МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ $\quad bc \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$ $\quad ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$\exists$ степень вхожд 2 в $a = \alpha$, в $b = \beta$, в $c = \gamma$

тогда имеем

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 8 & (\text{т.к.} \vdots 2^8) \\ \beta+\gamma \geq 12 & (\text{т.к.} \vdots 2^{12}) \\ \alpha+\gamma \geq 14 & (\text{т.к.} \vdots 2^{14}) \end{cases} \xRightarrow[\text{систему}]{\text{складыв.}} \alpha+\beta+\gamma \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$$

– достигается при $\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 9 \end{cases}$

переопределим α, β, γ как соотв степени вхожд 3

тогда имеем

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 14 \\ \beta+\gamma \geq 20 \\ \alpha+\gamma \geq 21 \end{cases} \xRightarrow[\text{систему}]{\text{складыв.}} \alpha+\beta+\gamma \geq \frac{14+20+21}{2} = 7+10+10{,}5 = 27{,}5$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma \geq 28$, достигается при $\begin{cases} \beta = 6 \\ \alpha = 8 \\ \gamma = 14 \end{cases}$

аналогично переопределим α, β, γ как степени вхожд 5

имеем:

$$\begin{cases} \alpha+\beta \geq 12 \\ \beta+\gamma \geq 17 \\ \alpha+\gamma \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma \geq \alpha+\gamma = 39$$

$\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

, достигается при $\begin{cases} \alpha = 17 \\ \gamma = 22 \\ \beta = 0 \end{cases}$

т.о. $abc \vdots 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$,

рав-во достигается при:

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$

$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0$

$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$

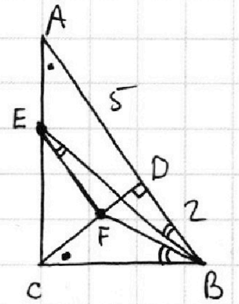
Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

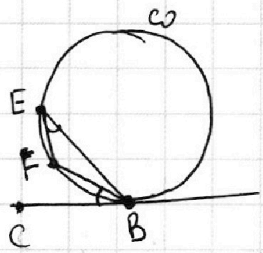
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





обозначим окр-ть из условия за ω

ω кас (CB) $\Leftrightarrow$ $\angle FBC$ опир на $\smile BF$

$\Leftrightarrow B\hat{E}F = F\hat{B}C = \frac{\smile BF}{2}$

$\measuredangle \triangle ABC$ $F\hat{B}C = B\hat{E}F$

по усл $(EF) \parallel (AB) \Rightarrow F\hat{E}B = E\hat{B}A$ $\Bigg| \Rightarrow$

$D\hat{C}B = 90^\circ - \hat{B} = \hat{A}$

Обозн: S_{XYZ} – площадь треуг XYZ для некотор $X\,Y\,Z$

$\Rightarrow \triangle BEA \sim \triangle BFC$ (по 2м углам) $(*)$

$\exists \ \frac{|CE|}{|CA|} = k.$

$\exists \ |AD| = 5, \ |BD| = 2$ (с точностью до отношений можно пренебречь коэффициентами, т.е. вместо $5x, 2x, x \in \mathbb{R}$ рассм 5 и 2)

$|CD| = \sqrt{|BD| \cdot |AD|} = \sqrt{10}$ (св-во прямоуг. Δ)

$|CB| = \sqrt{|DB|^2 + |DC|^2} = \sqrt{4+10} = \sqrt{14}$

$|AC| = \sqrt{|DC|^2 + |DA|^2} = \sqrt{25+10} = \sqrt{35}$

тогда $|CE| = k \cdot |AC| = k\sqrt{35}$

по теор Фалеса: $(EF) \parallel (AD) \Rightarrow \frac{|CF|}{|CD|} = k \ \left(= \frac{|CE|}{|CA|} \right)$

т.о. $|CF| = k \cdot |CD| = k\sqrt{10}$

$|EA| = |AC| \underset{\text{минус}}{-} |CE| = (1-k)\sqrt{35}$

$(*) \Rightarrow \frac{|EA|}{|CF|} = \frac{|AB|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{(1-k)\sqrt{35}}{k\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{k} - 1\right) \cdot \frac{\cancel{\sqrt{7}}}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{7}}^{\,1}}{\sqrt{14}\,\cancel{\sqrt{7}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{k} - 1\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

$(EF) \parallel (AD) \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$ (по углам $C\hat{E}F = C\hat{A}D$ и $C\hat{F}E = C\hat{D}A$)

$\Rightarrow S_{CEF} = \left(\frac{|CE|}{|CA|}\right)^2 \cdot S_{CAD} = k^2 S_{CAD} = \frac{1}{4} S_{CAD}$

$\triangle CAD \sim \triangle ABC$ (св-во прямоуг Δ) $\Rightarrow S_{CAD} = \left(\frac{|AC|}{|AB|}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{35}{49} S_{ABC}$

т.о. $S_{CEF} = \frac{1}{4} \cdot S_{CAD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cancel{35}\,5}{\cancel{49}\,7} S_{ABC} = \frac{\cancel{35}\,5}{\cancel{196}\,28} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \cancel{196}\,\frac{28}{5}$

Ответ: $\frac{28}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Р.у. $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x \Leftrightarrow 5(\pi - 2\arccos(\cos x)) = \pi - 2x$

$\Leftrightarrow 5\pi - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$

$\sphericalangle \arccos(\cos x) = f(x)$

$\exists x = 2\pi k + y$, где $y \in [0;\pi]$

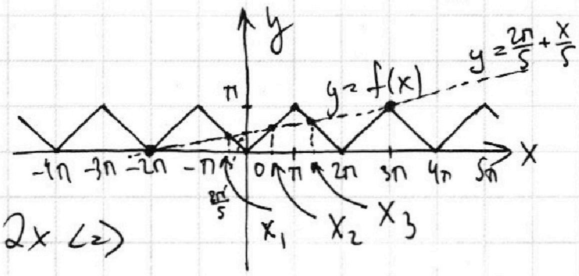
тогда $f(x) = \arccos(\cos y) = y$

$\exists x = 2\pi k + \pi + y,\ y \in (0;\pi)$

тогда $f(x) = \arccos(\cos(\pi + y)) = \arccos(-\cos y) \overset{\text{св-во arccos}}{=}$

$= \pi - \arccos(\cos y) = \pi - y$

т.о. $f(x)$ выглядит след. образом:



исходное ур-ние $\Leftrightarrow 5\pi - 10f(x) = \pi - 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{4\pi + 2x}{10} = \frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}$

По графику: корни: -2π, 3π, x_1, x_2, x_3

$-x_1 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_1}{5} \Leftrightarrow \frac{6x_1}{5} = \frac{-2\pi}{5} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-\pi}{3}$

$x_2 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_2}{5} \Leftrightarrow \frac{4x_2}{5} = \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{2}$

~~$\frac{10\pi}{5} - x_3 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_3}{5}$~~

$2\pi - x_3 = \frac{2\pi}{5} + \frac{x_3}{5} \Leftrightarrow \frac{8\pi}{5} = \frac{6x_3}{5} \Leftrightarrow x_3 = \frac{4\pi}{3}$

исходя из того какие прямые f пересекает прямая $y = \frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}$

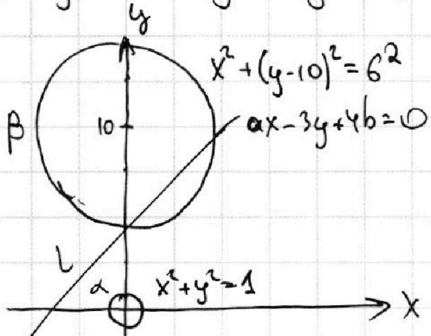
Ответ: $\left\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \end{array}\right. \end{cases}$$



чтобы система имела 4 реш, необходимо чтобы прямая $l: ax-3y+4b=0$ имела по 2 пересеч с каждой из окр-тей $\alpha: x^2+y^2=1$ и $\beta: x^2+(y-10)^2=6^2$

т.к. окр-ти не пересекаются, это еще и достаточное условие

l имеет 2 общие точки с $\beta \Leftrightarrow \rho(\overset{\text{центр } \beta}{(0;10)}; l) < 6$ (*2)

l имеет 2 общ т. с $\alpha \Leftrightarrow \rho(\overset{\text{центр } \alpha}{(0;0)}; l) < 1$ (*1)

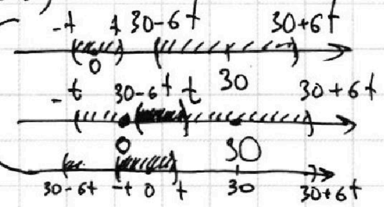
т.о. осталось найти такие a и b, что выполнено (*1) и (*2)

$\rho((x;y); l) = \dfrac{|ax-3y+4b|}{\sqrt{a^2+9}}$, для любых x и y, по формуле расст. до прямой

т.о. имеем $\begin{cases} \dfrac{|-3\cdot 10+4b|}{\sqrt{a^2+9}} < 6 \\ \dfrac{|4b|}{\sqrt{a^2+9}} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4b-30| < 6\sqrt{a^2+9} \\ |4b| < \sqrt{a^2+9} \end{cases}$

$t = \sqrt{a^2+9} \Leftrightarrow t>0$ $\begin{cases} |4b-30| < 6t \\ |4b| < t \end{cases} \Leftrightarrow$

$t>0$ $\begin{cases} 4b-30 \in (-6t; 6t) \\ 4b \in (-t; t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b \in (30-6t; 30+6t) \\ 4b \in (-t; t) \end{cases}$



для b есть реш, когда $30-6t < t$ (тогда интервалы $(30-6t; 30+6t)$ и $(-t;t)$ пересекаются)

$30-6t < t \Leftrightarrow 7t > 30$ $t > \frac{30}{7} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+9} > \frac{30}{7} \Leftrightarrow a^2 > \frac{900-441}{49} = \frac{459}{49}$

$\Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_5^4 2x - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{\ln 625}{\ln 8x^3} - 3 \Leftrightarrow \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4\ln 5}{3\ln 2x} - 3$

$a=\log_5 2x$ $\Leftrightarrow$ $a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a^5+3a-3-4/3=0 \Leftrightarrow 3a^5+9a-13=0$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3 \overset{b=\log_5 y}{\Leftrightarrow} b^4+\frac{4}{b} = \frac{\ln 1/5}{\ln y^3} - 3$

$\Leftrightarrow b^4+\frac{4}{b} = \frac{-\ln 5}{3\ln y} - 3 \Leftrightarrow b^4+\frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3b^5+9b+13=0$

т.о имеем

$(*)\begin{cases} 3b^5+9b+13=0 \\ 3a^5+9a-13=0 \end{cases}$

$f(x) = 3x^5+9x-13$

$y=3x^5 \uparrow \mathbb{R}$

$y=9x \uparrow \mathbb{R}$

$y=-13=const$

$\Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$ как сумма возраст. $\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, f – непр $\Rightarrow E(f)=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f(x)=0$ имеет 1 корень (обозн его x_0)

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(a)=0 \\ 3\cdot(-b)^5+9\cdot(-b)-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a)=0 \\ f(-b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x_0 \\ -b=x_0 \end{cases} \Rightarrow a+b=0$

$\Leftrightarrow \log_5 2x + \log_5 y = 0 \Leftrightarrow \log_5 2xy = 0 \Leftrightarrow 2xy=1 \Leftrightarrow xy = 1/2$

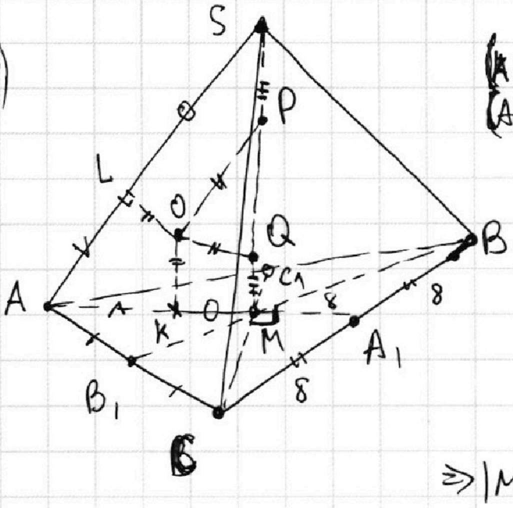
Ответ: 1/2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а)



O - центр Ω

(AL) кас Ω, (AK) кас Ω $\Rightarrow$ $|AL| = |AK|$, $|MK|^2 = |MQ|\cdot|MP| \overset{|MQ| = |SP|\text{ по усл}}{=} |SP|\cdot|SQ| = |SL|^2$

(теор. об отрезках кас: A, L, S, P, Q, M, K лежат в (ASM), сечение сферы пл-тью - окр-ть)

Т.О. $|AS| = |AL| + |LS| =$

$= |KA| + |KM| = |AM| = \frac{2}{3}|AA_1|$

(св-во медианы) $\Rightarrow$

$\Rightarrow |MA_1| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2}|AS| = 8$ $\Big| \Rightarrow$

$|CA_1| = |A_1B| = \frac{1}{2}|CB| = 8$

$\Rightarrow \hat{CMB} = 90^\circ$ (медиана = половине стороны)

$S_{CMB} = \frac{2}{6} S_{ABC}$ (св-во медиан, разделяют исходный Δ на 6 равновеликих) $= \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$

$\hat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{CMB} = \frac{1}{2}|CM|\cdot|MB| \Rightarrow$

$\Rightarrow |CM|\cdot|MB| = 2S_{CMB} = \frac{200}{3}$

$|BB_1| = \frac{3}{2}\cdot|MB|$; $|CC_1| = \frac{3}{2}|CM| \Rightarrow |BB_1|\cdot|CC_1| = \frac{9}{4}|CM|\cdot|MB|$

$= \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{200}^{50}}{\cancel{3}} = 150$

$|AA_1| = \frac{3}{2}|AM| = 24$ $\Big| \Rightarrow |AA_1|\cdot|BB_1|\cdot|CC_1| = 150\cdot 24 = 2400 + 1200 = 3600$

Ответ: 3600

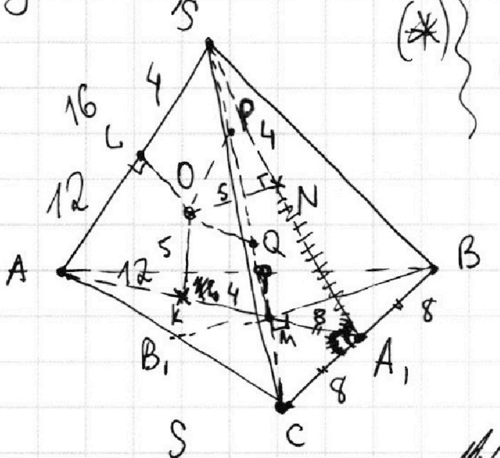
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

пункт б)



$$(*)\begin{cases} (OK)\perp(ABC) \\ (CB)\subset(ABC) \end{cases}\Big|\overset{\text{опр}}{\Rightarrow}(OK)\perp(CB)\Big|\overset{\text{теор}}{\Rightarrow}$$

$(ON)\perp(SCB) \Rightarrow (ON)\perp(CB)$

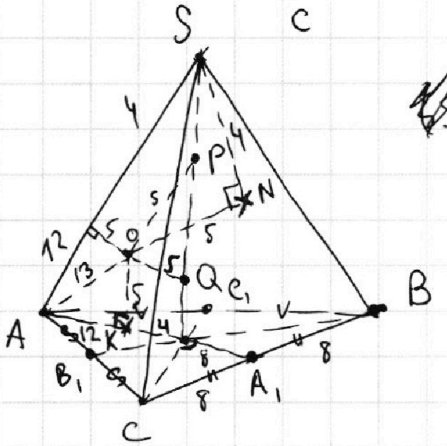
$\Rightarrow (CB)\perp(OKN)$

$|SN| = |SL|$ (отрезки кас) $= 4$

$|AL| = |AS| - |SL| = 12$

$|AK| = |AL|$ (отр. кас.) $= 12$

$|KM| = \underbrace{16}_{=|AM|} - |AK| = 4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$ $bc \vdots 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}$ $ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$ $x = abc$

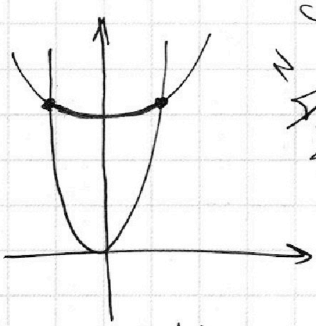
$x^2 = (abc)^2 = ab\cdot ac\cdot bc \vdots 2^{8+12+14}\cdot 3^{14+20+21}\cdot 5^{12+17+39} = 2^{34}\cdot 3^{55}\cdot 5^{68} \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow x \vdots 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34} \Rightarrow x \geq 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$ – оценка

(*) если $x^2 \vdots 3^{55}$ значит $x^2 \vdots 3^{56}$, т.к. при возведении в квадрат степень простого делителя удваивается.

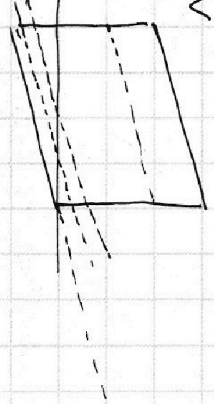
$\left(x^2 \vdots 3^{55} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3^{27}}\right)^2 \vdots 3 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3^{27}}\right)^2 \vdots 9 \right)$

пример: $a = 2^5\cdot 3\cdot 5$
$b = 2^3\cdot 3\cdot 5$
$c = 2^9\cdot 3\cdot 5$

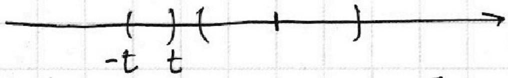


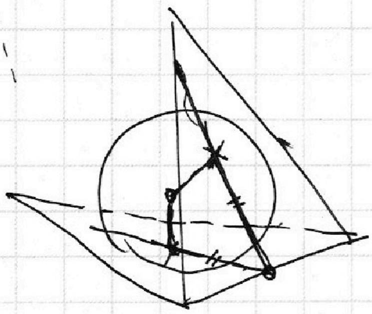
$\sqrt{a^2+9} = t$

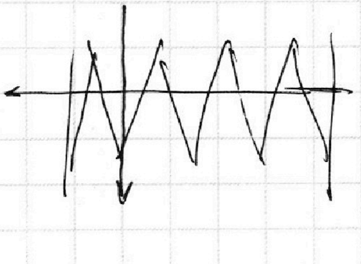
$|4b-30| < 6t$
$< t$



$4b \in (30-6t; 30+6t)$
$4b \in (-t; t)$







$10 \arcsin(\cos x) = 5\pi - \arccos(\cos x)$
$x < \pi \Rightarrow \arccos(\cos x) = 2\pi - x$

1

$\alpha + \gamma = 39$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

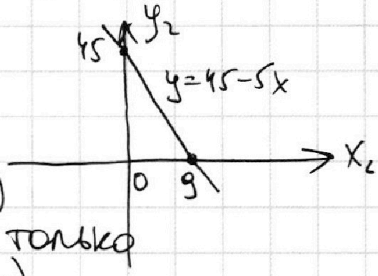
МФТИ

$O(0;0)$ $P(-16;80)$ $Q(2;80)$ $R(18;0)$

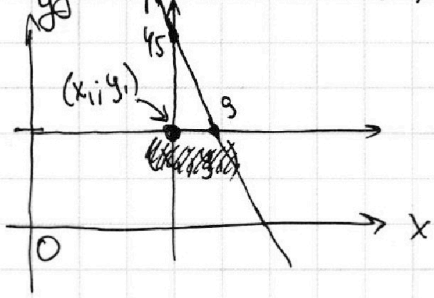
$5x_2-5x_1+y_2-y_1=45 \Leftrightarrow 5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45$

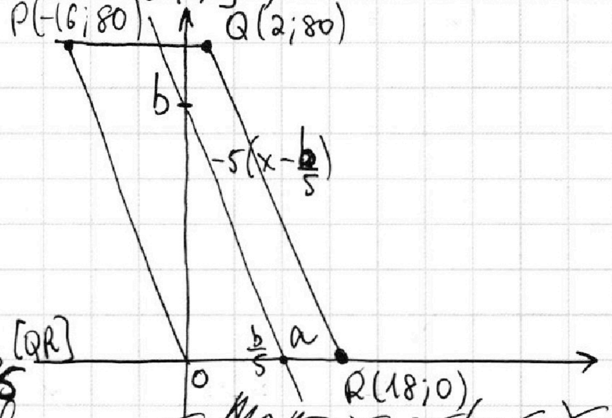
$\exists\, x_1=y_1=0$

тогда $5x_2+y_2=45 \Leftrightarrow y_2=45-5x_2$



т.о условие $5x_2-5x_1+y_2-y_1=45$ означает, что для точки $(x_1; y_2)$ подходит прямая $y_2=45-5x_2$, только с центром не в $(0;0)$ а в $(x_1;y_1)$





Заметим что стороны [PO], [QR] пар-гр имею угл коэф -5

~~переберем все прямые вида $y=-5(x-a)$ тогда все целочисл точки пар-гр окажутся на одной из этих~~

~~∀ произв точку внутри PQRO любой на диагонали, но на~~

на $y=b-5x$ пересек пар.гр. $\Leftrightarrow y=-5(x-\frac{b}{5})$ пересек пар.гр $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{b}{5}\in[0;18] \Leftrightarrow b\in[0;90]$

∀ произв $A(x_1;y_1)$ для нее прямая подх точек выглядит так: $5x_2-5x_1+y_2-y_1=45 \Leftrightarrow y_2=(y_1+45)-5(x_2-x_1)$

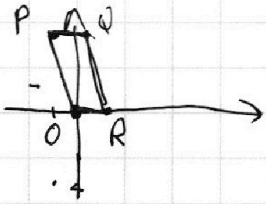
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(6) $O(0;0)$ $P(-16;80)$ $Q(2;80)$ $R(18;0)$



$5dx + dy = 45$

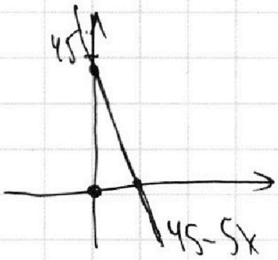
$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$

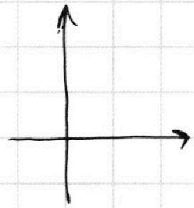
$5\pi - 10 f(x)$

$x_1 = y_1 = 0$

$5x_1 + y_2 = 45$

$y_2 = 45 - 5x_1$





$5\pi - 10(x \% \pi)$
не совсем

$t \in [-\pi;\pi]$

$5\pi - 10t$

$5\pi - 10\pi = -5\pi$
$5\pi + 10\pi = 15\pi$

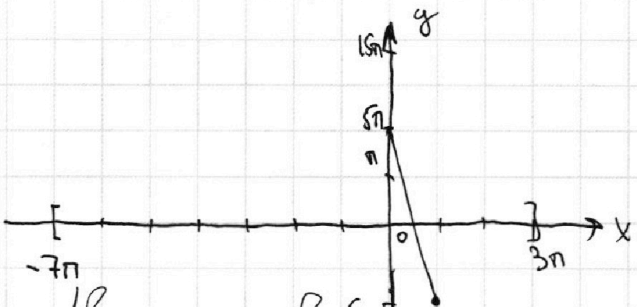
$\pi - 2x \in [-5\pi; 15\pi]$
$2x \in [$

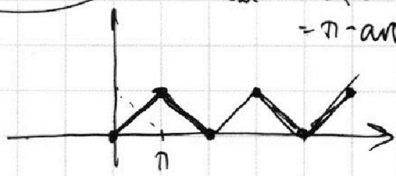
-7π
$\arccos(\cos x)$
$\cos x$

$x \in \left[\frac{-14\pi}{2}; \frac{6\pi}{2}\right]$

$x \in [-7\pi; 3\pi]$

$\arccos(\cos(\pi + x))$
$\arccos(-\cos x) =$
$= \pi - \arccos(\cos x)$





$1 \quad -k \quad k^2 \quad -k^3 \quad k^4$

$\frac{k^5+1}{k+1} = -\frac{9}{3}$

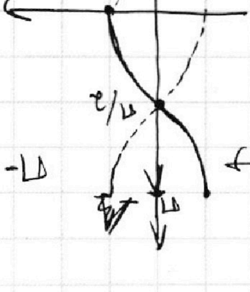
lim

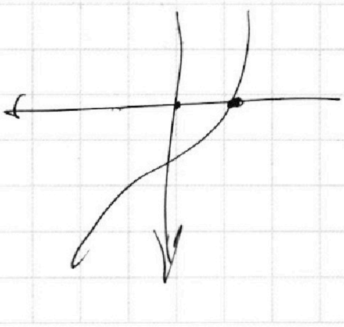
$3k^5 + 3 + 9k + 1 = 0$

$3k^5 + 9k + 4 = 0$

$f(a) = 3a^5 + 9a - 13$ ↑ как сумма возраст.

$\Rightarrow$ ур





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

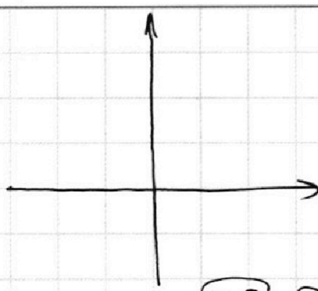
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\alpha+\beta+\gamma \geq 34$
$\alpha+\beta \geq 12$
$\beta+\gamma \geq 17$
$\alpha+\gamma \geq 39$

$\underbrace{5^{39} \cdot 3^{21} \cdot 2^{14}}$

1 w
2 V
3
4 V
5 V
6
7a
7б



$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$5\pi - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

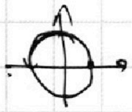
$x \% \pi$

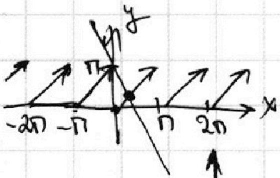
$\pi - 2x = 0$

$\pi - 2x = 0$

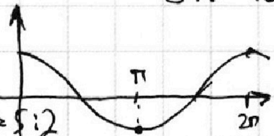
~~$\pi - 2x = x$~~

$\pi - 2(x \% \pi) = 0$



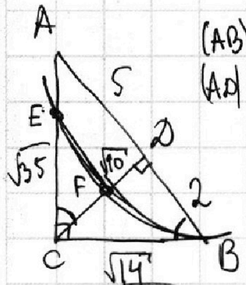


$\sqrt{5\cdot 7} \cdot \sqrt{2\cdot 7} = 7\cdot\sqrt{10}$

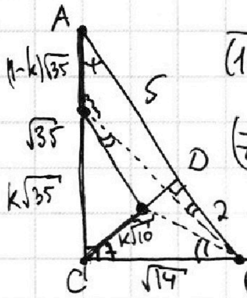


$5\pi - 10\underbrace{\arccos(\cos x)}_{\in[0;\pi]}$

$\left(\frac{\sqrt{35}}{7}\right)^2 = \frac{35}{49} \cdot S_{ABC}$



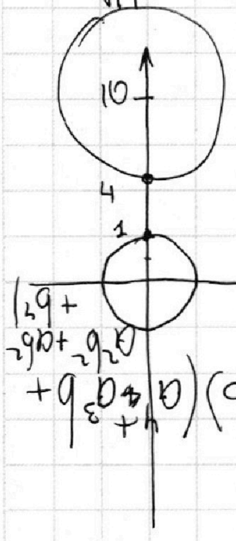
$(AB) \parallel (EF)$
$(AD):(DB) = 5:2$



ω кас (BC) в т. B

$\sqrt{4+10}$

$\sqrt{25+10}$ $\quad 49 = 35 + 14$



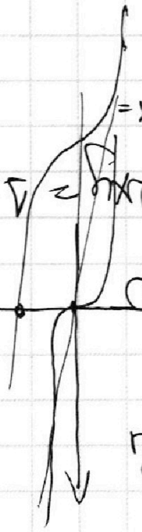
$\frac{k\sqrt{10}}{(1-k)\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$

$(7\sqrt{10}) \cdot k = 7\sqrt{10} - k \cdot 7\sqrt{10}$

$2k \cdot \cancel{7\sqrt{10}} = \cancel{7\sqrt{10}}$

$k = 1/2$

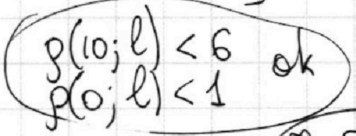
$S_{ABC}\ \frac{1}{4} \cdot \frac{35}{49} = \frac{35}{196} \cdot S_{ABC}$



$l: y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$

$\rho(10; l) < 6$ ok
$\rho(0; l) < 1$

$x^2 + y^2 - 20y + 64 = x^2 + (y-10)^2 - 36$

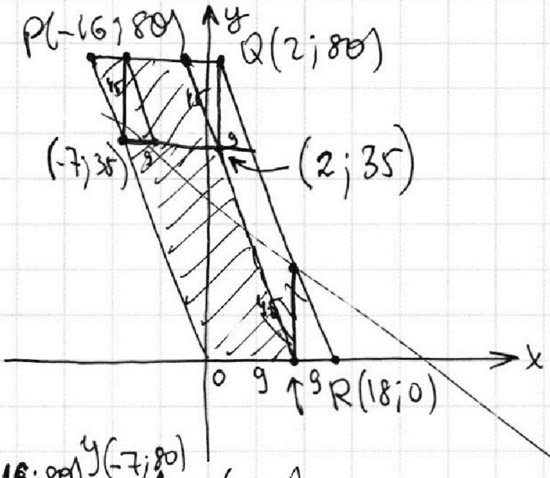


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

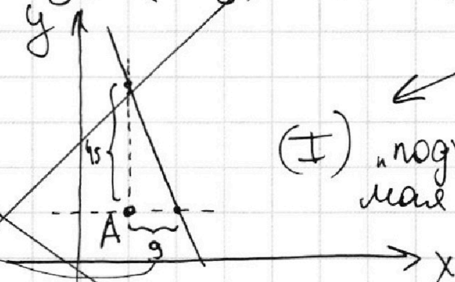
МФТИ



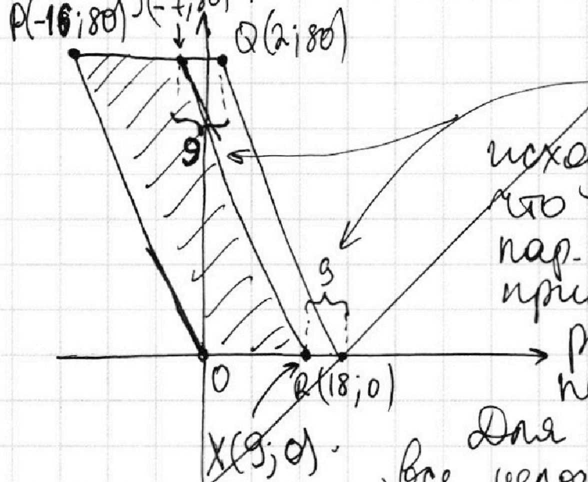
$\forall$ произв т. $A(x_1; y_1)$ для нее „подх." прямая точек:

$5(x_2-x_1)+y_2-y_1=45 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_2=(45+y_1)-5(x_2-x_1)$

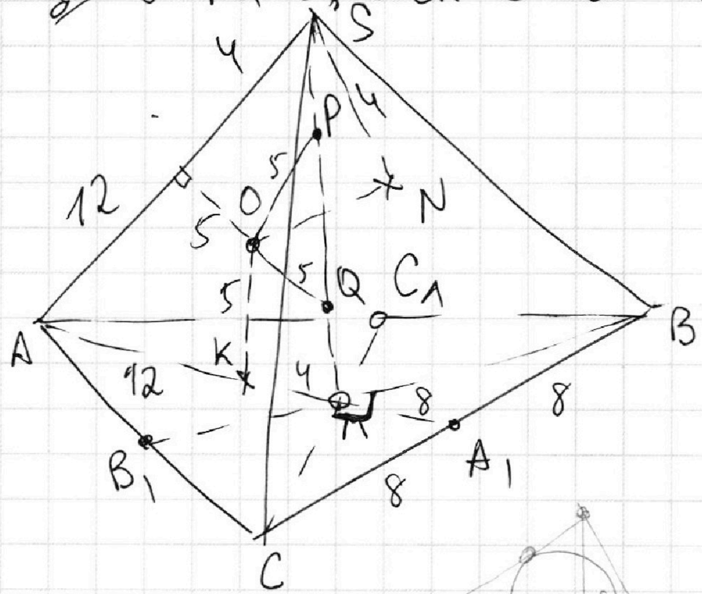


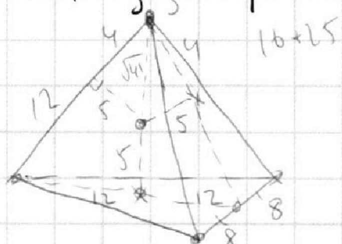
(I) „подх." прямая $\parallel (QR) \parallel (PO)$

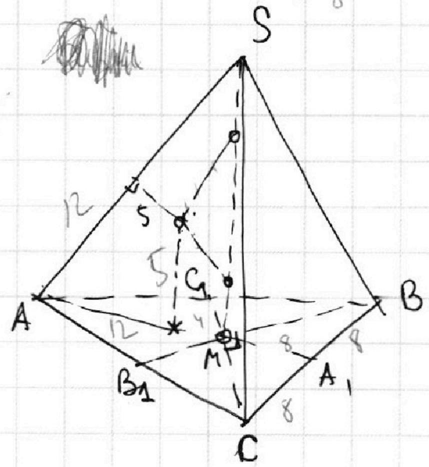


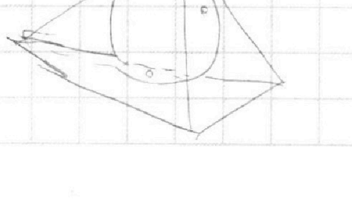
исходя из (I) картинки понятно, что PYXO, где $Y(-7;80)$, $X(9;0)$ — пар-гр. сост из точек, которые принадлежат PQRO и для которых соотв „подходящие" прямые пересекают PQRO параллелограмма

Для каждой целочисл точки PYXO все целочисл точки ее „подх." прямой, лежащие в PQRO, сост. с ней пару.









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ $\quad$ $\cancel{bc \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}$ $\quad$ $ac \vdots \cancel{2^{14} \cdot 3^{21}} \cdot 5^{39}$

$abc \vdots ac \vdots 5^{39} \cdot 3^{21} \cdot 2^{14}$

$abc \vdots$

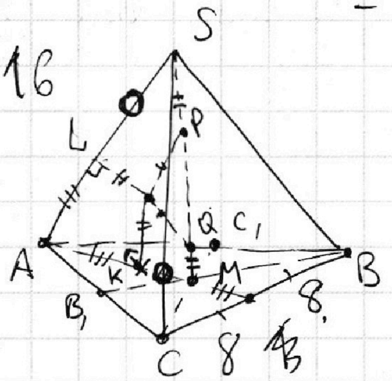
$\alpha+\beta \geq 8$ $\qquad$ $\alpha+\beta+\gamma$

$\beta+\gamma \geq 12$

$\alpha+\gamma \geq 14$

$\alpha+\beta=8$
$\alpha+\gamma=14$
$\beta+\gamma=12$
$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = 4+7+6=17$

$3 = \beta$
$= \alpha$
$= \gamma$

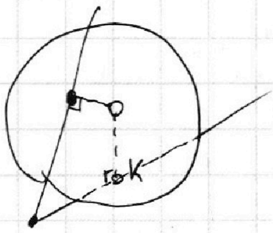


$100 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot h = 8h$

12,5

$SL^2 = SP \cdot SQ$

$h = \frac{\cancel{200}^{50}}{\cancel{16}_{4}} = 12{,}5$



$S_{ABC} = 100$
$SA = BC = 16$