МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

I число a: $a = 2^{\alpha_a} \cdot 3^{\beta_a} \cdot 5^{\gamma_a}$

b: $b = 2^{\alpha_b} \cdot 3^{\beta_b} \cdot 5^{\gamma_b}$

c: $c = 2^{\alpha_c} \cdot 3^{\beta_c} \cdot 5^{\gamma_c}$, тогда $ab = 2^{(\alpha_a+\alpha_b)} \cdot 3^{(\beta_a+\beta_b)} \cdot 5^{(\gamma_a+\gamma_b)}$

1) • Достаточно, чтобы числа разлагались только на эти 3 простых числа, так как если бы было число a', которое содержало простой множит. ($\neq 2,3,5$), то мы всегда бы нашли a, которое меньше, не содерж. „лишний" простой множ., при этом умен. произв. abc, и которое не влияло бы на делимость.

2) Простые множители независимы, поэтому можно отдельно рассматривать (2), (3), (5) и их степени.

$$\begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \\ \alpha_b + \alpha_c \geq 12 \\ \alpha_a + \alpha_c \geq 14 \end{cases} \text{„+"} \quad 2(\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c) \geq 34 \Rightarrow \alpha_a+\alpha_b+\alpha_c \geq 17$$ ~~(минимально~~ (минимально возможный вариант, иначе одной из пар не хватило бы „2")

Пример: $\alpha_a = 5$; $\alpha_b = 3$; $\alpha_c = 9$ $\Rightarrow$ $\Sigma\alpha = 17$

$$\begin{cases} \beta_a + \beta_b \geq 14 \\ \beta_b + \beta_c \geq 20 \\ \beta_a + \beta_c \geq 21 \end{cases} \quad 2(\beta_a+\beta_b+\beta_c) = 55 \Rightarrow \beta_a+\beta_b+\beta_c = 27{,}5$$, Но у нас числа натуральны $\Rightarrow$ не может быть дробных степеней $(\beta_a; \beta_c; \beta_b) \Rightarrow \min(\beta_a+\beta_b+\beta_c) = 28$

Пример: $\beta_a = 8$; $\beta_b = 6$; $\beta_c = 14$ $\Rightarrow$ $\Sigma\beta = 28$

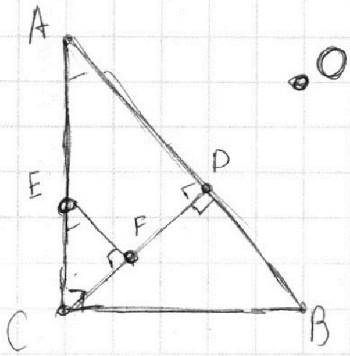
$$\begin{cases} \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \\ \gamma_b + \gamma_c \geq 17 \\ \gamma_a + \gamma_c \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq 34$$; ~~Пример для 34: Q~~

Так как $\gamma_a + \gamma_c \geq 39$, то и вся сумма $\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c \geq 39$

Пример: $\gamma_a = 12$; $\gamma_c = 27$; $\gamma_b = 0$ $\Rightarrow$ $\Sigma = 39$

Ответ: $(abc)_{min} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:
1 2 3 4 5 6 7
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $EF \parallel AB \Rightarrow \angle BAE = \angle FFC$
$\Rightarrow \angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$

2) $\triangle CFE \sim \triangle CDA$ (по 2м угл.)

$\Rightarrow \dfrac{CF}{CD} = \dfrac{EF}{AD}$

$S_{CFE} = CF \cdot EF \cdot \frac{1}{2}$

3) $S_{CFE} = \left(\dfrac{CF}{CD}\right)^2 \cdot S_{CDA}$ (треуг. подобны)

$S_{CDA} = CD \cdot AD \cdot \frac{1}{2}$

4) $S_{ADC} = \dfrac{5}{7} S_{ACB}$, т.к. $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{5}{2}$, а CD – общ. высота.

$\Rightarrow \cancel{S_{CFE} \cdot \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 \cdot \frac{7}{5} S_{ACB}}$ $\left(\dfrac{CD}{CF}\right)^2 \cdot S_{CFE} = \dfrac{5}{7} S_{ACB}$

$\cancel{\dfrac{S_{CFE}}{S_{ACB}}}$ $\dfrac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \left(\dfrac{CD}{CF}\right)^2 \cdot \dfrac{7}{5}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

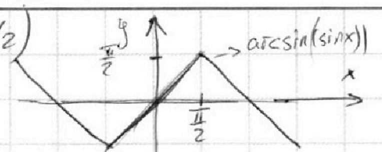
1 2 3☒ 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

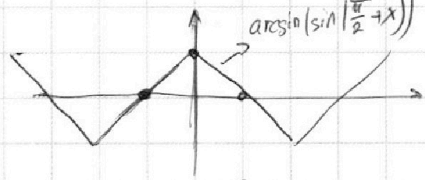
МФТИ

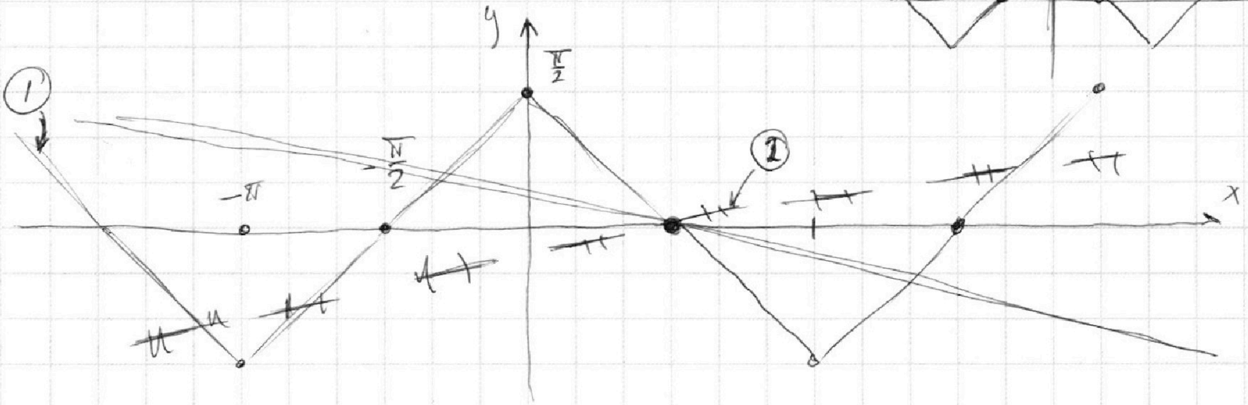
$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$ (лист №1/2)

$10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)=\pi-2x;$



(1) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)=\frac{\pi}{10}-\frac{2}{10}x$ (2)





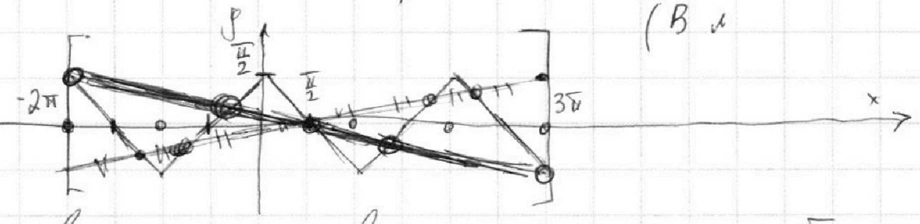
(2): Прямая с ~~цен~~ точкой вращения $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{10}-\frac{2\cdot\frac{\pi}{2}}{10}=0\right)$

и коэф. $\left(-\frac{2}{10}\right)=k$ у прямой.

• Найдем ограничения для x: 1) $\frac{\pi}{10}-\frac{2}{10}x>-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{2}>\frac{2}{10}x \Rightarrow (x<3\pi)$

2) $\frac{\pi}{10}-\frac{2}{10}x<\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{2}<\frac{2}{10}x$; $\Rightarrow (-2\pi<x) \Rightarrow x\in[-2\pi;3\pi]$

(В л



Из графика видно, что уравнение имеет 5 решений, найдем их.

1) $\begin{cases} y=\frac{\pi}{10}-\frac{2}{10}x \\ y_1=-x-\frac{3\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow$ ~~$\frac{\pi}{10}-\frac{2}{10}x=-x-\frac{15\pi}{10}$, $\frac{8}{10}x=-\frac{4\pi}{10} \Rightarrow \left(x=\frac{-4\pi}{8}, y=\ldots\right)$~~

$\frac{\pi}{10}-\frac{2}{10}x=-x-\frac{15\pi}{10}$, $\frac{8}{10}x=\frac{-16\pi}{10}$; $\Rightarrow \left(x=-2\pi;\ y=\frac{\pi}{2}\right)$

~~2) $\begin{cases} y_2=x+\frac{\pi}{2} \\ y=\frac{\pi}{10}-\frac{2}{10}x\end{cases} \Rightarrow x+\frac{\pi}{2}$~~

2) $\begin{cases} y=x+\frac{\pi}{2} \\ y=\frac{\pi}{10}-\frac{2}{10}x\end{cases}$ $x+\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{10}x+\frac{\pi}{10}$; $\frac{12}{10}x=\frac{\pi}{10}-\frac{5\pi}{10}$; $\frac{12x}{10}=\frac{-4\pi}{10}$;

; $\left(x=\frac{-4\pi}{12};\ y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(лист №2/2)

3) Из графика: $\left(x=\frac{\pi}{2};\ y=0\right)$

4) $\begin{cases} y=\frac{\pi}{10}-\frac{2}{10}x \\ y=x-\frac{3}{2}\pi \end{cases}$ $\quad \frac{\pi}{10}-\frac{2}{10}x=x-\frac{3}{2}\pi;\quad \frac{12}{10}x=\frac{\pi+15\pi}{10};\quad 12x=16\pi;$

$x=\frac{16}{12}\pi;\quad y=\frac{16}{12}\pi-\frac{18}{12}\pi=-\frac{2}{12}\pi=-\frac{1}{6}\pi$

5) Из графика $\left(y=-\frac{\pi}{2};\ x=3\pi\right)$

Ответ: $\left(x=-2\pi;\ y=\frac{\pi}{2}\right);\ \left(x=\frac{-\pi}{3};\ y=\frac{\pi}{6}\right);\ \left(x=\frac{\pi}{2};\ y=0\right);$
$;\ \left(x=\frac{4}{3}\pi;\ y=\frac{-1}{6}\pi\right);\ \left(x=3\pi;\ y=\frac{-\pi}{2}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

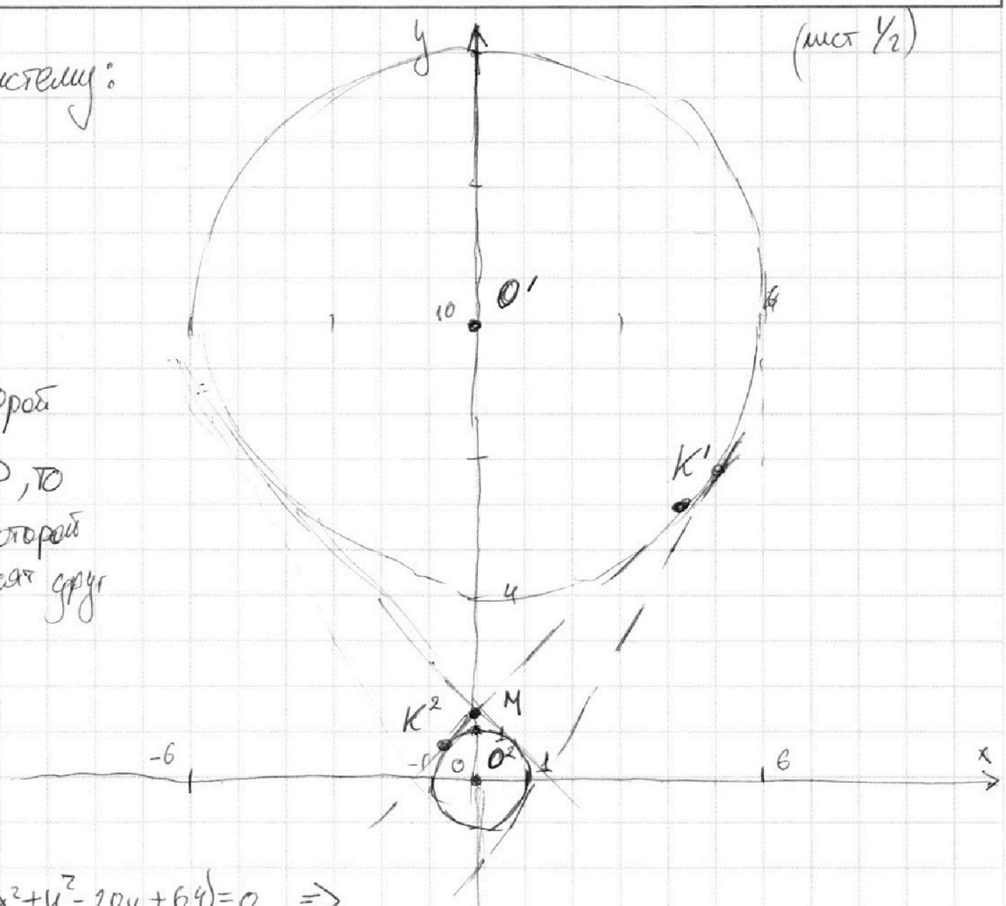
(лист 1/2)

• Нарисуем систему:

2) $ax-3y+4b=0$

$\frac{ax+4b}{3}=y$

$y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$ -
- прямая, у которой
$k=\frac{a}{3}$; $b'=\frac{4}{3}b$, то
есть прямая у которой
k и b' не зависят друг
от друга.



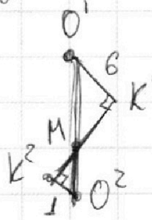
1) $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0$ =>

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-20y+100=36 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \text{ - Окр. с цент. } (0;0)\ R=1 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \text{ - Окр. с ц. } (0;10);\ R=6 \end{array}\right.$

• Вернемся к прямой; (Ещё всё симм. отн. OY, поэтому для отриц $\left(\frac{a}{3}\right)$ будет один.)
• пока в рассужд. $k>0$

Найдем общую касательную к окружност. (Есть внешн. и внутр.)

1) Внутр.



$\triangle O'K'M \sim \triangle O^2K^2M$ $\left(\begin{array}{l} \angle O'K'M = \angle MK^2O^2 = 90^\circ \\ \angle K^2MO^2 = \angle K'MO' \text{ (верт.)} \end{array}\right)$

$\Rightarrow \frac{O'M}{O^2M}=\frac{O'K'}{O^2K^2}=\frac{6}{1}=6;\quad O'M=6\,O^2M$

При этом $O'O^2=10$; $\Rightarrow 7O^2M=10$; $O^2M=\frac{10}{7}$

$O'M=\frac{60}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

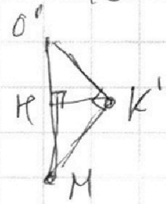
(лист 2/2)

• ~~возьмём т. M и проведём касательные к большой окр.~~

~~$y_K = k^k x + b^k$; Найдём коор~~

$MK' = \sqrt{MO'^2 - O'K'^2} = \sqrt{\frac{3600}{49} - 36} = \sqrt{\frac{36\cdot 100 - 36\cdot 49}{49}} = \sqrt{\frac{36\cdot 51}{49}}$

• Опустим из т. K' перп. на $O'M$ =>



=> $K'H \cdot O'M = MK' \cdot O'K'$ ($S_{прям.треуг.}$)

$K'H = \frac{MK' \cdot O'K'}{O'M} = \frac{\frac{6}{7}\sqrt{51}\cdot 6}{\frac{60}{7}} = \frac{36}{60}\sqrt{51}$; -> коорд. $K'\left(\frac{6}{10}\sqrt{51}; y_{K'}\right)$ (по x)

• Так как треуг подобны, но K' и K^2 по разные стороны отн OY => $K^2\left(-\frac{\sqrt{51}}{10}; y_{K_2}\right)$ (длина по x в 6 раз меньше k=6 и с противоп. знаком)

$y_{K2} = \sqrt{1 - \frac{51}{100}} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10}$; $K^2\left(\frac{-\sqrt{51}}{10}; \frac{7}{10}\right)$

• Построим уравнение прямой; $y = k^k x + b^k$

$$\begin{matrix} т.K^2 \\ т.M \end{matrix}\begin{cases} \frac{7}{10} = k^k \cdot \frac{-\sqrt{51}}{10} + b^k \\ \frac{10}{7} = b^k \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{10} - \frac{10}{7} = k^k \cdot \left(\frac{-\sqrt{51}}{10}\right); \quad \frac{49-100}{70} = \frac{-\sqrt{51}}{10}k^k$$

$$\frac{-51\cdot 10}{-\sqrt{51}\cdot 70} = \frac{\sqrt{51}}{7} = k^k$$

2) Внешн. касательная, у нее k^k всегда будет входить в рамки внутр. (видно из рисунка, что $|k^k_{внеш}| > |k^k_{внутр}|$)

• Внутр. касательная оптимальна (она является границей), т.к. если k^k будет меньше, то тогда 4 решений не будет (т.к. прямая уже не будет касаться какой-нибудь из окр. => реш. < 4)

• Если k^k больше, то всегда будет 4 реш.; $k^k = \frac{a}{3}$; $a = 3k^k = 3\frac{\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{7}\sqrt{51}\right) \cup \left(\frac{3}{7}\sqrt{51}; +\infty\right)$ (* т.к. симм. отн OY)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(ОДЗ: $x>0$; $x \neq \frac{1}{2}$)

~~$\log_5^4(2x)$~~ (1) $t=\log_5 2x$; $t^4 - 3\frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{3}{4}t} - 3$; $t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3t} + 3 = 0$;

$t^4 - \frac{9+4}{3t} + 3 = 0$; $\frac{3t^5 - 13 + 9t}{3t} = 0$; $t \neq 0$ (ОДЗ)

$3t^5 + 9t = 13$; $t(3t^4+9) = 13$; 1) Если $t<0$, то $t(3t^4+9)<0 \Rightarrow \varnothing$
2) Если $t>0$, то реш. ед., т.к. $t(3t^4+9)$ – монотон. возраст.

$\Rightarrow t$ - ед. реш. $\Rightarrow x$ - ед. реш.
(т.к. они взаимно обратны.) При этом $t>1$

(2) $u=\log_5 y$: $u^4 + 4\cdot\frac{1}{u} = -\frac{1}{3u} - 3$; $u^4 + \frac{4}{u} + \frac{1}{3u} + 3 = 0$;

$u^4 + \frac{12+1}{3u} + 3 = 0$; $\frac{3u^5+13+9u}{3u} = 0$; $u \neq 0$; ОДЗ: $y>0$; $y \neq 1$

$3u^5 + 9u = -13$; $3u(u^4+3) = -13$; 1) $u>0 \Rightarrow 3u(u^4+3)>0 \Rightarrow \varnothing$
2) $u<0$ - то реш. ед., т.к. $3u(u^4+3)$ - монот. ~~возр.~~ убыв.

$\Rightarrow u$ - ед. реш. $\Rightarrow y$ - ед. реш.
При этом $u<-1$

3) xy - ед. вариант; $\log_5 2x = t$; $2x = 5^t$; $x = \frac{5^t}{2}$
$\log_5 y = u$; $y = 5^u$ $\Rightarrow xy = \frac{5^{(t+u)}}{2}$

4) $3(t^5+u^5) + 9(u+t) = 0$; $3(t^5+u^5) = -9(u+t)$; $\left(\frac{3}{-9} = \frac{(u+t)}{(u^5+t^5)}\right)$

- Обе функции имеют один. знак, т.к. $\begin{pmatrix} t>1 \\ u<-1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $u+t>0 \Rightarrow t^5+u^5>0$
$\Rightarrow$ $u+t<0 \Rightarrow t^5+u^5<0$
• Но у нас $=0$

$\Rightarrow (u+t) = 0$

$\Rightarrow xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1) $5\Delta x + \Delta y = 45 \Rightarrow \Delta y = y_2 - y_1 \vdots 5$

(2) $\Rightarrow$ 10 комбинаций $\Delta x = x_2 - x_1 = 0 \ldots 9$ $\Delta y = 45 \ldots \Delta y = 0$

3) Заметим, что в 17 из 81 строчках доступны все ~~81~~ (16+18) чисел, тогда как в остальных только ~~80~~ (16+18−1)

$\Rightarrow$ (1) $\Delta y = 0$; $\Delta x = 9 \Rightarrow \left(17 \cdot C_{34}^{9} + (81-17) \cdot C_{33}^{9}\right) / 2$ (т.к. порядок важен)

формула

(2) $\Delta y = 5$; $\Delta x = 8 \Rightarrow$ Прямоуг. $\left(\left(18+16-1\right) \times 5\right)$ их 17.

$17 \cdot (C$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

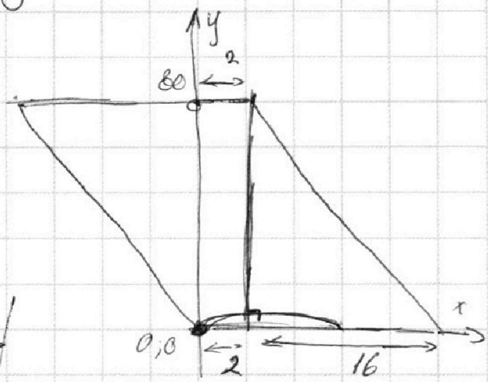
Черновик

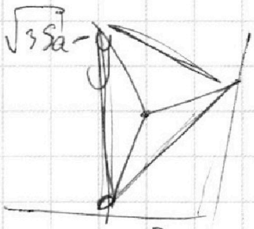
1) $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$, $5\Delta x + \Delta y = 45$

$\Rightarrow \Delta y \vdots 5$, т.к. $\begin{cases} 5\Delta x \vdots 5 \\ 45 \vdots 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta y = 0$; $\Rightarrow \Delta x = 9$;
$\Delta y = 5$; $\Rightarrow \Delta x = 8$
$\vdots$
$\Delta y = 45$; $\Rightarrow \Delta x = 0$

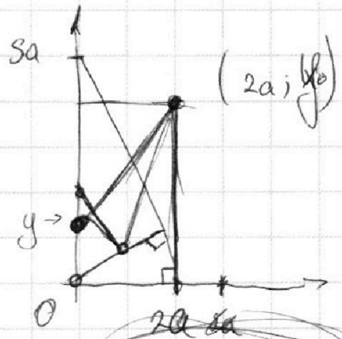
10 комбинаций;





S = M.

1)



$(2a; y_0)$;

$4a^2 + y^2 = \cancel{R^2} \Rightarrow \cancel{R = \sqrt{4a^2+y^2}}$

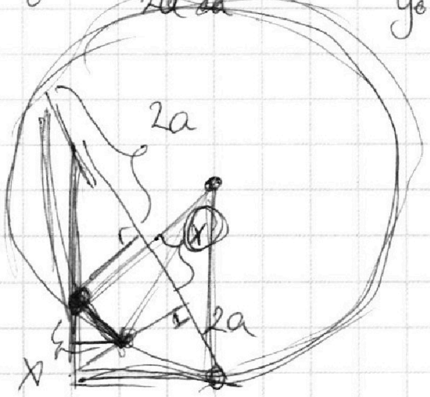
$(x-2a)^2 + (y-y_0)^2 = y_0^2$

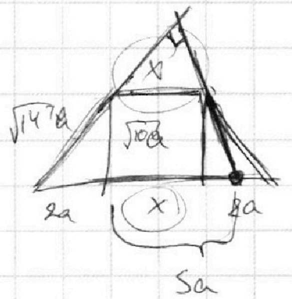
$y_0^2 = (2a)^2 + (y-y_0)^2$

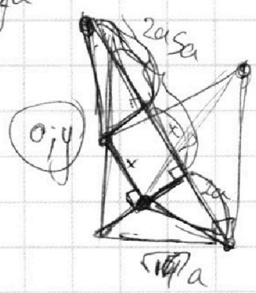
$y^2 - 2yy_0 + 4a^2 = 0$

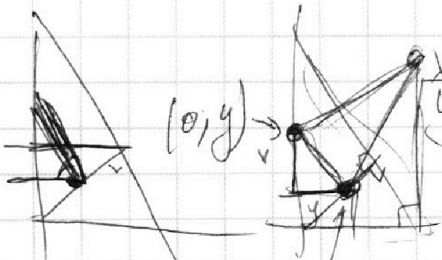
$\cancel{y_0^2} = 4a^2 + y^2 - 2yy_0 + \cancel{y_0^2}$; $D = 4y_0^2 - 16a^2$

$y = \frac{2y_0 + \sqrt{D}}{2}$









$\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$

$(-; =)$

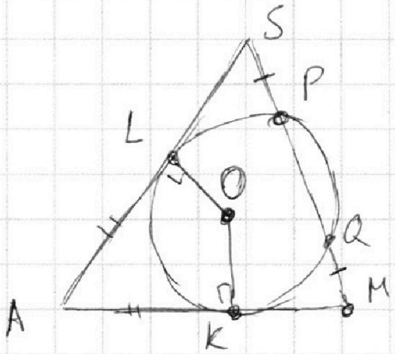
$2(0 - -) = 5(y - =)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



а) • Рассмотрим (SAM)

~~ОК ⊥ ОК~~

1) AS и AM – касат. к шару =>

$AL = AK$

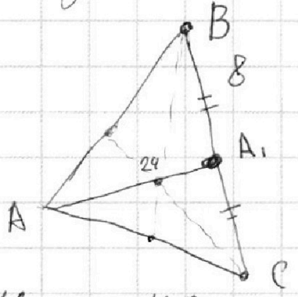
2) $SL^2 = SP \cdot SQ = PQ \cdot QM = KM^2$

=> $MK = LS$ (касат. и сек. к окр.)

3) $AS = AM = 16$

4) ~~Медиана делит~~ т. M делит AA_1 в отн 2:1 счит. от верш.
(т. M – т. пересеч. медиан.)

=> $MA' = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$ => $AA' = 24$



5) $S_{ABC} = 100 = \frac{1}{2} \sin \angle AA'B \cdot AA_1 \cdot BC$

$200 = 24 \cdot 16 \cdot \sin \angle AA'B$

$\sin \angle AA'B = \frac{25}{48}$) $AB^2 = AA_1^2 + BA_1^2 - 2 BA_1 \cdot AA_1 \cdot \cos \angle AA_1B$

$AB^2 = 576 + 64 - 384 \cdot \frac{\sqrt{73 \cdot 23}}{48} = 576 + 64 - 8\sqrt{73 \cdot 23} = 640 - 8\sqrt{73 \cdot 23}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5 $\log_5^4(2x)$ $\log_5 2x = t$; $t^4 - 3\frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{3}{4}t} - 3$; $t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3t} + 3 = 0$

по возраст. монотон.

$t^4 - \frac{(9+4)}{3t} + 3 = 0$; $\frac{3t^5 - 13 + 9t}{3t} = 0$; $t \neq 0$;

$3t^5 + 9t - 13 = 0$; $t = 1$; 3 0 0 0 9 −13

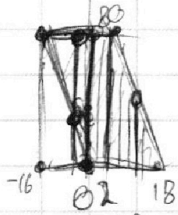
1 3 3 3 3

$t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0$;

$t(t^4 + 3) = \frac{13}{3}$; $\boxed{t\left(\frac{t^4}{3} + 1\right) = 13}$;

$x + \frac{1}{2}$

№6; Колба

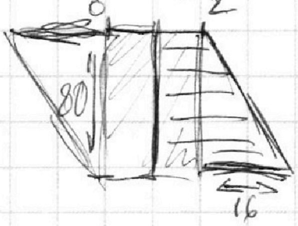


$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$;

$5\Delta x + \Delta y = 45$; $\Delta y \vdots 5$

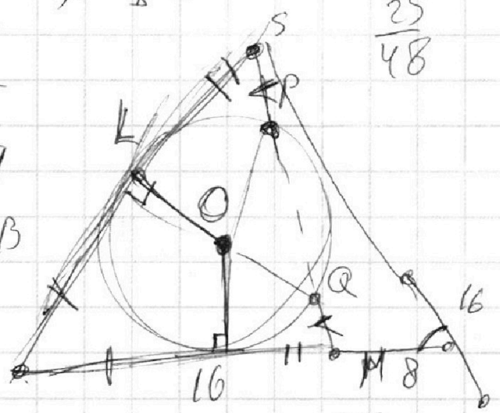
$\Delta x + \frac{\Delta y}{5} = 9$;

$\frac{100}{24 \cdot 16} = \frac{100}{12 \cdot 16}$ $\frac{50}{6 \cdot 16}$ $\frac{25}{3 \cdot 16}$ $\frac{25}{48}$



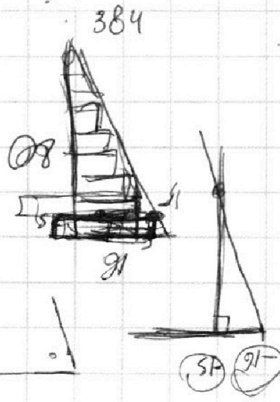
$\sqrt{\frac{48^2 - 25^2}{48^2}}$

№7



$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$;

$\frac{\sqrt{73 \cdot 23}}{4}$



$S = p \cdot$

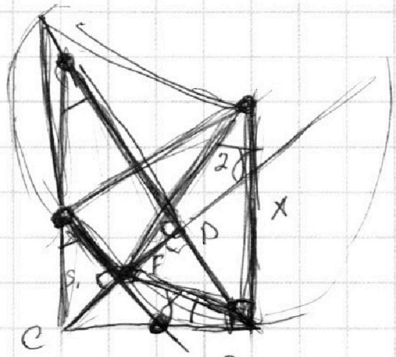
91 : 08

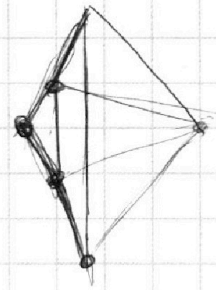
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

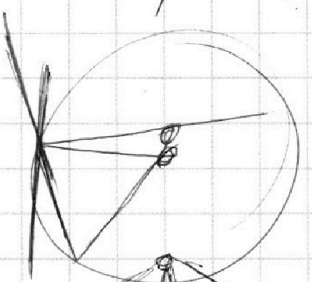
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

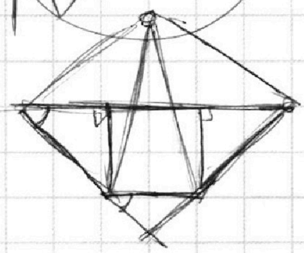
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

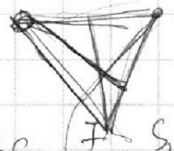
Черновик











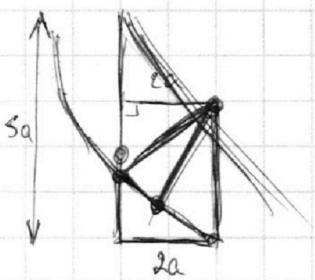
$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{S_1F}{S_1D}\right)^2$$

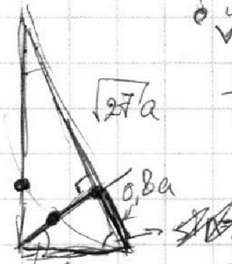
$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{5}{7}$$

$$S_3 = \frac{7}{5} S_2 = \frac{7}{5} \cdot \frac{S_1D^2}{S_1F^2} \cdot S_1$$

$$\frac{CF}{FD} = \frac{CE}{EA}; \quad tg = \frac{5}{2}$$

336 ?



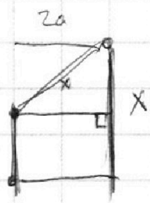


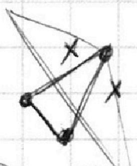
$\sqrt{27}a$

$\sin\alpha = \frac{5}{2}$

$$4 - \frac{64}{100} = \sqrt{\frac{336}{100}} = \frac{\sqrt{336}}{10}$$

$tg = \frac{2}{5}$ $\sin = \frac{2}{\sqrt{27}}$





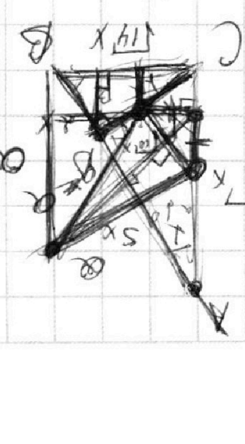
$\sqrt{27}a$

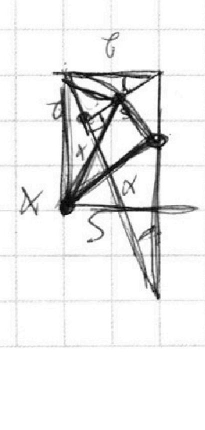
$$DH = \frac{CD \cdot DB}{CB}$$

$$DH \cdot CB = CD \cdot DB$$

$$\frac{DB}{CD} = \frac{CD}{AD}; \quad CD^2 = 10x^2$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{DB}$$





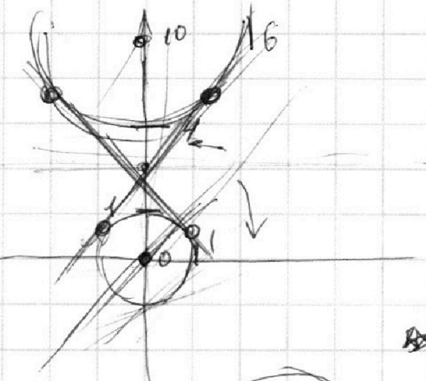
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4



$x^2+y^2-20y+100=36$

$x^2+(y-10)^2=6^2$

$ax-3y+4b=0$

$\cancel{ax=3y}$; $\frac{ax}{3}=y$;

$\frac{ax+4b}{3}=y$;

$\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b=y$

№5;

$\log_5 2x=t$; $2x>0$

$2x\neq 1$

$x\neq\frac{1}{2}$

$t^4-3\frac{1}{t}=\frac{4}{3\frac{1}{4t}}-3$

$625=5^4$; $8x^3=(2x)^3$

$u^4+4\frac{1}{u}=\frac{1}{\frac{1}{3}u}-3$

$\frac{4}{u}+\frac{3}{u}\geq 2\sqrt{\frac{12}{u^2}}=\frac{2\sqrt{12}}{u}$

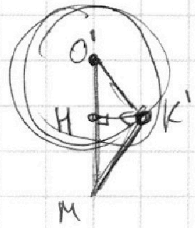
$\log_5 y=u$; $\frac{1}{5}=0{,}2$

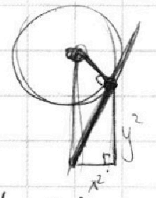
$u^4+\frac{4}{u}+\frac{3}{u}+3=0$;

$u^5+12+3u=0$

$u\neq 0$

u - полож?

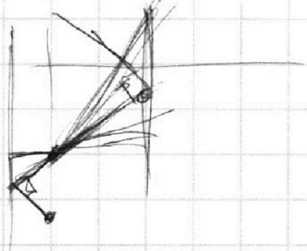


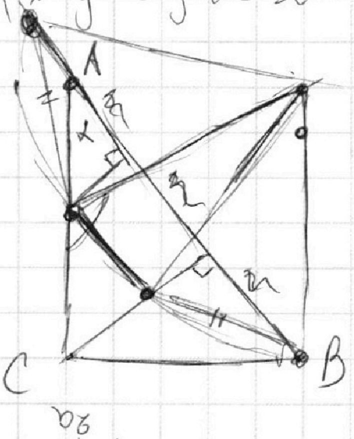


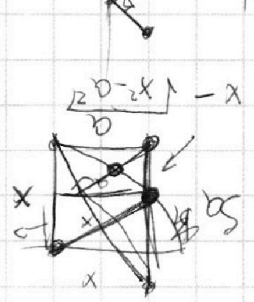
$\sqrt{x^2+y^2}=$ —

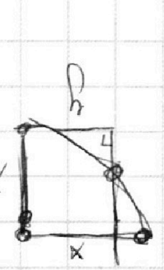
$x^2+y^2=20y+100=36$

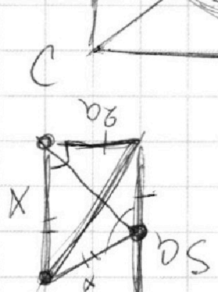
$K'H\cdot O'M=O'K'\cdot MK'$











На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$abc = 2^{8} 3^{14} 5^{12} \cdot c$

$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$ →

$$\begin{cases} \alpha_B + \alpha_C = 12 \\ \alpha_A + \alpha_C = 14 \\ \alpha_A + \alpha_B = 8 \\ \alpha_A + \alpha_B + \alpha_C \to \min \end{cases}$$

17

5+3
3+9
9+5

$34 + 20 + 21 = 34 + 21 = 55$

27,5 - ?

$14 = \frac{1}{2} + 13\frac{1}{2}$

1

arcsin 1

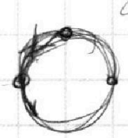
60
18
68

34

48

$\cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$\sin(x)$



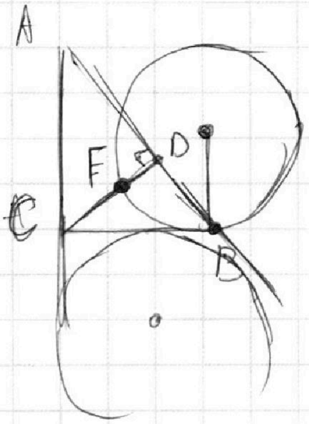
10 4
4 14

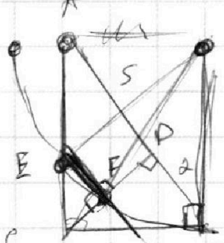
8 6 = 14
6 14 = 20
8 14 = 22

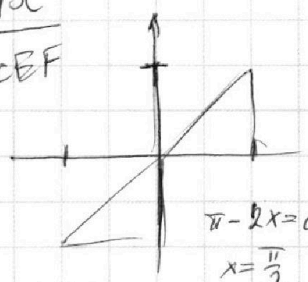
$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$

14; 14

№2; A







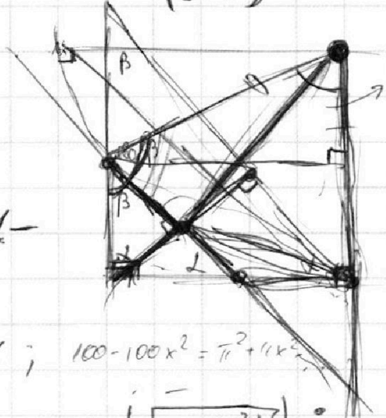
$\pi - 2x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$

$\cos x$

$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

$\frac{5}{7}$



$180 - \gamma$

$\frac{CF}{CD}$ - ?

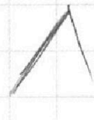
29

№3;

$10\sqrt{1 - x^2} = \pi - 2x$;

$$\begin{cases} 100(1 - x^2) = \pi^2 + 4x^2 - 4\pi x \\ \pi > 2x \end{cases}$$

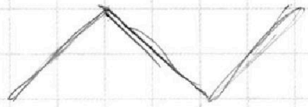
$100 - 100x^2 = \pi^2 + 4x^2$



$\arcsin(\sqrt{1 - \sin^2 x})$;

$\sin(\arcsin x) = x$

$\arcsin(\sin x) = x$



№4;