gamma_1=12,\ \alpha_1=7,\ \beta_1=2$.

пример, при котором равно 21

• Составим аналогичную сист. для „вторых" степеней:
$\begin{cases}\alpha_2+\beta_2\geq 10\\ \beta_2+\gamma_2\geq 13\\ \alpha_2+\gamma_2\geq 18\end{cases}$ $2(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)\geq 41$ Так как $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ натуральные, то мин. знач. $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2$ — 21.
Найдём пример, удовл. такой сумме (заменим в системе вторую ср. на 14):
$\gamma_2 = 21-10=11$, $\alpha_2=21-14=7$,
$\beta_2 = 21-18=3$

• И точно так же для α_3, β_3 и γ_3:
$\begin{cases}\alpha_3+\beta_3\geq 10\\ \beta_3+\gamma_3\geq 13\\ \alpha_3+\gamma_3\geq 30\end{cases}$ $2(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3)\geq 53 \Rightarrow \alpha_3+\beta_3+\gamma_3\geq 27$ Но 27 меньше 30, поэтому минимальное значение суммы 30, т.к. степени целые неотр.
Пример: $\beta_3=0$, $\gamma_3=15$, $\alpha_3=15$.

Ответ: $2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$.



• $\angle DCB = \alpha$, если $\angle BAC = \alpha$; $\angle FEB = \varphi$
$\Rightarrow \angle EBA = \varphi$, т.к. $EF \parallel AB$, $\angle FBC = \varphi$, т.к. BC касается описанной окружности $\triangle BEF$. $\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CBF$ по 2 углам.

• коэффициент подобия равен 2 (так как $CD = \sqrt{3}a$, $\angle CBA = 60°$).
$\Rightarrow$ если $CF = b$, то $AE = 2b$

• $AC = 2\sqrt{3}a \Rightarrow CE = 2\sqrt{3}a - 2b$.

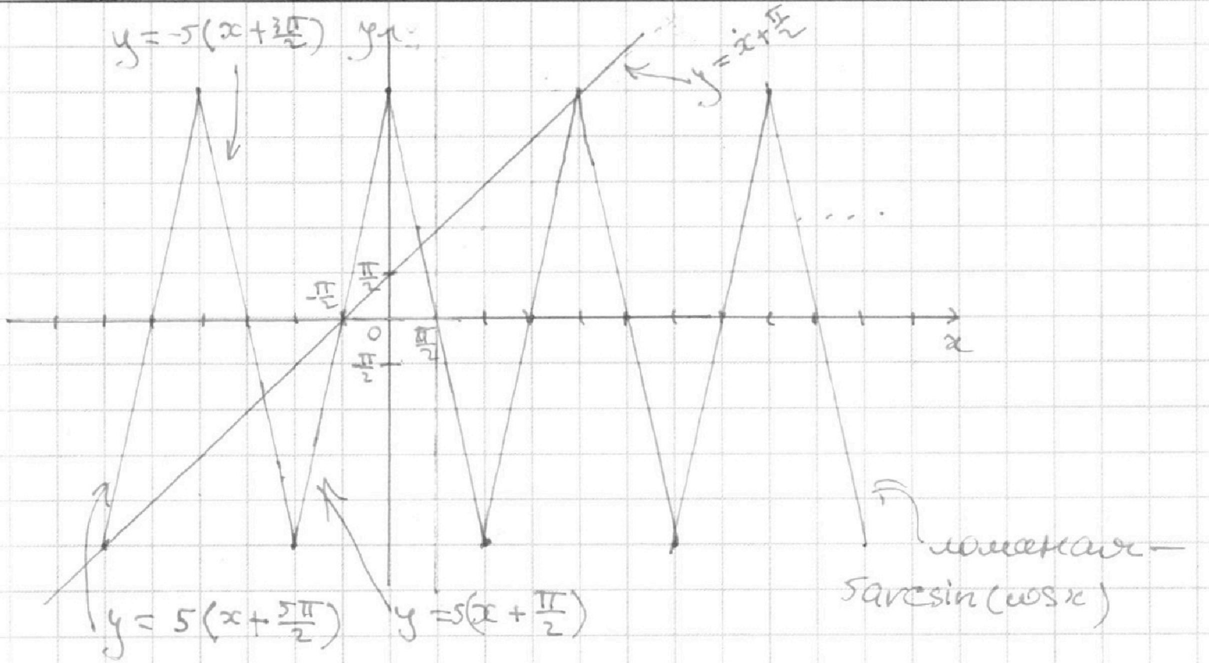
$CE : AC = CF : CD \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}a - 2b}{2\sqrt{3}a} = \frac{b}{\sqrt{3}a}$, домн. на $2\sqrt{3}a$:
$2\sqrt{3}a = 4b$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow EF$ – средняя линия $\triangle ADC$
$\Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ADC}$. $S_{ABC} = \frac{4}{3} S_{ADC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{16}{3}$.

Ответ: $\frac{16}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(1) • $\begin{cases} y = x+\frac{\pi}{2} \\ y = 5(x+\frac{5\pi}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow y = -5\frac{\pi}{2},\ x=-3\pi \Leftarrow$ подходит

(2) • $\begin{cases} y = -5(x+\frac{3\pi}{2}) \\ y = x+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{8}{6}\cdot\frac{\pi}{2},\ x = -\frac{14}{6}\cdot\frac{\pi}{2}$, подходит

(3) • $\begin{cases} y = 5(x+\frac{\pi}{2}) \\ y = x+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y=0,\ x=-\frac{\pi}{2} \Leftarrow$ подходит

(4) • $\begin{cases} y = -5(x-\frac{\pi}{2}) \\ y = x+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}\cdot\frac{\pi}{2},\ x = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} \Leftarrow$ подходит

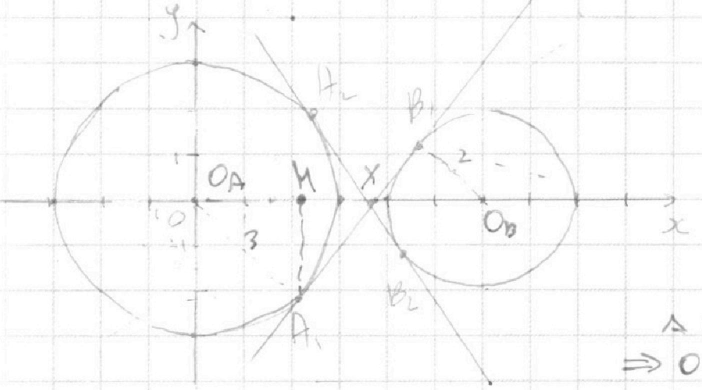
(5) • $\begin{cases} y = 5(x-\frac{3\pi}{2}) \\ y = x+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = 5\frac{\pi}{2},\ x = 2\pi \Leftarrow$ подходит.

Других точек нет, т.к. (1) и (5) — вершины ломаной

Ответ: $-3\pi,\ -\frac{7}{6}\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ 2\pi$.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \ (1) \leftarrow \text{прямая с коэфф. наклона } -\frac{a}{2} \text{ и произв. св. коэфф.} \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \leftarrow \text{две окр.:} \end{cases}$$

с центром $(0;0)$ и радиусом 3 и центром $(6;0)$ и радиусом 2: $(x-6)^2-36+y^2+32=0 \Rightarrow (x-6)^2+y^2=4$.



Нужно, чтобы коэффициент наклона прямой (1) был больше коэфф. наклона общей касательной A_2B_2 и меньше коэфф. наклона общей кас. A_1B_1.

$\triangle O_AA_1X \sim \triangle O_BB_1X$ с коэфф. $\frac{3}{2}$.

$\Rightarrow O_AX = \frac{3}{2}O_BX$, $O_BX = \frac{6}{2,5} = 2,4$

$\Rightarrow O_AX = 3,6$. $\Rightarrow A_1X = \sqrt{\frac{18^2}{5^2}-3^2} =$

$= \frac{\sqrt{18^2-15^2}}{5} = \frac{3\sqrt{11}}{5}$. $\Rightarrow \frac{A_1M}{MX} = \frac{O_AA_1}{A_1X} = \frac{3\cdot 5}{3\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$.

$\Rightarrow -\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$, $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $\left(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1$

$\log_3 x = t$

$t^4+\frac{6}{t}=\frac{5}{2t^2}-8,\quad t^4+\frac{7}{2t}+8=0;$

домн. на $2t$:

$2t^5+16t+7=0$

Аналогично $\log_3 5y = d$:

$d^4+\frac{2}{d}=\frac{11}{2d}-8$

$\Rightarrow 2d^5+16d-7=0$

сложим: $2(t+d)(\underbrace{t^4-t^3d+t^2d^2-td^3+d^4+8}_{\geq 0})$

$\Rightarrow t+d=0,\quad \log_3 x+\log_3(5y)=\log_3(5xy)$

$\Rightarrow 5xy=1,\ xy=0{,}2.$

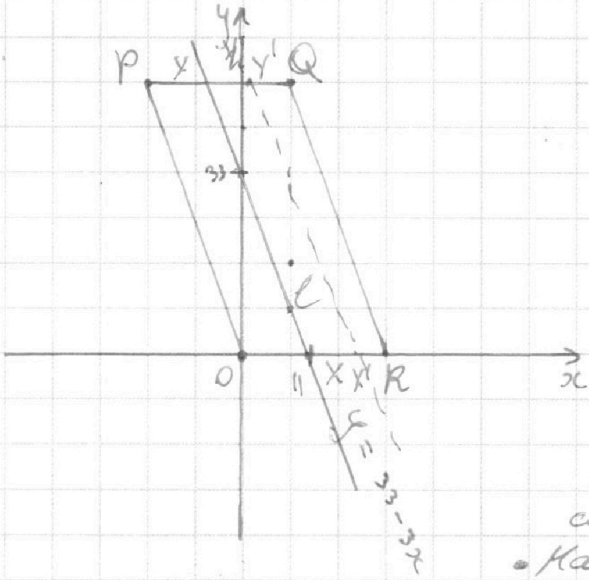
Ответ: 0,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(y_2-y_1)=33-3(x_2-x_1)$.

Временно предположим, что x_1 и y_1 равны 0. Тогда y_2 и x_2 могут находиться на прямой $y=33-3x$.

Если у точек x_1 и y_1 координаты $(a;b)$, то множество точек x_2 и y_2 — прямая l $y=33-3x$ смещается на вектор $(a;b)$.

• Найдём точки $(x_1;y_1)$, для которых прямая l находится внутри $OPQR$. Количество этих точек равно количеству целых точек в параллелограмме $XYQR$, так как н. и дост. усл. — X, перенесённая на $(a;b)$ должна быть между QR и XY, а также чтобы $b\in[0;42]$.

Независимо от выбора a и b на $X'Y'$ одинаковое кол-во целых точек, равное кол-ву ц.т. на OP. (а их там $\frac{42}{3}+1=15$). Целых точек в $XYQR$: $15\cdot(20-11+1)=150$. $(0;0)\Rightarrow$ пар точек $15\cdot150=2250$

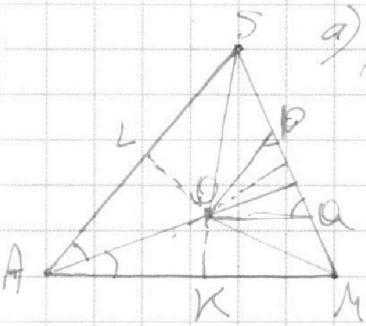
Ответ: 2250.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

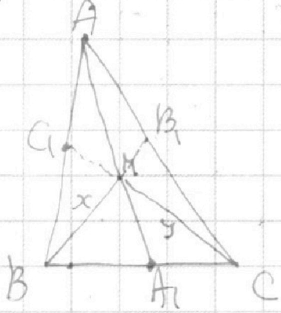
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



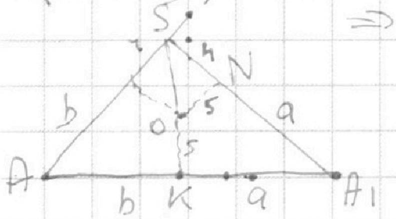
а) O — центр сферы ~~точка пересечения биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к SM~~ ($\triangle OSP = \triangle OQM$

а) • $OP = OQ$, $\angle OPS = \angle OQM$
$\Rightarrow \triangle OQM = \triangle OPS$ по 2 ст. и углу
$\Rightarrow \triangle OSL$ и $\triangle OKM$ равны по гипотенузе и катету $\Rightarrow \triangle ASM$ равнобедренный



• ∗ $\triangle ABC$: $AA_1 = \frac{3}{2} AM \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} BC = 18$.
$\Rightarrow MA_1 = BA_1 = A_1C = 6$, $\triangle BMC$ прямоугольный.
$S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$, т.к. S_{BMA_1} — треть S_{ABA_1} и аналогично с MA_1C.
$\Rightarrow$ если $BM = x$, а $MC = y$, то:
$xy = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60$. $\Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 =$
$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 60 = 9 \cdot 15 = 135$
$AA_1 \cdot 135 = 18 \cdot 135 = 2430$

б) Так как центр сферы находится в плоскости (ASA_1), то точка N находится на SA_1.



$\Rightarrow$ O — центр вписанной окр. $\triangle AA_1S$
$ON \perp BC$ и $OK \perp BC$, т.к. $ON \perp (SBC)$ и $OK \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp (ASA_1)$
$\Rightarrow$ нужно найти $\angle AA_1S$.
если $AK = b$, а $A_1K = a$, то:
$b + 4 = 12 \Rightarrow b = 8$, $b + a = 18 \Rightarrow a = 10$.
$\Rightarrow \angle AA_1S = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Ответ: а) 2430, б) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

• $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$; ОДЗ: $x>0, x\neq 1$,
замена $t=\log_3 x$: $t\neq 0$, поэтому домножим на t
$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2}t - 8$, $2t^5 + 12 = 5t^2 - 16t$,
$2t^5 - 5t^2 + 16t + 12 = 0$

• $\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$, $y>0, y\neq 1$
замена $d=\log_3 5y$: $d^4 + \frac{2}{d} = \frac{11}{2}d - 8$,
$2d^5 - 11d^2 + 16d + 4 = 0$

• $\begin{cases} 2t^5 - 5t^2 + 16t + 12 = 0 & (1) \\ 2d^5 - 11d^2 + 16d + 4 = 0 & (2) \end{cases}$ Нужно найти $t+d$, чтобы узнать xy

сложим:
$2(t+d)(t^4 - t^3d + t^2d^2 - td^3 + d^4) - 5t^2 - 11d^2 + 16(t+d) = -16$
$\Rightarrow 2(t+d)(t^4 - t^3d + t^2d^2 - td^3 + d^4 + 8) = 5t^2 + 11d^2 - 16$
~~$2(t+d)((t^4+4)+(d^4+4) - t^3d + t^2d^2 - td^3) = 5t^2 + 11d^2 - 16$~~
$t^4 = \frac{5}{2}t - 8 - \frac{6}{t}$, $d^4 = \frac{11}{2}d - 8 - \frac{2}{d}$.
$2(t+d)\left(\frac{5t^2 - 16t - 12}{2t} + \frac{11d^2 - 16d - 4}{2d} - t^3d + t^2d^2 - td^3 + 8\right) = 5t^2 + 11d^2 - 16$

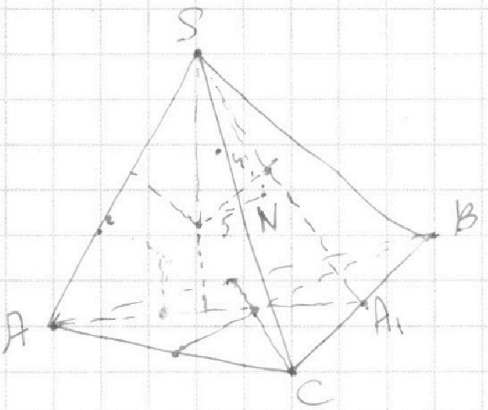
Домножим на $2td$:
$2(t+d)(5$

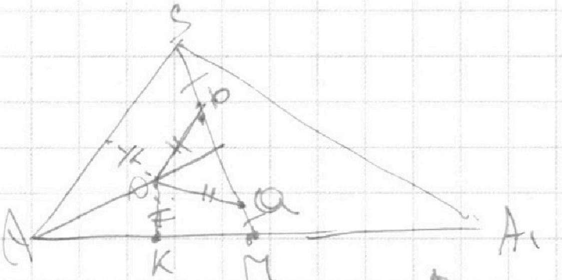
-1 $\frac{5}{2}$ $12 - 5 = 7$

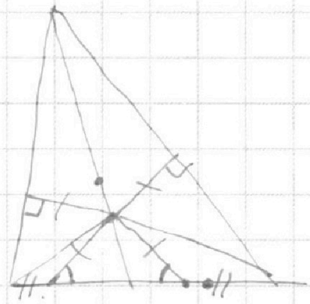
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

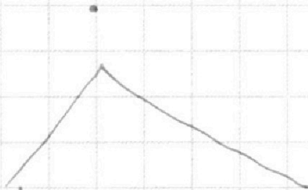
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







12 и 3



$\frac{3}{2}\cdot 12$ $18^2-\frac{225}{}$

12·4=48

и 15

~~2 15~~

9.

72−15

$\frac{45}{12}=\frac{3\cdot15}{3\cdot4}$

~~16 и 5~~

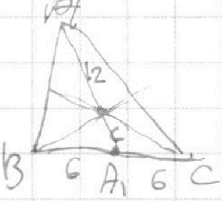
~~4·21~~

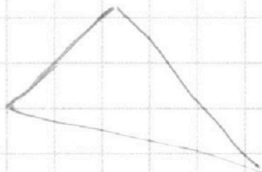
2445

18 и $\frac{15}{4}$

2445

$$\begin{array}{r} 135 \\ \times\ 18 \\ \hline 1080 \\ +135\ \ \\ \hline 1430 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

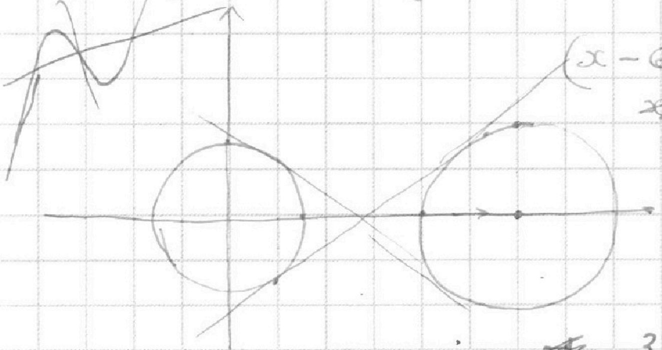
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ax+2y-3b=0$

$y=-\frac{a}{2}x+3b$

$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$



$(x-6)^2-36+\cancel{36}+y^2+32=0$

$(x-6)^2+y^2=4$

$(6;0)$ и 2

2

3

$\frac{6\cdot4}{10}$

$\frac{36}{10}=\frac{18}{5}$

$3\cdot33$

18 и 15

$x>0,\ x\neq1$

$243 : 9 = 27$, 18, 63

3^5

$\log_3 x=t.$

$t^4+\frac{6}{t}=\frac{5}{2}t-8$

$2t^5+12=5t^2-16t$

$2t^5-5t^2+16t+12=0$

~~2·32−5·4+32+12~~

~~64−48+~~

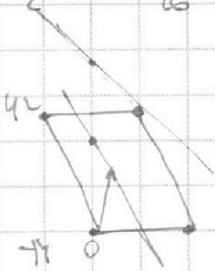
$\frac{1}{16}-\frac{11}{4}+8+4$

42 : 14 = 3

$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{16}=\frac{11}{}$

$y_2-y_1=33-3(x_2-x_1)$

$y=33-3x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}$, $b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}$, $c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}\cdot 5^{\gamma_3}$

$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1 \geq 9\\ \alpha_2+\beta_2\geq 10\\ \alpha_3+\beta_3\geq 10\end{cases}$ $\begin{cases}\beta_1+\gamma_1\geq 14\\ \beta_2+\gamma_2\geq 13\\ \beta_3+\gamma_3\geq 13\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha_1+\gamma_1\geq 19\\ \alpha_2+\gamma_2\geq 18\\ \alpha_3+\gamma_3\geq 30\end{cases}$

$\beta_1 = 9-\alpha_1$

$\gamma_1 = 14 - 9 + \alpha_1$

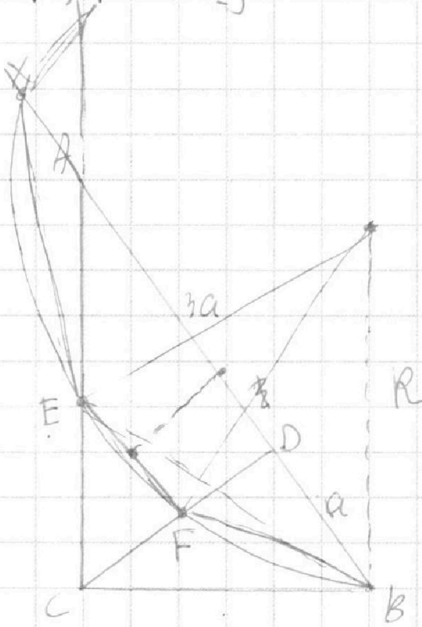
$2\alpha_1 + 5 \geq 19$

$\alpha_1 = 7$

$\beta_1 = 2$

$\gamma_1 = 12$

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ нужно мин. $2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\geq 32$



$\frac{3}{\sqrt{10}}$

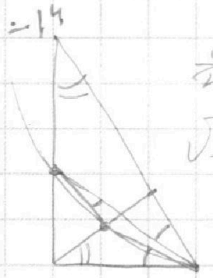
$\frac{(4a+x)\sqrt{10}}{\sin 3} = 2R$

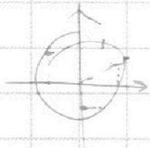
$(x+1) = -\frac{5(x+3)}{\sqrt{10}}$

$6x = -14$

$-\frac{14}{6}+1 =$

$-\frac{8}{6}$

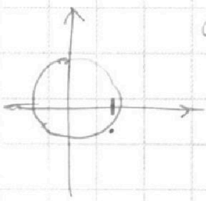




$\sqrt{3}a$

$CD = \sqrt{3}a$

$\Rightarrow BC = 2a$



A, $\frac{A}{3}$ $\frac{\frac{4}{3}A}{\frac{A}{4}} = \frac{16}{3}$

$\sin\varphi = \cos x$

$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - x$

$5(x+1) = x+1$

$4x = 6$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = x =$

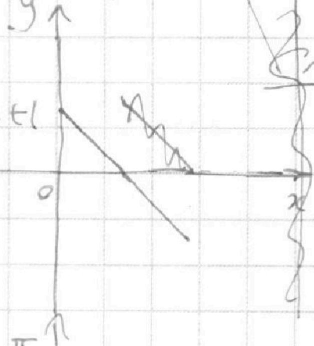
$\cos x = t$

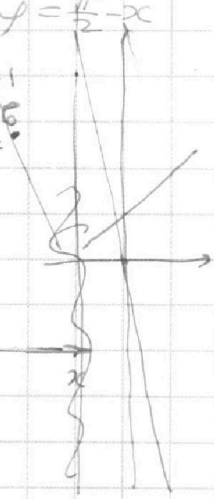
$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

$5(1-x) = x+1$

$4 = 6x$

$x = \frac{2}{3}$





$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ 5.

$\arcsin(\cos x)$