



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 (стр 1/1)

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \quad bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{12} \quad ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

Если a, b или c имеют простой делитель $p \neq 2, 3$ или 5 , можно разделил
это число на этот делитель, и ^{условие} делности ост. вероятны, при этом

$$abc \text{ уменьшился} \Rightarrow \exists a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1} \quad b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2} \quad c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$$

$$\text{Нам } abc \Leftrightarrow \text{Нам } x_1 + x_2 + x_3 \geq y_1 + y_2 + y_3 \geq z_1 + z_2 + z_3$$

$$ab = 2^{x_1+x_2} \cdot 3^{y_1+y_2} \cdot 5^{z_1+z_2} ; 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 7 ; y_1 + y_2 \geq 11 ; z_1 + z_2 \geq 14$$

$$\text{Аналогично } x_2 + x_3 \geq 13, y_2 + y_3 \geq 15, z_2 + z_3 \geq 18$$

$$x_1 + x_3 \geq 14 \quad y_1 + y_3 \geq 17 \quad z_1 + z_3 \geq 13$$

$$\text{Сложим (1) (4) (7)} \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 17$$

$$\text{сложим (2) (5) (8)} \quad y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{43}{2} \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 22$$

$$\text{сложим (3) (6) (9)} \quad z_1 + z_2 + z_3 \geq \frac{75}{2} \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq 38 \quad z_1 + z_2 + z_3 \geq 43$$

($x_1 + x_2 + x_3 \geq 20$)

$$\text{пример} \quad \begin{cases} x_1 = 4 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 10 \\ y_1 = 7 \quad y_2 = 4 \quad y_3 = 11 \\ z_1 = 20 \quad z_2 = 23 \quad z_3 = 0 \end{cases} \quad a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20} \quad b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{23} \quad c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^0$$

$$\text{Нам } x_1 + x_2 + x_3 = 17 \quad \text{нам } y_1 + y_2 + y_3 = 22 \quad \text{нам } z_1 + z_2 + z_3 = 43$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

Более пример приведен

$$\text{Однем: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

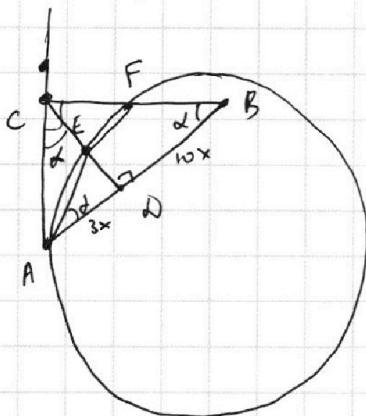
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (стр. 1/1)



$$\frac{AB}{BD} = 1,3 = \frac{13}{10} \quad \Rightarrow AB = 13x \Rightarrow BD = 10x \Rightarrow AD = 3x$$

$\triangle ABC$ - прямоугл., CD - высота $\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD$

$$CD^2 = 30x^2 \quad CD = \sqrt{30}x$$

$$S_{ACD} = \frac{\sqrt{30}x \cdot 3x}{2} = \frac{3\sqrt{30}x^2}{2}$$

$EF \parallel AB$ $AEFB$ -трапеция, вписанная
 \Rightarrow равнобедренная

$$\Rightarrow \angle EAB = \angle FBA \quad \Rightarrow \angle FBA = d$$

$$\Rightarrow \angle CFE = d \quad (EF \parallel AB)$$

$$\Rightarrow \angle ACD = d \quad (\text{т.к. } \angle BED = 90^\circ \rightarrow d$$

$$\text{в } \triangle EDB: \quad \tan d = \frac{3x}{\sqrt{30}x} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

$$\angle EAB = \angle FBA = d \quad \text{в } \triangle EAD: \quad \tan d = \frac{ED}{3x}$$

$$\frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{ED}{3x} \quad ED = \frac{9x}{\sqrt{30}}$$

$$CE = CD - ED = \sqrt{30}x - \frac{9}{\sqrt{30}}x = \\ = \frac{21}{\sqrt{30}}x$$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DB}$$

$$\frac{\frac{21}{\sqrt{30}}x}{\sqrt{30}x} = \frac{EF}{10x}$$

$$\frac{21}{30} = \frac{EF}{10x}$$

$$EF = 7x$$

$$S_{CEF} = \frac{EF \cdot CE}{2} = \frac{7x \cdot \frac{21}{\sqrt{30}}x}{2} = \frac{21 \cdot 7}{2\sqrt{30}}x^2$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{3\sqrt{30}x^2}{2}}{\frac{21 \cdot 7}{2\sqrt{30}}x^2} = \frac{30}{49}$$

Ответ: $\frac{30}{49}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (смр. 11)

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - x = -\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6x}{5} = \frac{\pi}{5} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4x}{5} = \frac{4\pi}{5} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{5\pi k}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{5\pi k}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (стр. 1/3)

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$(x+7)^2 + y^2 - 49 = 0 \quad (x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad -2 \text{ окр-ти} \quad (0,0) \text{ и рад. } 3 \text{ и } (-7,0) \text{ и рад. } 2$$

$$x + 3ay - 7b = 0$$

I $a=0 \Rightarrow x = 7b$ вертик
прям.

но может иметь

4 общ. с окр-тиами

$\Rightarrow a \neq 0$ не подх.

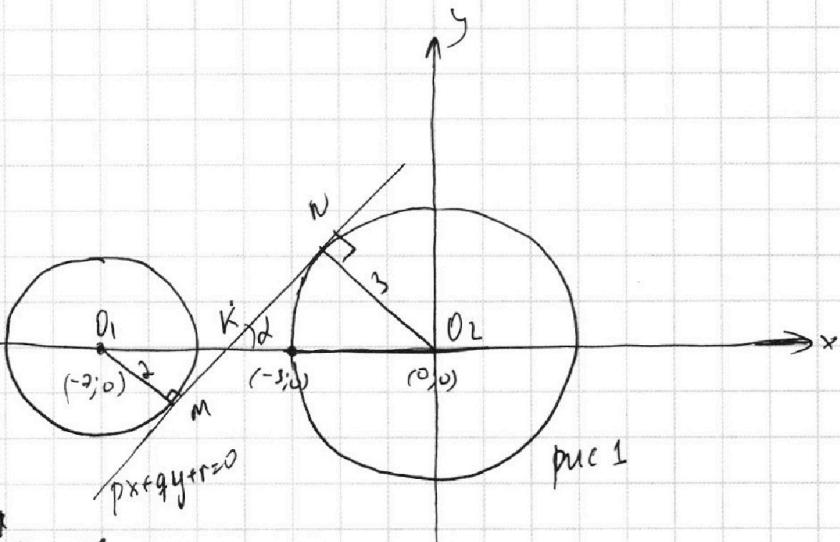
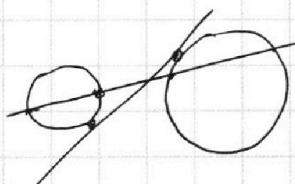


рис 1

II $a \neq 0 \quad ax = -3ay$

$$y = \frac{-b-x}{3a} = -\frac{x}{3a} + \frac{b}{3a}$$

Для фикс. a это прямая с фикс. наклоном, которая может паралл. переноситься вдоль-внеш (можно для \neq наклонами подобрать b)



если наклон ~~не совпадает~~ ^{по модулю}. (\neq)

если наклон совпадает \Rightarrow можно подобрать b , чтобы прямая имела с окр-тиами общую точку (с касанием по ω)

~~задача~~ ~~задача~~ ~~задача~~ ~~задача~~ ~~задача~~

~~задача~~ ~~задача~~ ~~задача~~ ~~задача~~ ~~задача~~

~~задача~~ ~~задача~~ ~~задача~~ ~~задача~~ ~~задача~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4. Продолжение №1 (стр 2/3)

См рис 1

~~около 1000000000~~

$$\Delta O_1 MK \sim \Delta O_2 NK$$

$$\frac{O_1 M}{O_2 N} = \frac{O_1 K}{O_2 K}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{O_1 K}{O_2 K}$$

$$O_1 K + O_2 K = 7$$

$$O_1 K = \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{14}{5}$$

$$O_2 K = \frac{3}{5} \cdot 7 = \frac{21}{5}$$

$$\tan d = ?$$

$$\sin d = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{7}$$

$$\sqrt{24} 5$$

$$\tan d = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$x = \frac{5}{2\sqrt{6}} y + \text{const}$$

если $d > \arctan(\frac{5}{2\sqrt{6}}) \Rightarrow$ нет обл. точек

2 касат. по симм осям OY и OZ имеет козырь $\frac{-5}{2\sqrt{6}}$

если $d < \frac{-5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$ нет обл. точек

если $= \frac{+5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$ 2 обл. точки макс.

$$\frac{-5}{2\sqrt{6}} \quad \frac{-1}{3a} \quad \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$(1) \frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{2\sqrt{6} - 15a}{3a + 2\sqrt{6}} < 0$$

$$\frac{2\sqrt{6} - 15a}{a} < 0 \quad \frac{15a - 2\sqrt{6}}{a} > 0$$

$$+\frac{1}{a} - \frac{2\sqrt{6}}{15} + \rightarrow$$

$$(2) \frac{-1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{15a + 2\sqrt{6}}{3a + 2\sqrt{6}} > 0$$

$$\frac{15a + 2\sqrt{6}}{a} > 0$$

$$-\frac{15}{a} - \frac{2\sqrt{6}}{15} + \rightarrow$$

$$a \in (-\infty; -\frac{15}{2\sqrt{6}}) \cup (0; \infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 Продолжение №2 (стр 3/3)

$$a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right) \\ a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (0; +\infty)$$

$\Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$

Для всех таких a в подытожнемся

Ответ: $(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty \right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (стр 1/2)

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_7 6x = \log_7 \frac{343}{36x^2} - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_7 \frac{7^5}{36x^2} - 4$$

$$\log_7^4 6x - 2 \frac{\log_7 7}{\log_7 6x} = \frac{\log_7 343}{\log_7 36x^2} - 4$$

$$\log_7^4 6x - 2 \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2 \log_7 6x} - 4 \quad (\text{помимо, что } 6x > 0)$$

$$]\log_7 6x = a$$

$$a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4 \quad | \cdot 2a \quad (a \neq 0)$$

$$2a^5 - 4 = 3 - 8a$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$\log_7^4 y + 6 \frac{\log_7 7}{\log_7 y} = \frac{\log_7 7^5}{\log_7 y^2} - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2 \log_7 y} - 4 \quad (\text{помимо, что } y > 0)$$

$$]\log_7 y = b$$

$$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4 \quad | \cdot 2b$$

$$2b^5 + 12b = 5 - 8b$$

$$\left. \begin{cases} 2b^5 + 12b + 4 = 0 \\ 2a^5 + 8a - 7 = 0 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} a^5 + b^5 + 4(a+b) = 0 \\ (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 4(a+b) = 0 \end{array}$$

$$\log_7 6x + \log_7 y = a+b$$

$$\log_7(6xy) = a+b$$

найдем все пары значений

$a+b$

$$\left. \begin{array}{l} a+b = 0 \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \neq 0 \text{ либо } b \neq 0 \\ a > 0 \text{ либо } b < 0 \end{array}$$

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0$$

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0$$

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0$$

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. Продолжение (стр 2/2)

$$\left. \begin{array}{l} a^4 > 0 \\ -a^3 \cdot b > 0 \\ a^2 b^2 > 0 \\ -a \cdot b^3 > 0 \\ b^4 > 0 \\ y > 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0$$

не имеет решений.

$$\Rightarrow a + b = 0$$

$$\log_2(6xy) = 0$$

$$\Rightarrow 6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$a = -b$$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

При $b = -100$

$$2b^5 + 8b + 7 < 0$$

при $b = 0$

$$2b^5 + 8b + 7 > 0$$

\Rightarrow между -100 и 0 есть

значение b , что $2b^5 + 8b + 7 = 0$

т.к. $2b^5 + 8b + 7$ -непрер. ф-ция

\Rightarrow можно подобрать такое y (это сущ.)

при таком b $a = -b$

$$\Rightarrow 2a^5 + 8a - 7 = 0 \text{ автомат.}$$

След.

\Rightarrow такое x тоже есть.

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{6} \text{ ситуация возможна}$$

Ответ: 1/6



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (смр 1/1)

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

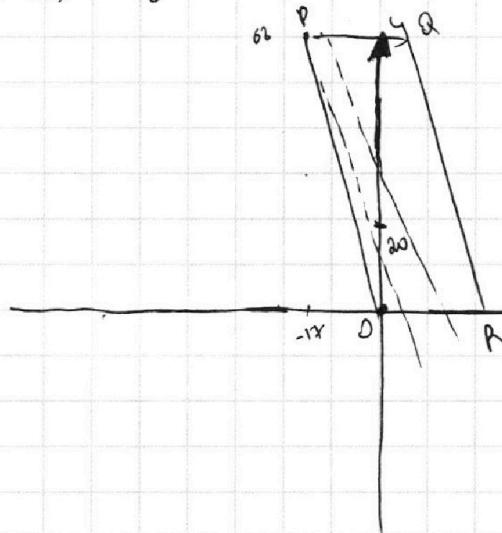
$$4x_2 + y_2 - 20 = -(4x_1 + y_1 - 20)$$

$$4x_2 + y_2 - 20 = a \quad 4x_1 + y_1 - 20 = -a$$

$$(x_2, y_2) \in y = -4x + 20 + a$$

- параллельные прямые, симметричные относительно $y = 20$

$$(x_1, y_1) \in y = -4x + 20 - a$$



Любая пара точек из 2-х таких прямых подобна.

Все эти пары координат целые, потому, что при $x=0$ будет целое y .

целое y

иначе через 4 единицы отрезка не будет целого y , а целых точек по x между A и B нет

(??)

0) отступ 0 ($a=0$)

1) отступ 1 ($a=1$)

и т.д. прямых

всегда 18 целых точек

$$18 \cdot 18 = 324$$

как на 2-й прямой

прямой

всего м.б. макс. отступ 20

(точка не лежит на прямой
ниже нормы)

$$324 \cdot 20 + 153 = 6480 + 153 =$$

$$= 6633$$

Ответ: 6633

$$x=5 \quad y=0$$

$$x=-12 \quad y=68$$

$$x \in [-12; 5]$$

18 точек

$$C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$$

$$= \underline{\underline{153}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

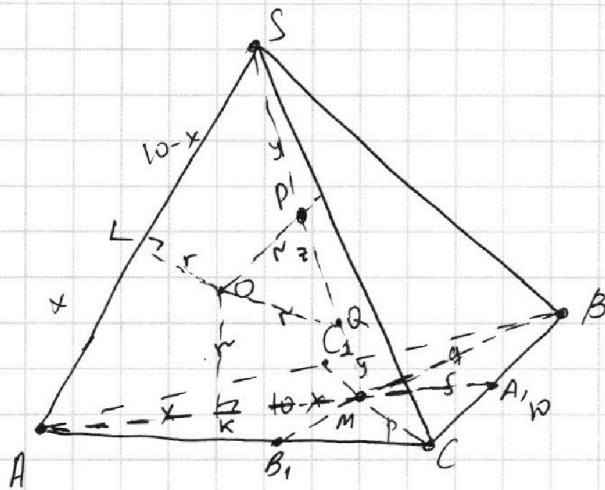


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7 (стр 1/2)



Центроид сферы r -радиус

$$OK \perp AM \quad OK = r$$

$$OL = r \quad OL \perp r$$

$$OP = OQ = r$$

$$AL = x \Rightarrow LS = 10 - x$$

$\triangle ALO \sim \triangle AKO$ (катет r и
одна пропор.)

$$\Rightarrow AK = x$$

$$SP = y = MQ \quad PQ = z$$

Лин. квадрат пл-твою (AMS)
сфера \rightarrow окр-тию $LKPQ$

$$\text{смн. 1)} \quad S : LS^2 = SP \cdot SQ$$

$$(10-x)^2 = y(y+z)$$

$$\text{смн. 1)} \quad M : MK^2 = MQ \cdot MP$$

$$MK^2 = y(y+z) = (10-x)^2$$

$$\Rightarrow MK = 10 - x$$

$$\Rightarrow AM = 10 \quad AM = \frac{2}{3} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 5$$

$CA_1 = BA_1 = 5 = MA_1 \Rightarrow \triangle CMB$ - прямогр.

$$MC = p \quad BM = q$$

$$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = 20$$

$$\frac{pq}{2} \quad \begin{cases} pq = 40 \\ p^2 + q^2 = 100 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{реш. } p = \sqrt{20}, q = \sqrt{80} \\ \text{или } p = \sqrt{80}, q = \sqrt{20} \end{array}$$

(но 1. Внеша. боковина нец
ней.)

$$pq \quad p = \sqrt{20}, q = \sqrt{80}$$

$$2\sqrt{5} \quad 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2} \cdot 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \quad CC_1 = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{180 \cdot 3 \cdot 5 = 270 \cdot 5 = 1350}{-1200} - \text{ ошибки 1})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

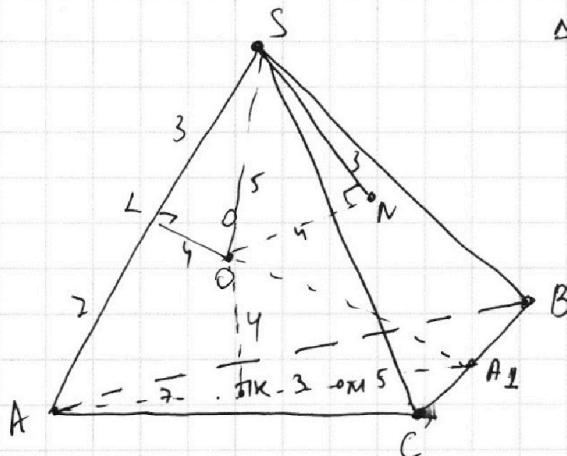
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7. Продолжение (стр 2/2)



ΔOSN -правоуг $ON=4$ $SN=3 \Rightarrow OS=5$

ΔLOS-normally DS = 5 LOS \Rightarrow 8 LOS

$$\Rightarrow A L = \exists = Ak$$

(operac. $\kappa\alpha\zeta$. $SBC \wedge ABC \Rightarrow$)

\Rightarrow нечит из блокнота

$$\Rightarrow \angle(SB(A)) = 2 \angle(OB(A))$$

$$\angle(BCA) = \angle DA, \text{ and}$$

$$KA \perp BC \Rightarrow OA \perp BC$$

no expense or 3- \times repr.

(T, n OK \perp ABC)

$$OK = 4 \quad KA_1 = 8 \quad \angle OA_1K =$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\angle(SB(A)) = 2 \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ansatz: } 2 \arct g \left(\frac{1}{2} \right). \text{ number no 2)$$

Amber: 1) ~~was~~ 1200.

$$2) 2 \arctg \left(\frac{1}{2} \right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

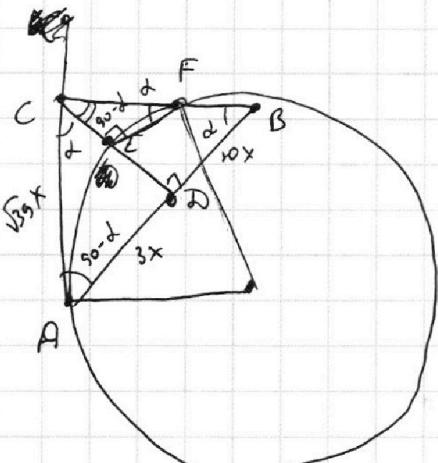
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$\Rightarrow AB \parallel BD \perp EF$

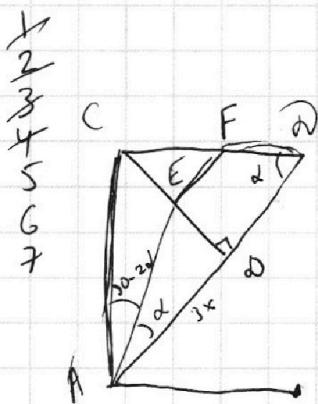
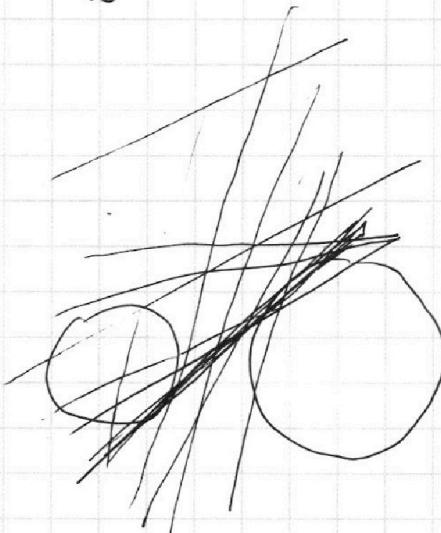
$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEG}}$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

$$S_{ACD} = \frac{\sqrt{30} \times 3x}{2}$$

$$30+9$$

$$\frac{3}{\sqrt{30}} \quad \frac{\sqrt{30}}{10}$$



$$\tan d = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$\frac{ED}{3x} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$ED = \frac{3x\sqrt{30}}{\sqrt{10}}$$

$$CE = \sqrt{30}x - \sqrt{30}x \times \frac{3}{\sqrt{10}} =$$

$$= \sqrt{30}x \left(1 - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

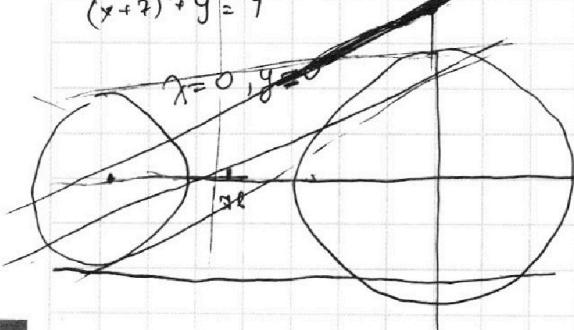
$$\sqrt{30}x$$

$$\log_2^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DB} \quad 1 - \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{EF}{10x}$$

$$\log_2^4(6) + \log_7^4 x - 2 \frac{\log_7 7}{\log_7 6x} = \log_7 343 \quad EF = \left(1 - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)10x =$$

$$\log_2^4 6x \quad \log_7 36x^2$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4 \quad = 10x - 3\sqrt{10}x$$



$$x=0 \quad u=0$$

$$y=\frac{26}{3a} \quad x$$

$$y=7 \quad y=7$$

$$x=7a \quad x=7a$$

$$y = \frac{-x+7a}{3a}$$

$$y = \frac{-x}{3a} + \frac{26}{3a}$$

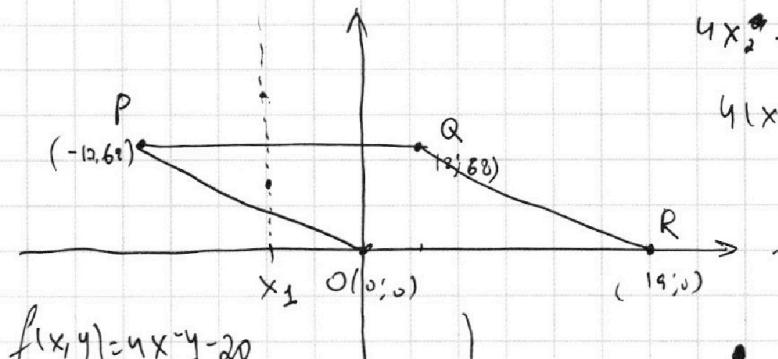


На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



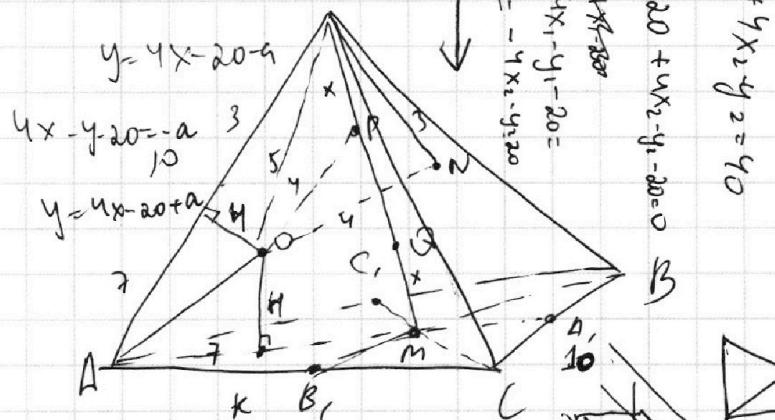
$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$y_1(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

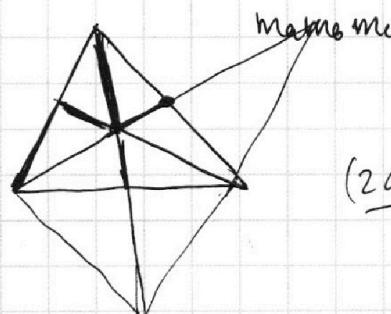
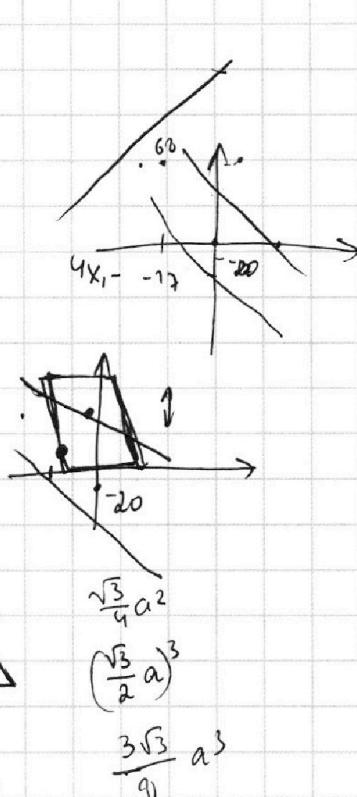
$$f(x,y) = 4x - y - 20$$

$$f(x_1, y_1) = -f(x_2, y_2)$$

$$4x - y - 20 = a$$



$$x_1 - y_1 = 0 \quad \text{and} \quad x_2 - y_2 = 0$$



$$\frac{(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2)}{(2a^2+2b^2-c^2)(2b^2+2c^2-a^2)} = \frac{4a^2b^2 + 4b^2c^2 - 2a^4}{4a^2b^2 + 4b^2c^2 - 2c^4}$$

$$8a^2 - 4a^4 + 4c^2 - 2a^2b^2 + \\ - 2a^2c^2 - 2c^4 + b^2c^2 + 5b^2c^2 \\ a^4 - 2a^4 + 2a^2b^2 + 9a^2c^2$$

$$4a^4 - 2^0$$

$$2a^4b^2 + 8a^4c^2 - 4a^6 - 4ab^6 - 4b^4c^2 + 2a^2b^4 - 4b^2c^4 - 4a^8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 6v$$

$$SA = BC = 1D$$

cm. med. max

$$\left(\frac{1}{2}ab\sin\varphi = 60\right)$$

$$\frac{2a^2 + 2b^2 - 100}{a^2} = 225$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = 100$$

$$ab \sin \varphi = 120$$

$$400 = 2ab \cos \varphi$$

$$y(y+z) = (10-x)^2 \quad 200 = ab \cos \varphi$$

$$f_{g4} = \frac{120}{200} =$$

$$\frac{15 \cdot 10}{2}$$

$$\frac{ab}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{34}} = 60^\circ$$


$$\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$(a+b)^2 = 500 + 20\sqrt{34}$$

$$\frac{ab \cdot \frac{3}{\sqrt{24}}}{2} = 6w^2$$

$$AB = \sqrt{40^2 + 34^2}$$

$$f = \frac{40}{\sqrt{344}}$$

$$10\sqrt{5.34^2 - 4 \cdot 16 \cdot 34} \\ 34(170 - 64)$$

$$34a^4 + 1600 = 800 \cdot \frac{34a^2}{E}$$

$$34t^2 - 500 \cdot 34t + 1600 = 0$$

$$34 + (-500 \cdot 34) + 1600 = 0$$

$$(400x) \quad 500 \cdot 34 \pm \sqrt{(500 \cdot 34)^2 - 4 \cdot 1600 \cdot 34}$$

$$K_{\text{eq}} = 500.34 \pm \sqrt{(500.34)^2 - 4 \cdot 1600.34}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

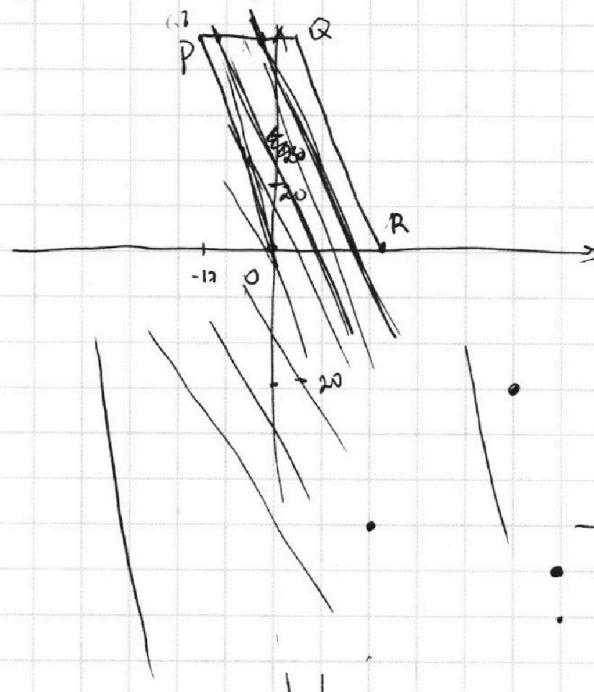
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x - y - 20 = a \quad y = 4x - 20 - a$$

$$4x - y - 20 = -a \quad y = 4x - 20 + a.$$

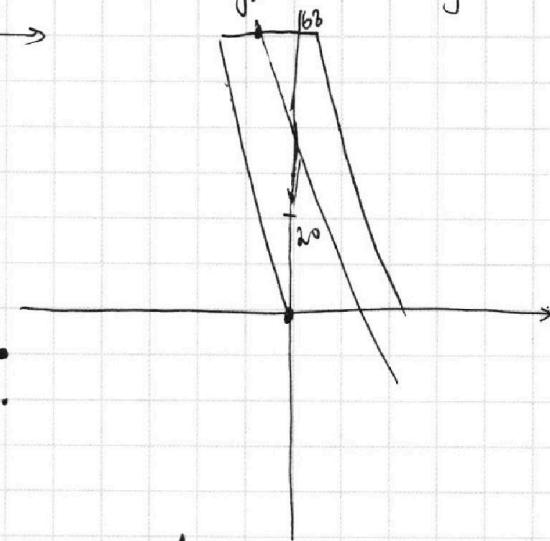


$$4x_2 + 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$4x_2 + y_2 - 20 + 4x_1 - y_1 - 20 = 0$$

$$4x_1 + y_1 - 20 = a \quad y_1 = -4x_1 + 20 + a$$

$$4x_2 + y_2 - 20 = -a \quad y_2 = -4x_2 + 20 - a$$



$$xy = \frac{1}{6}$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

(~~запись~~)

