



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{d_1} \cdot 3^{B_1} \cdot 5^{r_1} \cdot p$
(Все показатели $b = 2^{d_2} \cdot 3^{B_2} \cdot 5^{r_2} \cdot q$
степеней — чётные $c = 2^{d_3} \cdot 3^{B_3} \cdot 5^{r_3} \cdot r$
и все числа не меньше 0)

Риск-мод 1, мод числа
взаимно простые с 2, 3, 5.

Тогда $abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 3^{B_1+B_2+B_3} \cdot 5^{r_1+r_2+r_3} \cdot pqr \geq$
 $\geq 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 3^{B_1+B_2+B_3} \cdot 5^{r_1+r_2+r_3}$

По условию: 1) $d_1+d_2 \geq 7$
 $d_1+d_3 \geq 13$, тогда $(d_1+d_2+d_3) \geq 34$
 $d_1+d_3 \geq 14$ $(d_1+d_2+d_3) \geq 17$

при $d_1+d_2+d_3 = 17$ возможна ситуация:

$d_1=4, d_2=3, d_3=10$ — удовлетворяют системе

2) $B_1+B_2 \geq 11$

$B_2+B_3 \geq 15$, тогда $2(B_1+B_2+B_3) \geq 43$

$B_1+B_3 \geq 17$

$B_1+B_2+B_3 \geq 21,5$

$B_1+B_2+B_3 \geq 22$ (так все числа

при $B_1+B_2+B_3=22$ возможна ситуация: B_1, B_2, B_3 — чётные)

$B_1=7, B_2=5, B_3=10$ — удовлетворяют системе

3) $r_1+r_2 \geq 14$

$r_2+r_3 \geq 18$

$r_1+r_3 \geq 43$ т.к. $r_1+r_2+r_3 \geq r_1+r_3 \geq 43$, то

пусть $r_1+r_2+r_3=43$, тогда возможна ситуация:
 ~~$r_3=43, r_1=0, r_2=0$~~ $r_1=20, r_3=23, r_2=0$ —
— удовлетворяют системе.

Тогда $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ при $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}, b = 2^3 \cdot 3^5, c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

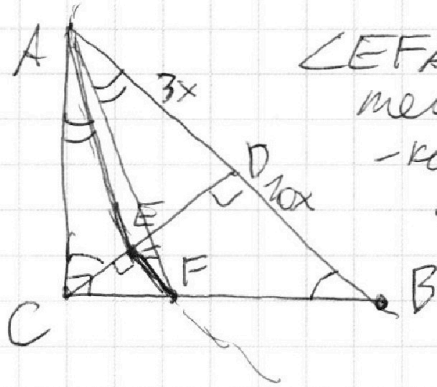
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\angle EFA = \angle CAE$ (как по CB - AB касательной: AE - хорда, $\angle EFA$ - впис, AC - кас.)

$\angle EFA = \angle FAB$ (как соответств. углы при параллельных)

$$\angle CAD = 90^\circ - \angle CBA = 90^\circ - (90^\circ - \angle BCD) =$$

$$= \angle BCD; \angle CEF = \angle CDB = 90^\circ \text{ (как соств. углы)}$$

$\angle CEF = \angle ADC$, значит $\triangle CAD \sim \triangle CEF$ (по двум углам); $k = \frac{AC}{CE} = \frac{CD}{EF} = \frac{AD}{CF}$

$$\angle CAE = \angle EAF = \angle CAF = \angle CEF + \angle EAF = \angle ADE$$

$$\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$$

значит $\triangle ADE \sim \triangle CAF$ (по двум углам)

$$\frac{AD}{CF} = \frac{DE}{AF} = \frac{AE}{CE}$$

$\angle ACD = \angle ABC$, значит $\triangle ACE \sim \triangle ABF$ (по двум углам)

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF}; \frac{CE}{BF} = \frac{CE}{BC - CF}; \frac{CF}{CE} = \frac{BC}{CD}, \text{ значит}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BC - \frac{BC \cdot CE}{CD}}; \frac{AC}{AB} = \frac{CE \cdot CD}{BC \cdot CD - CE}$$

Пусть $AB = 13x$, тогда $BD = x$, $AD = 3x$, $CD = \sqrt{AD \cdot BD} =$

$$= 3\sqrt{3}x, BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{90 + 100}x = \sqrt{190}x; AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} =$$

$$= 3\sqrt{7}x:$$

$$\frac{3\sqrt{7}}{13} = \frac{CE \cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{190} \cdot (3\sqrt{3}x - CE)}; \frac{\sqrt{7}}{13} = \frac{CE}{\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{3} - CE)}$$

$$3 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}x - \sqrt{7} \cdot CE = 13CE \Rightarrow CE = \frac{3\sqrt{71070}}{\sqrt{71} + 13}x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{AD}{CE} = \frac{\sqrt{11} + 13}{\sqrt{11} \cdot 1910}$$

$$k^2 = \frac{(\sqrt{11} + 13)^2}{11 \cdot 1910} = \frac{169 + 11 + 26\sqrt{11}}{2090} = \frac{180 + 26\sqrt{11}}{2090} = \frac{90 + 13\sqrt{11}}{1045}$$

Ответ: $\frac{90 + 13\sqrt{11}}{1045}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi - 5(x + 2\pi k) = x, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{2} \leq x + 2\pi k \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} = x$$

$$\text{Проверка: } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi k}{3} \leq \frac{\pi}{3}$$

$$-2 \leq k \leq 1$$

при $k \in \mathbb{Z}$ есть следующие значения:

$$k = -2, k = -1, k = 0, k = 1.$$

$$\text{при } k = 1, x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{3\pi}{2}, \text{ но } 5 \arccos(\sin \frac{3\pi}{2}) = 5\pi$$

$$\frac{3\pi}{2} + x = 0 \text{ — не кор}$$

$$\text{при } k = 0, x = \frac{\pi}{6}$$

$$5 \arccos(\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{5\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \text{ — кор}$$

$$\text{при } k = -1, x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}, \text{ но } 5 \arccos(\sin \frac{11\pi}{6}) =$$

$$= 5 - 2\pi = \frac{10\pi}{3}$$

$$\text{при } k = -2, x = \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2}, \text{ но } 5 \arccos(\sin \frac{7\pi}{2}) = 5 - 2\pi = \frac{10\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{21\pi}{6} = \frac{23\pi}{3}$$

$$5 \arccos(\sin \frac{7\pi}{2}) = 5 - 2\pi \text{ — не кор}$$

значит $x = \frac{\pi}{6}$ — единственное решение

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



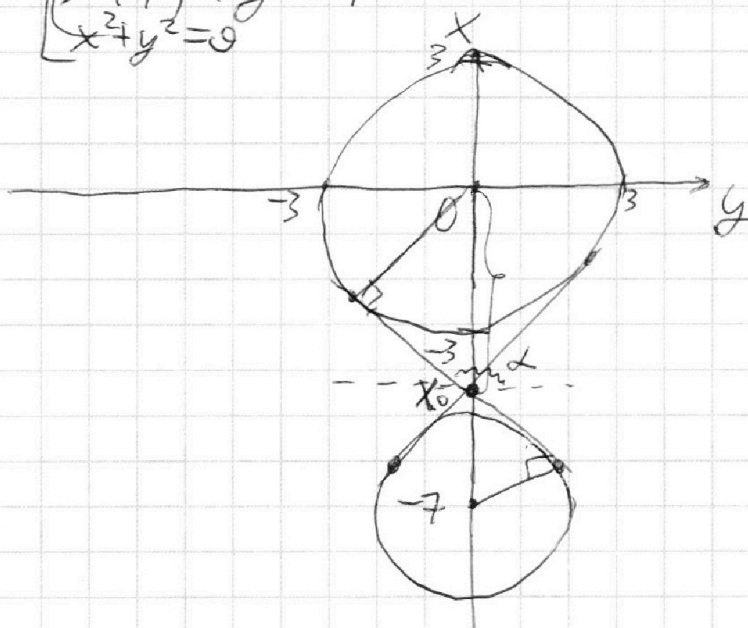
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases}
 x + 3ay - 7b & (1) \\
 (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2)
 \end{cases}$$

~~Вывести~~ построим множество точек, удовлетворяющих уравнению (2)

$$\begin{cases}
 x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\
 x^2 + y^2 - 9 = 0 \\
 (x+7)^2 + y^2 = 4 \\
 x^2 + y^2 = 9
 \end{cases}$$



(А) ~~$x = -7b$~~ Найдем уравнение касательной, проходящей к двум данным окружностям.

$$\frac{3}{-x_0} = \frac{2}{7+x_0}; \quad 27 + 3x_0 = -2x_0; \quad x_0 = -\frac{27}{5}$$

$$\sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{3}{|x_0|} = \cos \alpha = \frac{3}{\frac{27}{5}} = \frac{5}{9}, \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

$$\sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{3}{|x_0|}; \quad -\cos \alpha = \frac{3}{\frac{27}{5}}; \quad \cos \alpha = -\frac{5}{9}, \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Итого, данные уравнения:

$$\begin{aligned}
 X &= -\frac{27}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{5} y \quad \text{и} \\
 X &= -\frac{27}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5} y
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

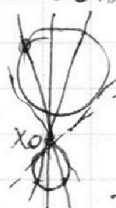
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1): $x = 7b - 3ay$

Заметим, что при любом значении a

мы можем подобрать значение b так, чтобы данная прямая проходила через точку $(0; x_0)$

($b = \frac{x_0 + 3ay}{7}$), тогда если $|3a| \geq \frac{2\sqrt{6}}{5}$, то любая прямая, проходящая через $(0; x_0)$ пересечет все окружности в двух точках:

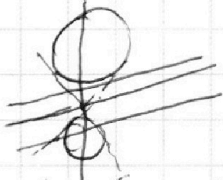


т.е. такие a удовлетворяют

$$\begin{cases} a \geq \frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a \leq -\frac{2\sqrt{6}}{15} \end{cases}$$

Если $|3a| = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, то такие прямые-касательные к двум окружностям. Тогда точек пересечения всего 2.

Если $|3a| < \frac{2\sqrt{6}}{5}$, то все прямые, проходящие через точку $(0; x_0)$ не будут пересекать окружности в двух точках. Если мы будем двигать данную прямую вверх или вниз, то расстояние от прямой до одной из окружностей будет увеличиваться, значит она не будет иметь с этой окружностью двух точек и тогда такие a нам не подходят:



Ответ: $(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) ~~Решим уравнение~~: $\log_7^4 6x - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$

$$\log_7^4 6x - 2 \log_{\frac{7}{\log_7 6x}} = \frac{1}{\frac{2}{3} \log_7 6x} - 4 \quad \begin{matrix} x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{matrix}$$

$$t = \log_7 6x; \quad t^4 - \frac{2^2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad t \neq 0$$

$$t^4 - \frac{7}{2t} + 4 = 0 \quad (1)$$

2) $\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_y (7)^5 - 4$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2 \log_7 y} - 4; \quad p = \log_7 y, \quad p \neq 0$$

$$p^4 + \frac{7}{2p} + 4 = 0 \quad (2)$$

Вычтем из (1) уравнение (2):

$$t^4 - p^4 - \frac{7}{2}(t + p) = 0$$

$$(t - p)(t + p)(t^2 + p^2) - \frac{7}{2} \left(\frac{p+t}{pt} \right) = 0$$

1) $p + t = 0$: $\log_7 y + \log_7 6x = 0$
 $\log_7 6xy = 0$
 $6xy = 1$
 $xy = \frac{1}{6}$

2) $p + t \neq 0$

$$2(t - p)(t^2 + p^2) - 7 = 0 \quad (pt \neq 0)$$

$$(t - p)(t^2 + p^2)pt = \frac{7}{2}$$

~~или $p > 0$ уравнение $p^4 + \frac{7}{2p} + 4 = 0$ не имеет корней~~

~~поэтому $p < 0$~~

Теперь сложим уравнения (1) и (2):

$$t^4 + p^4 - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{p} \right) + 8 = 0$$

$$t^4 + p^4 + 8 = \frac{(p - t) \cdot 7}{2pt}; \quad pt = \frac{2pt}{7} (t^4 + 8 + p^4)$$

логарифмируем ранее полученное уравнение:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\langle \frac{2}{7} p^2 t^2 \cdot (p^2 + t^2) \cdot (t^4 + 8 + p^4) = \frac{7}{2} \right.$$

Л. часть < 0 , а правая > 0 , значит
уравнение не имеет корней и такая
ситуация невозможна.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

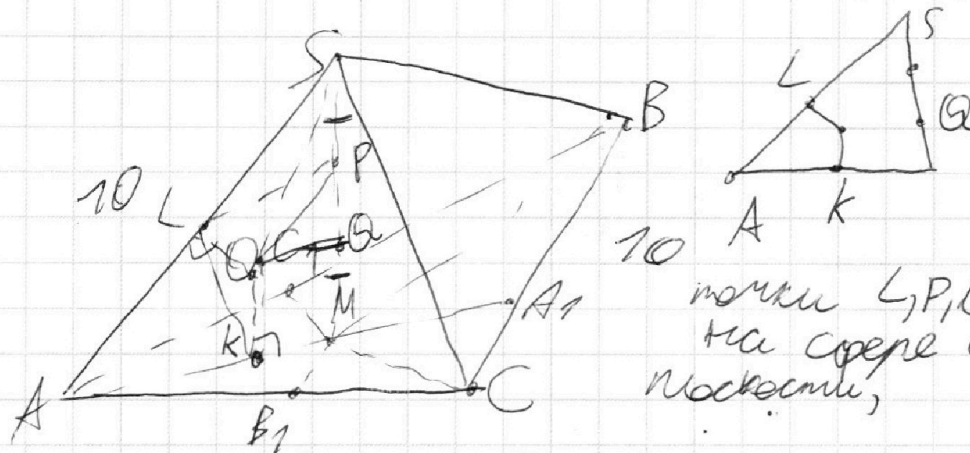
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



точки L, P, Q лежат на сфере и в одной плоскости,

центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости (ABC) , проходящем через K ,

$$AK \cdot BV_1 \cdot CV_1 = \frac{1}{8} \sqrt{2(AB^2 + BC^2) - AC^2} \quad \text{а так же}$$

на перпендикуляре к отрезку AS в точке L , угадали

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3) 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi - 5(x + 2\pi k) = x, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \frac{\pi}{2} \leq x + 2\pi k \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3}$$

Проверка: $x + 2\pi k = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi k}{3} \leq \frac{\pi}{3}$$

$-2 \leq k \leq 1$ при $k \in \mathbb{Z}$ подходят следующие значения:

$-2, -1, 0, 1$ $4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$

тогда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2}$ ($k = -2$) $y = -4x$
 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$ ($k = -1$) $y = 4x + 20$
 $x = \frac{\pi}{6}$ ($k = 0$)
 $x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$ ($k = 1$)

при $x = \frac{7\pi}{2}$ $5 \arccos(\sin \frac{7\pi}{2}) = 5 \arccos(-\frac{1}{2}) = 5$

$= 5 \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{5\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{2} = \frac{23\pi}{2}$ значения не равны, значит $x = \frac{7\pi}{2}$ не годит.

при $x = \frac{11\pi}{6}$ $5 \arccos(\sin \frac{11\pi}{6}) = 5 \arccos(-\frac{1}{2}) = 5 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{11\pi}{6}$$

$$3t + \frac{7}{2}t^2 = \frac{8t^5 + 7}{2t^2}$$

$$(t-p)(t^2+q^2)pt = \frac{7}{2}$$

$$t^4 + \frac{7}{2}(t-p) + 8 = 0$$

$$(t^2 + p^2) - \frac{7}{2}(p-t) + 8 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3) \text{arccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ — не подходит}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5(x + 2\pi k) = \frac{3\pi}{2} + x, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{2} \leq x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\pi + 10\pi k = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}$$

Проверка:

$$x + 2\pi k = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3} + 2\pi k$$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \leq \frac{-5\pi k + 2\pi k}{3} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{-\pi k}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$$

При $k \in \mathbb{Z}$ подходят 3 значения: $k = -1, k = 0, k = 1$

$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$abc_{\min} - ?$

$$ab = k \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$bc = p \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$ac = r \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$d_1 + d_2 \geq 7$$

$$d_1 + d_3 \geq 14$$

$$d_2 + d_3 \geq 13$$

$$(0, 4, 3)$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 34$$

$$2(d_1 + d_2 + d_3) \geq 34$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 17$$

$$(5, 8, 11)$$

$$b_1 + b_2 \geq 11$$

$$b_2 + b_3 \geq 15$$

$$b_1 + b_3 \geq 17$$

$$2(b_1 + b_2 + b_3) \geq 43$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq 22$$

$$r_1 + r_2 \geq 14$$

$$r_2 + r_3 \geq 18$$

$$r_3 + r_1 \geq 43$$

$$k=43$$

$$2(r_1 + r_2 + r_3) \geq 75$$

$$r_1 + r_2 + r_3 \geq 38 \quad k=43$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = k \quad k=43 \quad k - r_1 \geq 43 \quad r_1 \leq k - 43$$

$$r_1 = 0, r_2 = 14,$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49k^2 + 49b^2 = 98bk \leq 3k^2 + 4$$

$$49b^2 = 92kb + 27k^2 < 2k^2 + 2$$

$$\text{5) } \log_7^4 6x - 2 \log_6^7 = \log_{36}^2 = 343 - 4$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{1}{\log_{343} 36x^2} - 4$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{1}{\frac{2}{3} \log_7 6x} - 4$$

$$6x \neq 1$$

$$-6x \neq 1$$

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$t^4 - \frac{7}{2t} + 4 = 0$$

$$2t^4 + 8t - 7 = 0$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = \frac{3\pi}{2} + x \quad -\frac{\pi}{2} < x + 2\pi k \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\pi + 10\pi k = 6x$$

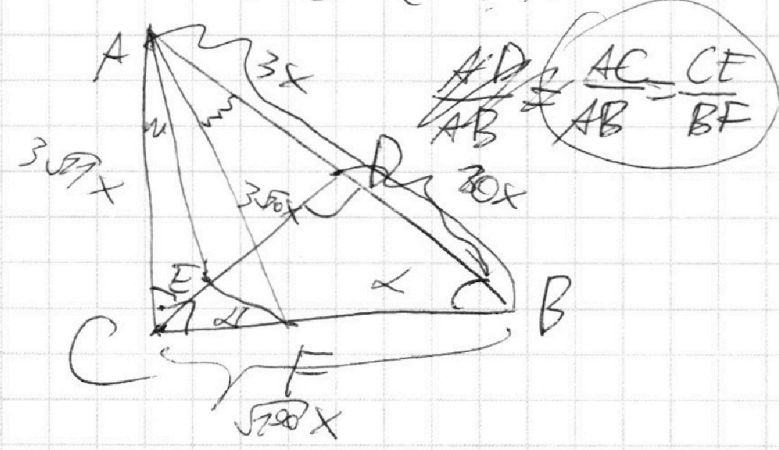
$$\frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x + 2\pi k = \frac{5\pi k}{3}$$

$$t^4 + p^4 = \frac{7}{2} \left(\frac{p-t}{pt} \right) - 8 \quad p-t = \frac{(t^4 + p^4 + 8)pt}{t^2 + p^2}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BC - CF}$$

$$-(t^2 + p^2)(pt)^2 (t^4 + p^4 + 8)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



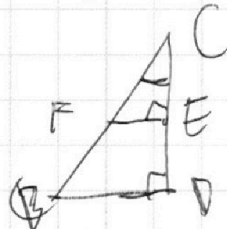
$$CE = \frac{AC \cdot BC \cdot CD}{AC \cdot CD + AC \cdot BC} \quad X = \frac{AC \cdot AD \cdot CD}{BC \cdot (AC \cdot BC \cdot CD)^2} =$$

$$= \frac{(AC \cdot CD + AB \cdot BC)^2}{BC^3 \cdot AC \cdot CD}$$

3.) $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ $5 \arccos \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$
 $5(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$
 $\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x; \pi = 6x; x = \frac{\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

4) $CF = \frac{BC \cdot CE}{CD} = \frac{AC \cdot DE}{AD}$

$k = \frac{CF}{DE}$



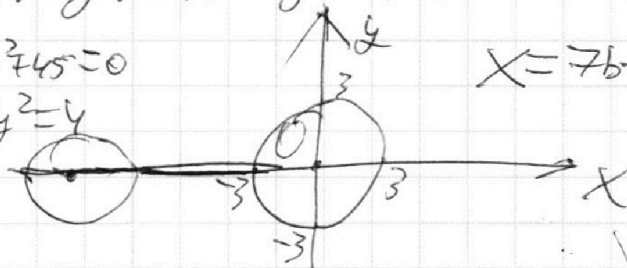
$\triangle ACD \sim \triangle ACEF$
 $k = \frac{CF}{AC} = \frac{EF}{CD} = \frac{CE}{AD}$

$\frac{7\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{23\pi}{6}$

Уреш.

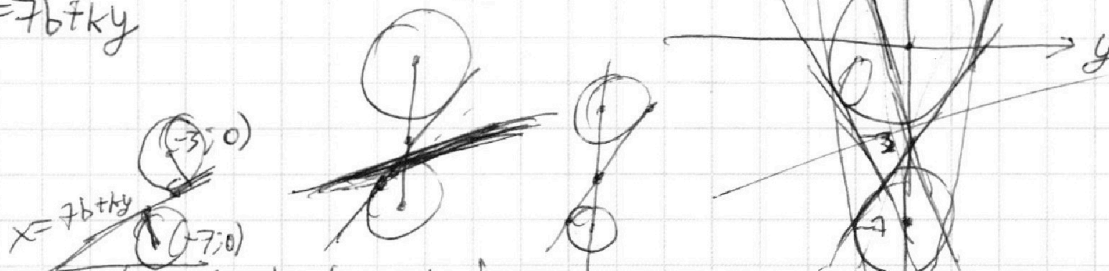
4.) $x + 3ay - 7b = 0$
 $(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$

$x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0$
 $(x+7)^2 + y^2 = 4$



$x = 7b - 3ay \rightarrow 3a = k$

$x = 7b + ky$



$\rho_1 = \frac{|-49b|}{\sqrt{49b^2 + 4}} < 2$
 $\rho_2 = \frac{|-27b|}{\sqrt{49b^2 + 4}} < 2$

$ky - x + 7b = 0$
 $\rho_1 = \frac{|-7b + 7b|}{\sqrt{k^2 + 1}} < 2$
 $\rho_2 = \frac{|-3b + 7b|}{\sqrt{k^2 + 1}} < 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 1) \quad ab &: 2^7 3^{11} 5^{14} \\ bc &: 2^{13} 3^{15} 5^{18} \\ ac &: 2^{14} 3^{17} 5^{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc & \min - ? \\ (abc)^2 &: 2^{34} 3^{43} 5^{75} \\ (abc)^2 &= k \cdot 2^{34} 3^{43} 5^{75} \quad k \in \mathbb{N} \\ abc &= 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \cdot \sqrt{15k} \\ abc &= 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \cdot 3 \cdot 5 \\ abc &= 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38} \end{aligned}$$

$$15k = n^2$$

$$\begin{aligned} k &: 3 \\ k &: 5 \end{aligned}$$

$$k = 15$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{37} \cdot \sqrt{15k}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$k = 5 \cdot 3^8 \cdot e$$

$$15k = 5^{11} \cdot 3^{8+1} \cdot e$$

$$\frac{11}{2} \geq 6 \quad L \geq 11$$

$$L=11, B=1, e=1$$

$$a = 2^{11} \cdot 3^{B_1} \cdot 5^{D_1} \cdot 9_1$$

$$b = 2^{12} \cdot 3^{B_2} \cdot 5^{D_2} \cdot 9_2$$

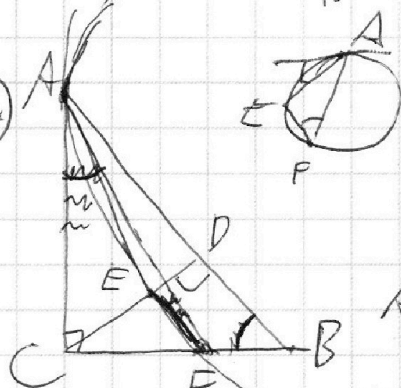
$$c = 2^{13} \cdot 3^{B_3} \cdot 5^{D_3} \cdot 9_3$$

$$k_1 + k_2 + k_3 \geq 11$$

$$B_1 + B_2 \geq 11$$

$$D_1 + D_2 \geq 14$$

2)



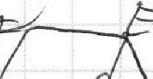
$$\begin{aligned} AB \parallel EF \\ AB : BD = 1 : 3 \end{aligned}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AC \cdot AD}{CF \cdot CE}$$

$$\frac{CF - CE}{BC - CD}$$

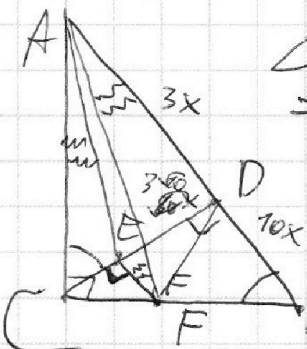
$$\begin{aligned} AB &= 13x \\ BD &= 10x \end{aligned}$$



$$\frac{CF}{CE} = \frac{BC}{CD}$$

$$CF = \frac{BC \cdot CE}{CD}$$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BC - CF}$$



$$\begin{aligned} \angle CAE &= \angle EFA = \\ &= \angle FAB \end{aligned}$$

$$\angle ACD = \angle CBA$$

$$\angle AED = \angle AFC$$

$$\triangle ADE \sim \triangle AFC$$

$$\frac{AF}{ABE} = \frac{AC}{AD} = \frac{FC}{AE}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{FC}{AE}$$

$$\triangle ACE \sim \triangle ABF$$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BF}$$

$$\triangle ACF \sim \triangle ADE$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CF}{DE} = \frac{AF}{AE}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{AC \cdot AD \cdot CD}{CE^2 \cdot BC}$$

$$AC \cdot BC - AC \cdot CF = AB \cdot CE \cdot CE$$

$$\frac{AC \cdot BC}{CE} - AC \cdot \frac{BC}{CD} = AB; \quad AB + \frac{AC \cdot BC}{CD} = \frac{AC \cdot BC}{CE}$$

$$\frac{AB}{AC \cdot BC} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{CE}$$