



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\boxed{ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot q$$

$$ac = 2^{13} \cdot 3^{12} \cdot 5^{30} \cdot p$$

$$(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} \cdot kpq$$

$(abc)^2$ – во 2-ой степени, т.е. каждый множитель должен
встречаться четное число раз $\Rightarrow (kpq)$ среди своих простых
множителей встречает хотя бы одну тройку и одну пятерку.

Заметка

$$\bullet ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{30} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{60} \Rightarrow$$

(kpq) содержит хотя бы 5⁷

$$\text{т. о. } kpq \geq 3 \cdot 5^7 \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60} \Rightarrow$$

$$\boxed{abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}}$$

$$\boxed{a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}}$$

$$\boxed{b = 2^2 \cdot 3^3}$$

$$\boxed{c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}}$$

Можно убедиться, что $ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$
 $bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$
 $ac : 2^{13} \cdot 3^{12} \cdot 5^{30}$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow \text{наим. значение достигается.}$$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

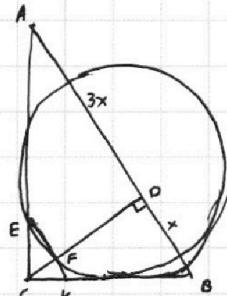
6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.



• $\triangle ACD \sim \triangle CDB \Rightarrow$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow$$

$$CD^2 = AD \cdot DB, \quad \text{I. } DB = x \Rightarrow$$

$$CD^2 = 3x \cdot x \Rightarrow CD = \sqrt{3}x$$

• $\angle (EF) \wedge BC = K$

$$\triangle CEK \sim \triangle CAB, \quad CF - \text{высота} \triangle CEK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{FK} = \frac{AD}{DB} = 3 \quad \text{I. } FK = y \Rightarrow EF = 3y \Rightarrow CF = \sqrt{3}y.$$

• по т. о. касательной и секущей $KB^2 = KF \cdot KE \Rightarrow$

$$KB^2 = y \cdot 4y \Rightarrow BK = 2y$$

$$\cdot CK = \sqrt{CF^2 + FK^2} = \sqrt{3y^2 + y^2} = 2y \text{ (по т. Пифагора)} \Rightarrow$$

$$CB = 4y$$

• С другой стороны $CB = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x \Rightarrow$

$$4y = 2x \Rightarrow x = 2y \Rightarrow$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}y \cdot 3y = \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8} x^2$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{2} \sqrt{3}x \cdot 4x = 2\sqrt{3}x^2$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

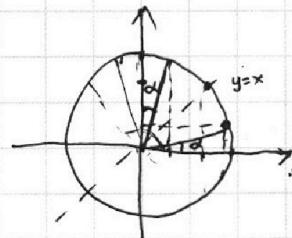
$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} & 5 \arcsin(1-x^2) = x + \frac{\pi}{2} \\ & 5(1-x^2) = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4} \\ & 26x^2 + \pi x + \left(\frac{\pi^2}{4} - 25\right) = 0 \\ & D = \pi^2 - 26\pi^2 + \frac{13 \cdot 25}{2} = \frac{13 \cdot 25}{2} - 25\pi^2 = \\ & = 25\left(\frac{13}{2} - \pi^2\right) \\ & x = \frac{-\pi \pm \sqrt{6,5 - \pi^2}}{5} \end{aligned}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{6x}{5} = \frac{9\pi}{10} \\ x + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{6x}{5} = \frac{6\pi}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Проверка:



$$\boxed{x = \frac{\pi}{3}}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} \\ 5 \cdot \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \boxed{k=0 \text{ - решается}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{4} \\ 5 \cdot \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \quad ?!$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a - ? : \exists b :$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x - 6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

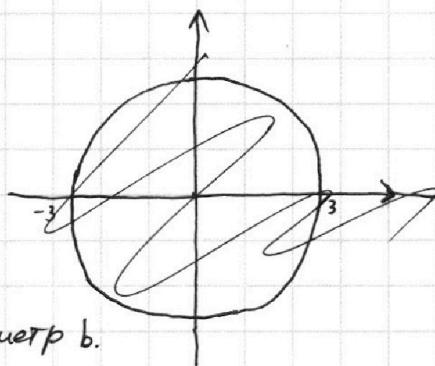
- ур-е окружн.

и. (0;0); $R = 3$

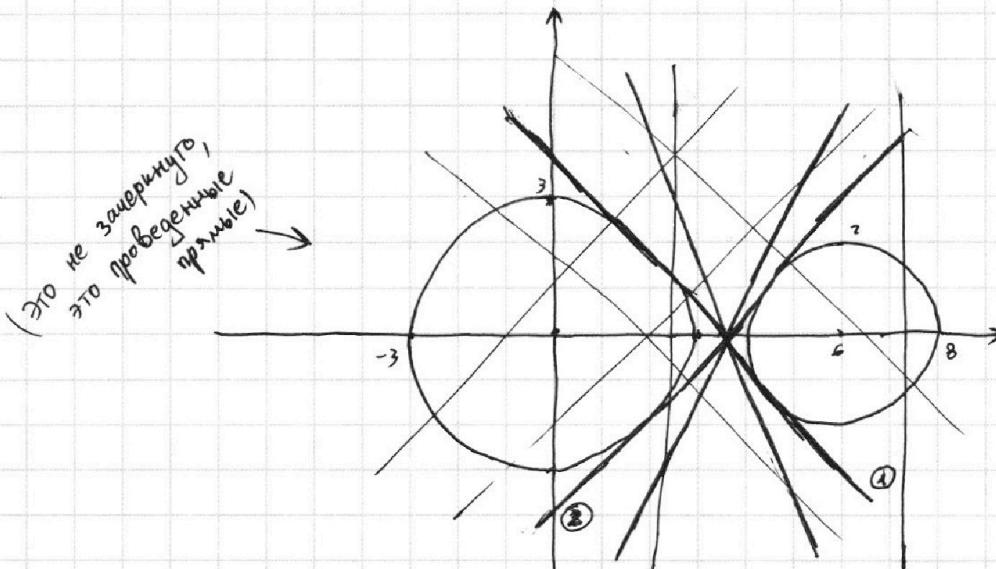
и. (6;0); $R = 2$

$$(1) y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b -$$

Прямая, за угол
наклона отвечает
параметр a ,
за смещение - параметр b .



Будем смотреть
на возможные расп.
прямых на плоскости
и искать при каких a
найдется такое b ,
чтобы прямая пересекла
окружности ровно 4 раза



Заметим, что все прямые
проходящие через точку пересечения
внутренних общ. касательных к окр. не могут пересечь окр.
более чем в 2-х точках при $\neq b$. Остальные прямые могут.

См. далее.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\rho(O_1; L) = 3 \quad \rho(O_2; L) = 2$$

$$\Rightarrow L: y = kx + c$$

$$\begin{cases} \frac{|c|}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \\ \frac{|6k+c|}{\sqrt{1+k^2}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{c}{6k+c} \right| = \frac{3}{2} \\ \frac{6k+c}{c} = \pm \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{6k}{c} + 1 = \pm \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{6k}{c} = -\frac{1}{3} \\ \frac{6k}{c} = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6k = -\frac{c}{3} \\ 6k = -\frac{5c}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -18k \\ c = -\frac{18}{5}k \end{cases}$$

$$\bullet \frac{18k}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \Rightarrow \frac{6k}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \Rightarrow \frac{36k^2}{1+k^2} = 1 \Rightarrow \frac{1+k^2}{36k^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{36k^2} + \frac{1}{36} = 1$$

$$\frac{1}{36k^2} = \frac{35}{36} \Rightarrow$$

$$\bullet \frac{\frac{18}{5}k}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \Rightarrow \frac{6k}{\sqrt{1+k^2}} = 5 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{35} \Rightarrow k = \pm \sqrt{\frac{1}{35}}$$

$$= \frac{36k^2}{\sqrt{1+k^2}} = 25 \Rightarrow \frac{1+k^2}{36k^2} = \frac{1}{25} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{36k^2} + \frac{1}{36} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{36k^2} = \frac{36-25}{36 \cdot 25} \Rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{11}{25} \Rightarrow k = \pm \sqrt{\frac{1}{11}}$$

у внутр. кас. $|k|$ больше, т.к. тангенс угла наклона

больше \Rightarrow нас интересуют $k = \pm \sqrt{\frac{1}{11}}$, т.е. нам не подойдут такие

$$k \begin{cases} -\frac{a}{2} > -5\sqrt{\frac{1}{11}} \\ -\frac{a}{2} < 5\sqrt{\frac{1}{11}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} > \frac{5}{\sqrt{11}} \\ -\frac{a}{2} < -\frac{5}{\sqrt{11}} \end{cases} \text{ - нас интересуют } a < \frac{-10}{\sqrt{11}} \text{ и } a > \frac{10}{\sqrt{11}} \Rightarrow$$

Ответ: $(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\log_3 x = A$$

$$\log_3 5y = B$$

$$\begin{cases} A^4 + \frac{12}{2A} = \frac{5}{2A} - 8 \\ B^4 + \frac{4}{2B} = \frac{11}{2B} - 8 \end{cases}$$

$$A^4 + B^4 + 2 \cancel{\frac{12}{2A}} \cancel{+ \frac{4}{2B}}$$

$$\begin{cases} A^5 + 7 + BA = 0 \\ B^5 - 7 + BB = 0 \end{cases}$$

$$A^5 + B^5 + B(A+B) = 0$$

$$(A+B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 + 8) = 0$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4 = -8 \end{cases} \quad | : B^4 \quad \Rightarrow t = \frac{A^4}{B^4}$$

$$t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = -\frac{8}{B^4}$$

$$\begin{aligned} & \cancel{(t^2 + \frac{-\sqrt{5}-1}{2}t + 1)}(t^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t + 1) = \\ & = t^4 + \frac{-\sqrt{5}-1}{2}t^3 + t^2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t^3 + \frac{(-1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{4}t^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t + \\ & + t^2 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}t + 1 = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = -\frac{8}{B^4} \end{aligned}$$

$$\cancel{(t^2 + (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) + 1)}$$

$$D = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{6+2\sqrt{5}-16}{4} = \frac{2\sqrt{5}-10}{4} < 0 \Rightarrow t^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1 > 0$$

$$\cancel{(t^2 + (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})t + 1)}$$

$$D = \frac{1+5-2\sqrt{5}-16}{4} = \frac{-2\sqrt{5}-10}{4} < 0 \Rightarrow \left(t^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)t + 1\right) > 0$$

$$-\frac{8}{B^4} < 0, \text{ а } \cancel{t^4 - t^3 + t^2 - t + 1} > 0 \Rightarrow \text{решений нет} \Rightarrow$$

$$\boxed{A+B=0} \Rightarrow \log_3 x + \log_3 5y = 0 \Rightarrow \log_3 x \cdot 5y = 0 \Rightarrow x \cdot 5y = 1 \Rightarrow xy = \left(\frac{1}{5}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

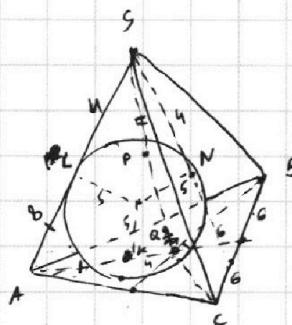
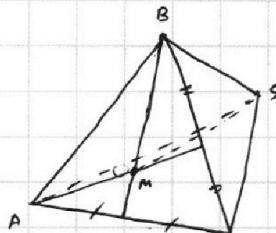
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

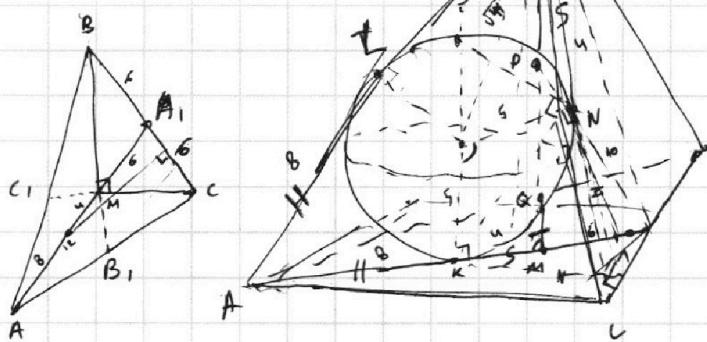
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



$$S_{ABC} = 90$$



$$\begin{aligned} KM^2 &= QM \cdot MP = SP \cdot SQ = \\ &= ST^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

(*Так как* $SP \perp ST$)

$$KM = ST \Rightarrow$$

$$AM = AS = 12 \Rightarrow$$

$$AA_1 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18 \Rightarrow$$

$MA = 6 \Rightarrow \triangle CAM$ — прямой.

$$CC_1 \cdot BB_1 = 2 \cdot CC_1 \cdot BM \Rightarrow$$

$$CC_1 \cdot BM = S_{ABC} \Rightarrow CC_1 \cdot BM = 90 \Rightarrow (AM \perp MC_1) \wedge (BM \perp MC_1) \Rightarrow 90$$

$$BB_1 \cdot CM = S_{ABC} \Rightarrow BB_1 \cdot CM = 90 \Rightarrow$$

$$C_1C \cdot B_1B \cdot CM \cdot BM = 90^2 \Rightarrow$$

~~$$C_1C \cdot B_1B = \frac{90^2}{CM} \cdot \frac{90^2}{BM} = \frac{90^2}{6^2}$$~~

$$C_1C \cdot B_1B \cdot \frac{2}{3} C_1C \cdot \frac{2}{3} B_1B = 90^2 \Rightarrow$$

a) Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 135 = 2430$

5)

$$\begin{array}{r} \times 135 \\ 18 \\ \hline 1080 \\ 135 \\ \hline 2430 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

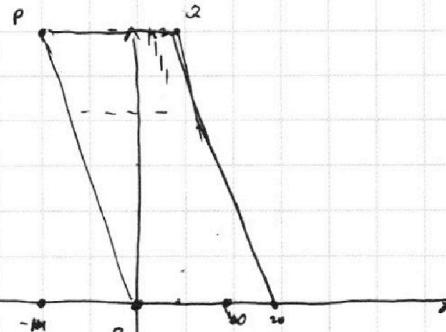
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$(3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$(y_2 - y_1) : 3$$

$$y_2 \in [0, 42]$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 \rightarrow 0, 3, \dots, 42,$$

$$y_1 = 1$$

$$\cancel{15 \cdot 3 + 14 \cdot 3 + \dots + 0 \cdot 3} \\ \cancel{3(1 + \dots + 15)} = 3 \cancel{15 \cdot 8} -$$

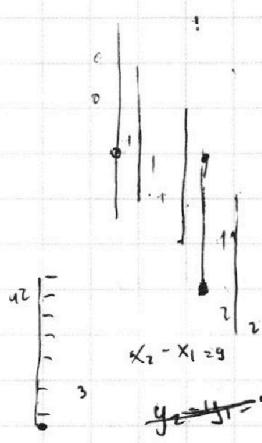
$$\cancel{\text{办法}} \quad \cancel{y \text{ так, чтобы}} \\ (y_2 - y_1) : 3$$

$$y_1 = 42$$

$$y_2 = 15, 16, \dots, 40, 41$$

$$3 \frac{42 - 41}{2} = \frac{15 - 16}{2}$$

$$21 - 41 = 8 \cdot 15$$



$$x_2 - x_1 \leq 20$$

$$-20 \leq x_2 - x_1 \leq 20$$

$$-42 \leq (y_2 - y_1) \leq 42$$

$$33 - 3 \cdot 20 \leq |33 - 3(x_2 - x_1)| \leq 33 + 3 \cdot 20 = 93$$

!!
-27

$$\text{т.е. } -27 \leq (y_2 - y_1) \leq 42$$

Способов выбрать y у так, чтобы

$$(y_2 - y_1) \text{ и } (y_2 - y_1) : 3 : 3 \cdot 15 \cdot 8$$

$$y_2 < y_1 \text{ и } (y_2 - y_1) : 3 : 21 \cdot 41 - 8 \cdot 15$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + \log_3^2 5y + 6 \log_x 3 + 2 \log_{5y} 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 + \frac{11}{2} \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 + \log_{25y^2} 3 - 8 = \log_x 243 - 8 + \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 + \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 + \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 + 3,5 \log_{5y} 3 = \log_3^4 5y$$

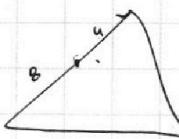
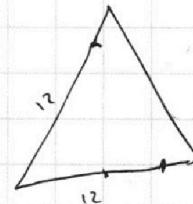
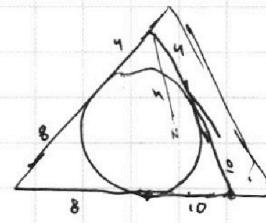
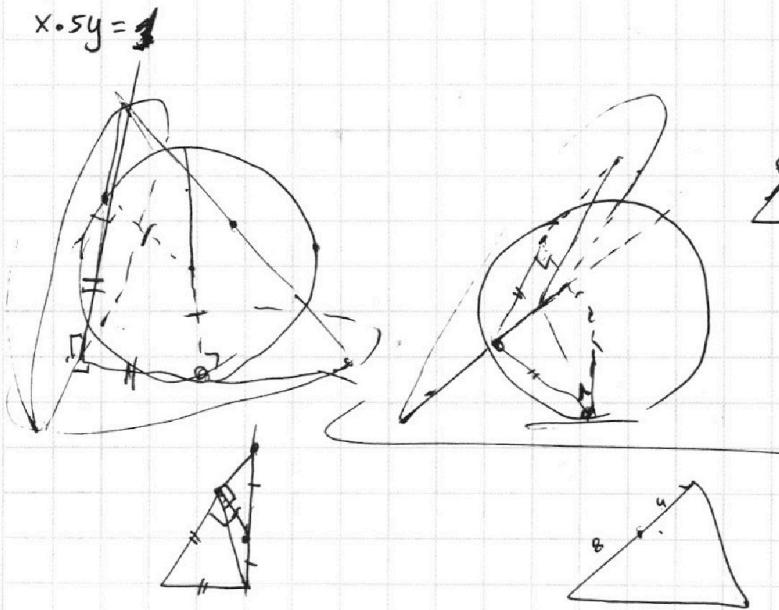
$$(\log_3^4 x - \log_3^4 5y) + 3,5 \left(\frac{\log_3 5y + \log_3 x}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} \right) = 0$$

$$(\log_3^2 x - \log_3^2 5y)(\log_3^2 x + \log_3^2 5y) + 3,5 \left(\frac{\log_3 5y + \log_3 x}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} \right) = 0$$

$$(\log_3 5y + \log_3 x) \left(\log_3^3 x + \log_3^2 5y \cdot \log_3 x - \log_3 5y \cdot \log_3^2 x - \log_3^3 5y + \frac{3,5}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} \right) = 0$$

$$\log_3(x \cdot 5y) = 0$$

$$x \cdot 5y = 1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^4) - 8 \end{cases}$$

$$xy - ?$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = 2 \log_{1x1} 3 - 8 \\ \log_3^7 5y + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2} \log_{15g1} 3 - 8 \end{cases}$$

$$243 = 9 \cdot 27 = 3^5$$

$$\log_3 x - \log_3 5y + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{5}{2} \log x 3 - \frac{11}{2} \log y 3$$

logos

$$\left(\frac{1}{\log x^3}\right)^4 - \left(\frac{1}{\log_{x^3} 3}\right)^4 + 3,5 \log_{x^3} 3 + 3,5 \log_{3x^3} 3 = 0$$

$$3,5 \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y} \right) + (\log_3^2 x + \log_3^2 5y)(\log_3 x + \log_3 5y).$$

$$\circ \left(\log_3 x - \log_3 5y \right) = 0$$

$$\frac{3,5 \log_3(5xy)}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} + \log_3(5xy) \left(\left(\log_3^2 x + \log_3^2 5y \right) \left(\log_3 \frac{x}{5y} \right) \right) = 0$$

$$\log_3(5xy) \left(\frac{3,5}{\log_2 x + \log_3 y} + (\log_2 x + \log_3 5y)(\log_3 \frac{x}{5y}) \right) = 0$$

$$\log_3 x = A$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 55 = \frac{5}{2A} - 8$$

$$A'' + \frac{B}{2A} \neq \frac{5}{2A} - 8$$

$$\left\{ B'' + \frac{A}{2B} = \frac{11}{2B} - 8 \right.$$

$$A^4 + \frac{7}{2}A + 8 = 0$$

$$A^4 + \frac{1}{2}B$$

$$A^S + 7A^{+8A} + 8B =$$

$$A^5 + B^5 + B(A+B) = 0$$

$$A^5 - B^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)$$

$$\begin{aligned} O^2 P \\ O = P^2 \\ 1 = 9 \\ 1 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left(B + A^2 B^2 - AB + B^3 \right) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial y} \left(B + A^2 B^2 - AB^3 + B^2 \right) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial z} \left(B^2 - A^3 B^2 - AB^3 + B^4 \right) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 + t^2 + 2(a+c)t + 2(a+c)b \right) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 + t^2 + 2(a+c)t + 2(d+ac+b)t + 2(d+ac+b)b \right) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial z} \left(x^2 + t^2 + 2(a+d+cb)t + 2(d+ac+b)c \right) = 0
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять ТОЛЬКО одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

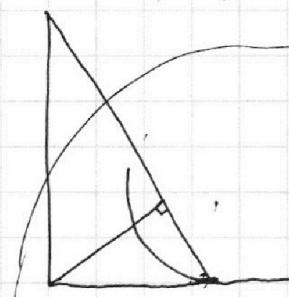
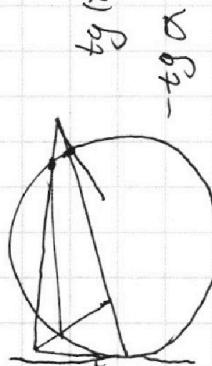
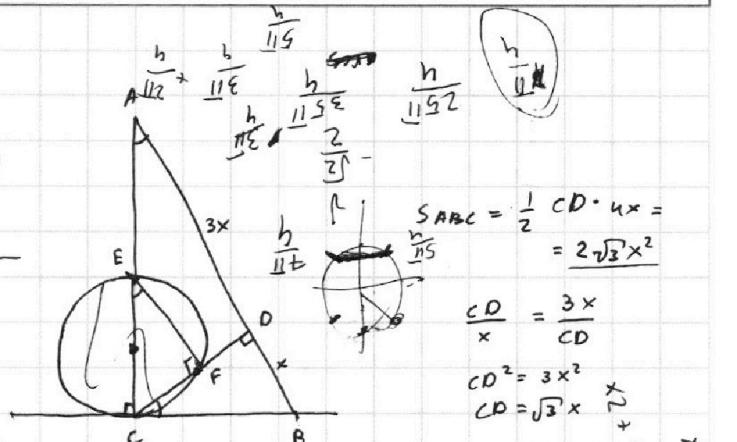
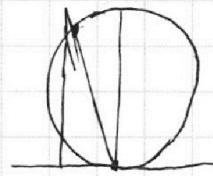
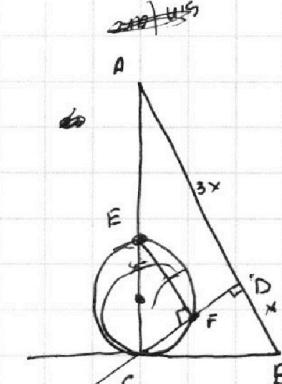
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



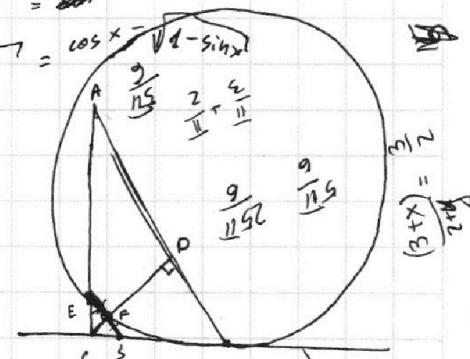
arcsin(cos x)

arcsin(1)

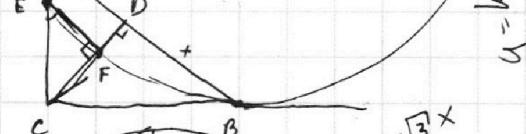
sint = cos x

sqrt(1-x^2) = sin

sin sqrt = cos x - sqrt(1-sin^2 x)

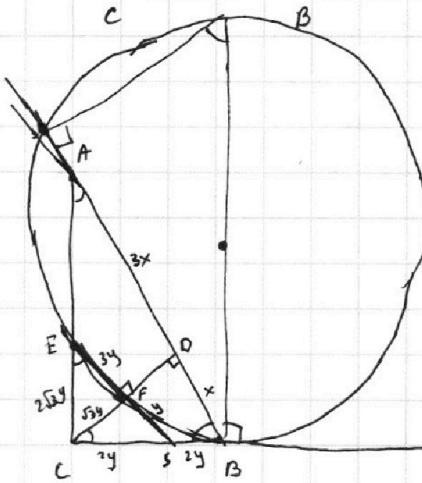


$$5\sqrt{1-x^2} = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\cos x =$$

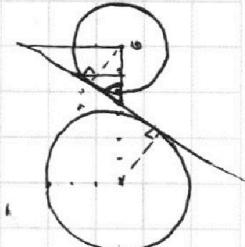
$$\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right)$$



$$3x + x$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FS}{x}$$

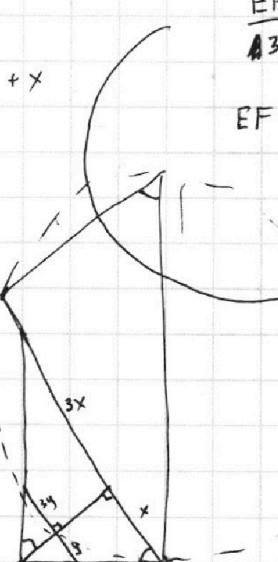
$$EF =$$



$$SB^2 = SF \cdot SE$$

$$SB^2 = 16 \cdot 4y$$

$$SB = 2y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

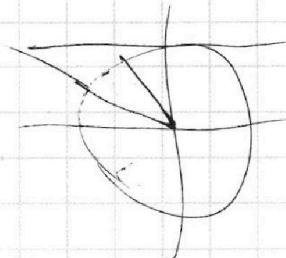
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 1.

$$] ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot k$$

$$bc = 2^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \cdot q$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot p$$



$$(abc)^2 = 2^{(19+14+9)} \cdot 3^{(10+13+18)} \cdot 5^{(10+13+30)} \cdot kpq = \\ = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53} kpq$$

$(abc)^2$ – в четной степени, т.е. каждый множитель

встречается четное число раз $\Rightarrow (kpq)$ содержит хотя бы
одну тройку и одну пятерку в разложении.

abc наим, когда k,p,q наим.

$$k \cdot p \cdot q \geq 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow abc \geq (abc)^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$$

$$] (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54}$$

$$\begin{array}{l} ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ b+c=14 \\ a+c=19 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ac = 2^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ b+c=14 \\ a+c=18 \end{array}$$

$$] a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$$

$$\begin{array}{l} b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^9 \\ c = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^{20} \end{array}$$

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \cdot 4$$

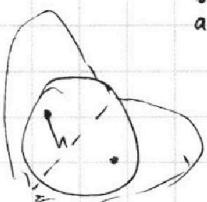
$$\Rightarrow abc \geq 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$$

$$ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$(abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

Заметим, что сумма степеней
пятерок для чисел ab, bc, ac – 154.



$$\begin{array}{l} ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ b+c=14 \\ a+c=19 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ac = 2^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ a+b=19 \\ b+c=14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} bc = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^{20} \\ a+b=19 \\ a+c=18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10} \\ b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^9 \\ c = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^{20} \end{array}$$

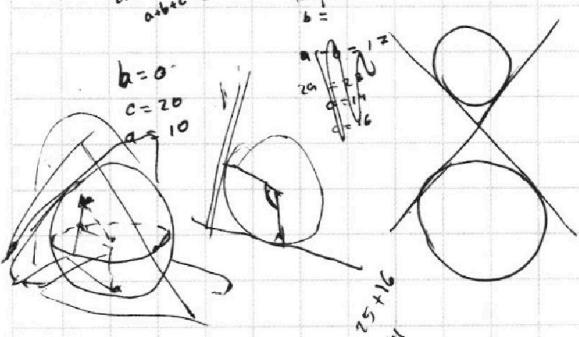
$$\text{знач } (abc)^2 = t \cdot 5^{54}, t \neq 5$$

$$(abc) \leq 5^{27} \cdot t, t \neq 5$$

$$\text{но } ac \leq 5^{30} \Rightarrow$$

$$(abc) \leq 5^{30} \Rightarrow (abc)^2 \leq 5^{60} \Rightarrow$$

kpq содержит хотя бы $5^2 \Rightarrow$
 $kpq \geq 3 \cdot 5^2$



25+16
41