МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

Задача 1

Пусть $a = 2^{x_1}\cdot 3^{y_1}\cdot 5^{z_1}$, $b = 2^{x_2}\cdot 3^{y_2}\cdot 5^{z_2}$, $c = 2^{x_3}\cdot 3^{y_3}\cdot 5^{z_3}$
(из соображений минимальности abc будем считать, что других простых делителей нет)
Тогда:

$$\begin{cases} x_1+x_2\ge 9\\ x_2+x_3\ge 14\\ x_3+x_1\ge 19\end{cases}\quad \begin{cases} y_1+y_2\ge 10\\ y_2+y_3\ge 13\\ y_3+y_1\ge 18\end{cases}\quad \begin{cases} z_1+z_2\ge 10\\ z_2+z_3\ge 13\\ z_3+z_1\ge 30\end{cases}$$

(как показатели степеней соотв-х множителей в разложениях ab, bc, ca). Сложим нерав-ва в каждой системе:

$2(x_1+x_2+x_3)\ge 42$, $2(y_1+y_2+y_3)\ge 41$, $2(z_1+z_2+z_3)\ge 53$. Тогда

$x_1+x_2+x_3\ge 21$, $y_1+y_2+y_3\ge 21$, $z_1+z_2+z_3\ge 27$
(однако $z_3+z_1\ge 30$, тогда $z_1+z_2+z_3 \ge 30$)

Тогда $abc = 2^{x_1+x_2+x_3}\cdot 3^{y_1+y_2+y_3}\cdot 5^{z_1+z_2+z_3}\ge 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

Что достигается при $a=2^{7}\cdot 3^{7}\cdot 5^{15}$, $b=2^{2}\cdot 3^{3}$, $c=2^{12}\cdot 3^{11}\cdot 5^{15}$

(для таких a, b, c условие задачи выполнено)

Ответ: $\min(abc) = 2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Производим замену $t = x + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\sin t) = t$ Поскольку при любом

z $\arcsin z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $5\arcsin z \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$

Тогда $t \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$

1) $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\quad \arcsin(\sin t) = t$ $\quad 5t = t$
$t = 0$

2) $t \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}]$ $\quad \arcsin(\sin t) = \pi - t$
$5\pi - 5t = t$ $\quad t = \frac{5}{6}\pi \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}]$

3) $t \in [2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin t) = t - 2\pi$
$5t - 10\pi = t$ $\quad t = \frac{5}{2}\pi \in [2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$

4) $t \in [-2\pi + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ $\quad t + 2\pi \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin(\sin t) = \arcsin(\sin(t + 2\pi)) = \pi - (t + 2\pi) = -t - \pi$
$-5t - 5\pi = t$ $\quad t = -\frac{5}{6}\pi \in [-2\pi + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$

5) $t \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, -2\pi + \frac{\pi}{2}]$ $\quad t + 2\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin(\sin t) = \arcsin(\sin(t + 2\pi)) = t + 2\pi$
$5t + 10\pi = t$ $\quad t = -\frac{5}{2}\pi \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, -2\pi + \frac{\pi}{2}]$

$t \in \{-\frac{5}{2}\pi, -\frac{5}{6}\pi, 0, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{2}\pi\}$, $x = t - \frac{\pi}{2}$, тогда

$x \in \{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$

Ответ: $x \in \{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

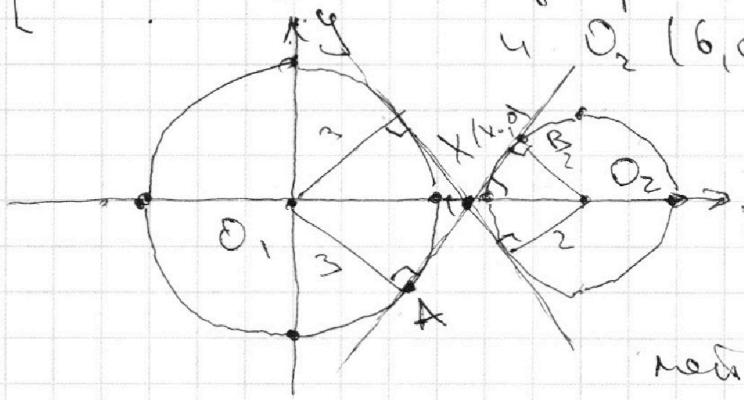
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$ равносильно

$$\begin{cases} ax+2y=3b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

Совокупность задаёт на координатной пл-ти 2 окружности: с центром $O_1(0,0)$ и радиусом $R_1=3$ и $O_2(6,0)$, $R_2=4$



Заметим, что при фиксированном a и меняющемся b 1-е уравнение задаёт семейство параллельн. прямых.

Нетрудно видеть, что любая прямая, угол ~~коэфф~~ ~~коэфф~~ которой лежит между углами ~~коэфф~~ ~~при каждом сдвиге~~ общих касательных данных окр-тей при любом сдвиге пересекает эти окр-ти не более, чем по 2 точкам. В противном случае прямой можно было сдвинуть так, чтобы в пересечении были 4 точки. (1)

Пусть $X(x_0,0)$ — точка пересечения одной из касательных с Ox. Тогда $\triangle AO_1X \sim \triangle BO_2X$ (по 2 углам), ~~откуда~~ тогда $\frac{x_0}{6-x_0}=\frac{O_1X}{O_2X}=\frac{O_1A}{O_2B}=\frac{3}{2}$

Откуда $2x_0=18-3x_0$ $x_0=3,6$

Поскольку AB — касательная к обоим окр., имеем следующее:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Уравнение $x^2+(kx+d)^2-9=0$ имеет единств. реш. $(k^2+1)x^2+2kd+d^2-9=0$

$\frac{D}{4}=k^2d^2-(k^2+1)(d^2-9)=0$ $9k^2-d^2+9=0$
$d^2=9(k^2+1)$

($y=kx+d$ – ур-е прямой (AB)). Также AB проходит через $X(x_0,0)$, тогда

$0=3{,}6k+b$ $b=-3{,}6k$ $b^2=12{,}96k^2$

$3{,}96k^2=9$ $\frac{9\cdot 44}{100}k^2$ $= 9k^2+9$ $=9$

$k_1=-\frac{10}{2\sqrt{11}}$, $k_2=\frac{10}{2\sqrt{11}}$ – угл. коэф-ты общих касательных

Тогда, в соответствии с замечанием (i),

$a\in(k_1,k_2)$, $a\in\left(-\frac{10}{2\sqrt{11}},\frac{10}{2\sqrt{11}}\right)$

Ответ: $a\in\left(-\frac{10}{2\sqrt{11}},\frac{10}{2\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5

Поскольку $\log_{x^2} 243 = \frac{5}{2}\log_x 3$ и

$\log_{25y^2} 3^{11} = \frac{11}{2}\log_{5y} 3$

перепишем систему так:

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 = -8 \\ \log_3^4 5y - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 = -8 \end{cases} \qquad u = \log_3 x, \quad v = \log_3 5y$$

$$\begin{cases} u^4 + \frac{7}{2u} = -8 \\ v^4 - \frac{7}{2v} = -8 \end{cases}$$

Вычтем из 1-го 2-е: $0 = (u-v)(u+v)(u^2+v^2) + \frac{7}{2}\cdot\frac{u+v}{uv} =$

$= (u+v)\left(2(u-v)(u^2+v^2) + \frac{7}{uv}\right) = 0$

Заметим, что из исходных ур-й системы следует: $u<0,\ v>0 \Rightarrow uv<0,\ u-v<0$

Тогда рав-во $\underbrace{uv}_{\vee\, 0}\underbrace{(u-v)}_{\vee\, 0}\underbrace{(u^2+v^2)}_{\vee\, 0} = \underbrace{-\frac{7}{2}}_{\wedge\, 0}$

невозможно, т.к.

2-й множитель никогда не обращается в 0. Тогда $u+v=0$ $\log_3 x + \log_3 5y = 0$

$\log_3(5xy) = 0$ $5xy = 1$ $xy = \frac{1}{5}$

Ответ: $xy = \frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} 2u^4 + \frac{7}{u} = -16 \\ 2v^4 - \frac{7}{v} = -16 \end{cases} \qquad 2(u-v)(u+v)(u^2+v^2) + 7\cdot\frac{u+v}{uv} =$$

$u<0,\ v \geq 0$ $(u+v)\left(2(u-v)(u^2+v^2) + \frac{7}{uv}\right) = 0$

$7\cdot\frac{v-u}{uv} + 2u^4 + 2v^4 = -32 \qquad u-v = \frac{1}{7}(2u^4+2v^4+32)$

$\frac{1}{7}(2u^4+2v^4+32)(u^2+v^2) + \frac{7}{uv} = 0$

~~$f(x) \geq 0$~~ $f'(x) = 8u^3 - \frac{7}{u^2} = 0 \qquad u^5 = \frac{7}{8}$

$\frac{2}{7}\left((u^2+v^2)^2 - 2u^2v^2 + 16\right)(u^2+v^2) + \frac{7}{uv} = 0$

$\underbrace{uv}_{>0}\underbrace{(u-v)}_{>0}(u^2+v^2) = -\frac{7}{2} \qquad \varnothing$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab \,\vdots\, 2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc \,\vdots\, 2^{14} 3^{13} 5^{13}$,
$ac \,\vdots\, 2^{19} 3^{18} 5^{30}$ $\min(abc) - ?$

$a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$, $b = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$, $c = 2^{x_3} 3^{y_3} 5^{z_3}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_2 + x_3 \geq 14 \\ x_3 + x_1 \geq 19 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 13 \\ y_3 + y_1 \geq 18 \end{cases}$ $\begin{cases} z_1 + z_2 \geq 10 \\ z_2 + z_3 \geq 13 \\ z_3 + z_1 \geq 30 \end{cases}$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 21$, $y_1 + y_2 + y_3 \geq 21$, $z_1 + z_2 + z_3 \geq 30$

$x_1 - x_3 = -5$ $x_3 = x_1 + 5$ $2x_1 + 5 = 19$ $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, $x_3 = 12$

$y_3 = y_1 + 4$ $2y_1 + 4 = 18$ $y_1 = 7$, $y_2 = 3$, $y_3 = 11$

$z_3 = z_1 + 4$ $z_1 = 15$, $z_3 = 15$, $z_2 = 0$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ $(a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}, b = 2^2 \cdot 3^3, c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15})$

Задача 3

$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$

$5 \arcsin t \in [-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$

$5 \arcsin(\sin t) = t$ $t \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin f = \arcsin(\pi - f)$

1) $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin t) = t$ $5t = t$ $t = 0$

2) $t \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin t) = \pi - t$ $5\pi - 5t = t$ $t = \frac{5}{6}\pi$

3) $t \in [2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin t) = t - 2\pi$ $5t - 10\pi = t$ $t = \frac{5}{2}\pi$

4) $t \in [-2\pi + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin t) = -t - \pi$ $-5t - 5\pi = t$ $t = -\frac{5}{6}\pi$

$\arcsin(\sin t) = \arcsin(\sin(t + 2\pi)) = \pi - t - 2\pi = -t - \pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5) $t \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, -2\pi + \frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin t) = \arcsin(\sin(t+2\pi)) =$
$= t + 2\pi$ $5t + 10\pi = t$ $t = -\frac{5}{2}\pi$ $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x = t - \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow x \in \{-3\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$

Задача 4

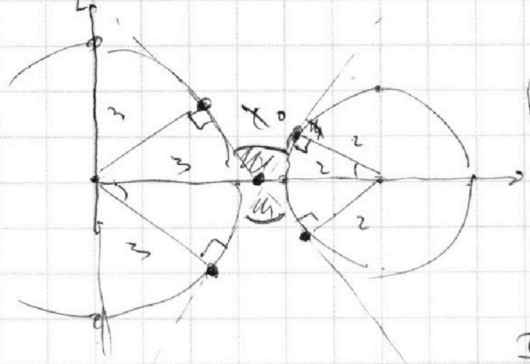
а: $\exists b$: $\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32) = 0 \end{cases}$ 4 реш.

$396 = 3 \cdot 132 = 9 \cdot 44$

$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}ax + \frac{3}{2}b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2 = 9 \quad \text{- окр. } O_1(0,0), R=3 \\ (x-6)^2+y^2 = 4 \quad \text{- окр. } O_2(6,0), R=2 \end{array}\right. \end{cases}$

$36 \cdot 36$: $216 + 108 = 1296$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 9 \\ y = kx + b \end{cases}$ $y = kx + b$ $\begin{cases} (x-6)^2+y^2 = 4 \\ y = kx + b \end{cases}$



$(k^2+1)x^2 + 2kbx + b^2 - 9 = 0$

$\frac{D}{4} = k^2b^2 - (k^2+1)(b^2-9) = 9k^2 - b^2 + 9 = 0$

$b^2 = 9(k^2+1)$

$(k^2+1)x^2 + 2(kb-6)x + b^2 + 32 = 0$

$\frac{D}{4} = k^2b^2 - 12kb + 36 - k^2b^2 - 32k^2 - b^2 - 32 =$

$= -32k^2 - b^2 - 12kb + 4 = 0$, $b^2 = 9(k^2+1)$

$34k^2 + 9k^2 + 12kb + 5 = 0$ $48k^2 + 12kb + 5 = 0$

$32k^2 + b^2 + 12kb - 4 = 0$

$\frac{D}{4} = 36b^2 - 32(b^2-4) = 4b^2 + 4 \cdot 32 = 4(b^2+32)$

$\frac{x_0}{6-x_0} = \frac{3}{2}$ (из подобия) $2x_0 = 18 - 3x_0$

$x_0 = \frac{18}{5} = 3{,}6$

$y = kx + b$, $0 = 3{,}6k + b$ $b = -3{,}6k$ $y = kx - 3{,}6k$

$12{,}96k^2 = 9k^2 + 9$ $3{,}96k^2 = 9$

$k = \pm\frac{3 \cdot 10}{3\sqrt{43}} = \pm\frac{10\sqrt{43}}{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5

$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$ $x>0,\ x\ne 1$ $xy - ?$ $y>0,\ y\ne \frac{1}{5}$

$\log_{x^2} 243 = \frac{5}{2}\log_x 3$ $\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 = -8$

$\log_{25y^2}(3^{11}) = \frac{11}{2}\log_{5y} 3$ $\log_3 x = u$

$\log_3^4(5y) - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 = -8$ $\log_3 5y = v$

$\log_3(5xy) = \log_3(5y) + \log_3 x$ $u+v-?$

$\begin{cases} u^4 + \frac{7}{2}\frac{1}{u} = -8 \\ v^4 - \frac{7}{2}\frac{1}{v} = -8 \end{cases}$ $u^4 - v^4 + \frac{7}{2}(u+v) =$
$= (u-v)(u+v)(u^2+v^2) + \frac{7}{2}(u+v) =$
$= (u+v)((u-v)(u^2+v^2) + \frac{7}{2}) = 0$

$u-v = -\frac{2}{7}(u^4+v^4+16)$

$u^4+v^4+\frac{7}{2}(u-v) = -16$ $-\frac{2}{7}(u^4+v^4+16)(u^2+v^2)+\frac{7}{2}$

$(u^4+v^4+16)(u^2+v^2) = \frac{49}{4}$ $12 < \frac{49}{4} < 13$ $=0$

$\begin{cases} 2u^4+7u = -16 \\ 2v^4-7v = -16 \end{cases}$ $(u+v)(2(u-v)(u^2+v^2)+7) = 0$

$u^3 + \frac{8}{u} = -\frac{7}{2}$ $-(2u^3+\frac{16}{u}) = 7$ $f'(x) = 8x^3+7$
$g'(x) = 8x^3-7$

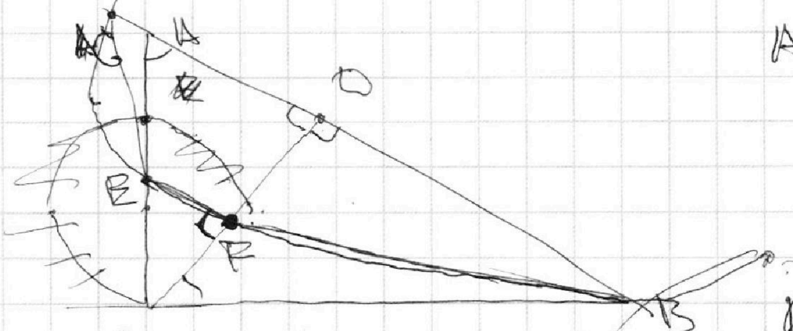
$f(u) = g(v) = 0$

$f(x) = 2x^4+7x+16$
$g(x) = 2x^4-7x+16$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

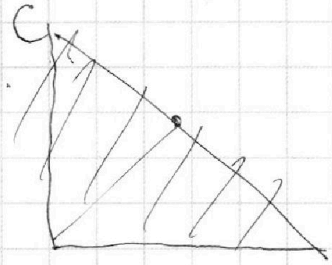


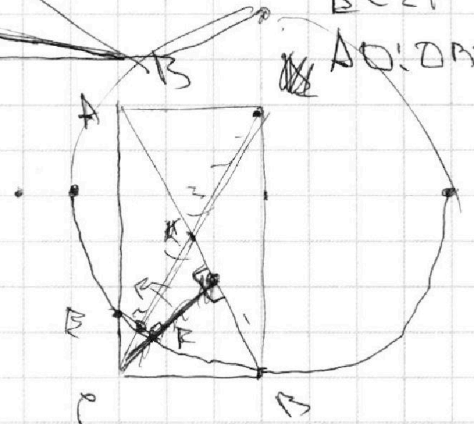
$AB \parallel EF$, $AD:DB = 3:1$

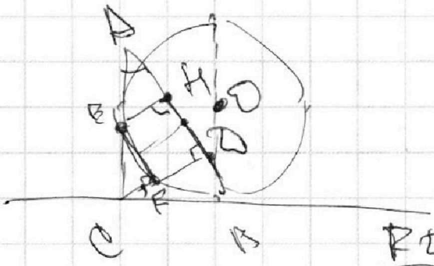
$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$ − ?

$\triangle CEF \overset{k}{\sim} \triangle CDA$ AD

$AD:DB = 3:1 \Rightarrow$







$\triangle ADC \sim \triangle AOB$

$\frac{FD}{AB} = \frac{AH}{AE} = \frac{CD}{AC}$

$AD = \frac{3}{4} AB$, $DB = \frac{1}{4} AB$ $= \frac{DB}{BC}$

$k = \frac{EF}{AD}$ $BC = a$

P