



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1 (стр 1/1)

$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ $bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16}$ $ac : 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$

Если a, b или c имеет простой делитель $p \neq 2, 3$ или 5 , можно разделить это число на этот делитель, и ~~условия~~ делимости ост. верными, при этом

abc уменьшится $\Rightarrow \exists a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$ $b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$ $c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$

Найти $abc \Leftrightarrow$ найти $x_1 + x_2 + x_3; y_1 + y_2 + y_3; z_1 + z_2 + z_3$

$ab = 2^{x_1+x_2} \cdot 3^{y_1+y_2} \cdot 5^{z_1+z_2}; 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow x_1+x_2 \geq 7; y_1+y_2 \geq 11; z_1+z_2 \geq 14$

Аналогично $x_2+x_3 \geq 13; y_2+y_3 \geq 15; z_2+z_3 \geq 16$

$x_1+x_3 \geq 14; y_1+y_3 \geq 17; z_1+z_3 \geq 18$

Сложим (1) (4) (7) $x_1 + x_2 + x_3 \geq 17$

сложим (2) (5) (8) $y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{43}{2} \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 22$

сложим (3) (6) (9) $z_1 + z_2 + z_3 \geq \frac{75}{2} \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq 38$ $z_1 + z_2 + z_3 \geq 43$
т.к. $z_1 + z_3 \geq 43$

пример $\begin{cases} x_1 = 4 & x_2 = 3 & x_3 = 10 \\ y_1 = 7 & y_2 = 4 & y_3 = 11 \\ z_1 = 20 & z_2 = 23 & z_3 = 0 \end{cases}$
 $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$
 $b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{23}$
 $c = 2^{10} \cdot 3^{11}$

найти $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ найти $y_1 + y_2 + y_3 = 22$ найти $z_1 + z_2 + z_3 = 43$

$\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ найм. пример приведен

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

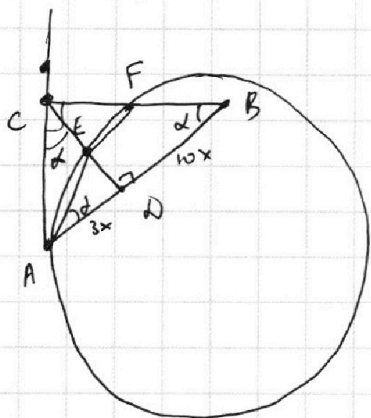
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 (смп. 1/1)



$$\frac{AB}{BD} = 1,3 = \frac{13}{10} \quad \angle AB = 13x = \sqrt{BD} = 10x \Rightarrow AD = 3x$$

$\triangle ABC$ - прямоугол., CD - высота $\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD$

$$CD^2 = 30x^2 \quad CD = \sqrt{30}x$$

$$S_{ACD} = \frac{\sqrt{30}x \cdot 3x}{2} = \frac{3\sqrt{30}x^2}{2}$$

$EF \parallel AB$ $AEFB$ - трапеция, вписанная \Rightarrow равнобедренная

$$\Rightarrow \angle EAB = \angle FBA \quad \angle FBA = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle CFE = \alpha \quad (EF \parallel AB)$$

$$\Rightarrow \angle ACD = \alpha \quad (\text{т.к. } \angle CED = 90^\circ \Rightarrow \alpha \text{ из } \triangle EDB)$$

$$\triangle ACD: \operatorname{tg} \alpha = \frac{3x}{\sqrt{30}x} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

$$\angle EAB = \angle FBA = \alpha \quad \triangle EAD: \operatorname{tg} \alpha = \frac{ED}{3x}$$

$$\frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{ED}{3x} \quad ED = \frac{9x}{\sqrt{30}}$$

$$CE = CD - ED = \sqrt{30}x - \frac{9}{\sqrt{30}}x = \frac{21}{\sqrt{30}}x$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CDB$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DB}$$

$$\frac{\frac{21}{\sqrt{30}}x}{\sqrt{30}x} = \frac{EF}{10x}$$

$$\frac{21}{30} = \frac{EF}{10x}$$

$$EF = 7x$$

$$S_{CEF} = \frac{EF \cdot CE}{2} = \frac{7x \cdot \frac{21}{\sqrt{30}}x}{2} = \frac{21,7}{2\sqrt{30}}x^2$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\cancel{3\sqrt{30}x^2} \cdot 2\sqrt{30}}{\cancel{2 \cdot 21 \cdot 7x^2}} = \frac{30}{49}$$

Ответ: $\frac{30}{49}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (стр 11)

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - x = -\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6x}{5} = \frac{\pi}{5} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4x}{5} = \frac{4\pi}{5} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{5\pi k}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{5\pi k}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4 (стр. 1/3)

$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

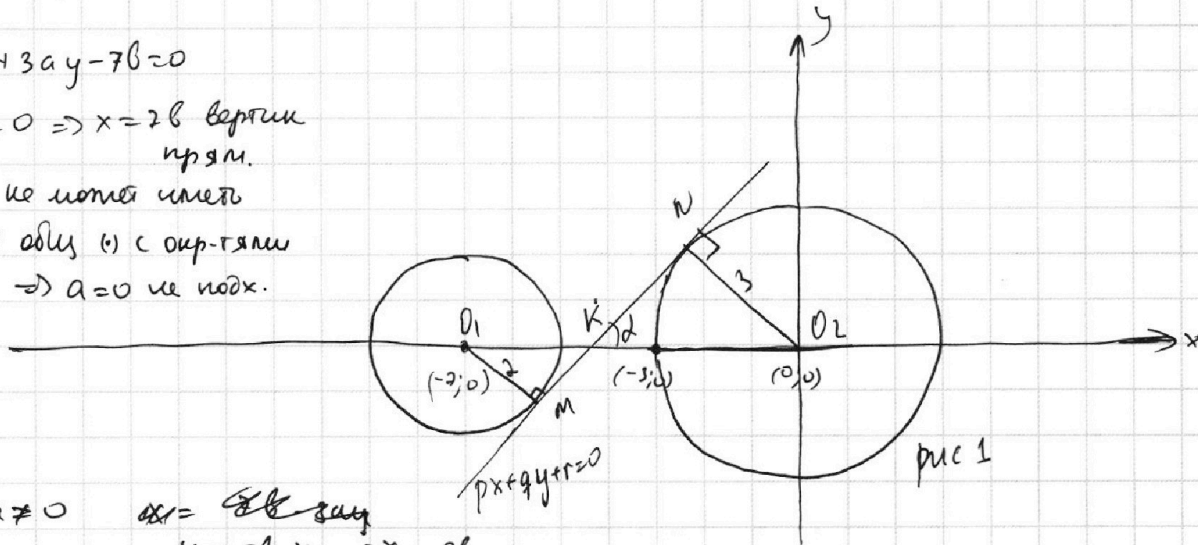
$$((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad - 2 \text{ окр-ти } ((0,0) \text{ и рад. } 3 \text{ и } (-7;0) \text{ и рад. } 2)$$

$$x + 3ay - 7b = 0$$

I $a=0 \Rightarrow x=7b$ вертикаль

прям.

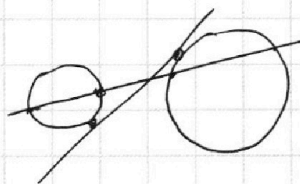
не может иметь 4 общ. т. с окр-тями $\Rightarrow a=0$ не подх.



II $a \neq 0$

$$y = \frac{7b-x}{3a} = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

Для фикс. a это прямая с фикс. наклоном, которая может паралл. переноситься вверх-вниз (можно для \forall положений подобрать b)



Если наклон ^{по модулю} ~~увеличить~~ $(\neq 2)$

меньше накл. общей внутр касая \rightarrow можно подобр b ; чтобы прямая имела с окр-тями = 4 общ. точки (с каждой по 2)

~~Если наклон $\neq 2$ и $\neq -2$ то можно подобрать b так, чтобы прямая была общей внутренней касательной к окружностям. Если наклон $\neq 2$ и $\neq -2$ то можно подобрать b так, чтобы прямая имела с окружностями 4 общие точки (с каждой по 2).~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Вариант 1~~ ~~Задача 4. Продолжение №1 (стр 2/3)~~

~~См рис 1~~

См рис 1

$$\triangle O_1MK \sim \triangle O_2MK$$

$$\frac{O_1M}{O_2N} = \frac{O_1K}{O_2K}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{O_1K}{O_2K}$$

$$O_1K + O_2K = 7$$

$$O_1K = \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{14}{5}$$

$$O_2K = \frac{3}{5} \cdot 7 = \frac{21}{5}$$

$$\operatorname{tg} d = ?$$

$$\sin d = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{7}$$



$$\operatorname{tg} d = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$x = \frac{5}{2\sqrt{6}}y + \text{const}$$

Если $d > \arctan\left(\frac{5}{2\sqrt{6}}\right) \Rightarrow$ нет оды точек

2 касат. по симм отн-мо ох имеет коэфф. $\frac{-5}{2\sqrt{6}}$

если $< \frac{-5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$ нет оды точек

если $= \frac{-5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$ 2 оды. точки макс.

$$\frac{-5}{2\sqrt{6}} < \frac{-1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$(1) \frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{2\sqrt{6} - 15a}{3a + 2\sqrt{6}} < 0$$

$$\frac{2\sqrt{6} - 15a}{a} < 0 \quad \frac{15a - 2\sqrt{6}}{a} > 0$$

$$\frac{+1}{0} \quad \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{15}}{+}$$

$$a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$$

$$(2) \frac{-1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{15a + 2\sqrt{6}}{3a + 2\sqrt{6}} > 0$$

$$\frac{15a + 2\sqrt{6}}{a} > 0$$

$$\frac{-\frac{15\sqrt{6}}{15}}{+} \quad \frac{+}{-}$$

$$a \in (-\infty; -\frac{15}{2\sqrt{6}}) \cup (0; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 продолжение №2 (стр 3/3)

$$\left. \begin{array}{l} a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right) \\ a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup (0; +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$$

Для всех таких a θ подбирается

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (UMP 1/2)

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4$$

$$\log_7^4 6x - 2 \frac{\log_7 7}{\log_7 6x} = \frac{\log_7 343}{\log_7 36x^2} - 4$$

$$\log_7^4 6x - 2 \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2 \log_7 6x} - 4 \quad (\text{можно, т.к. } 6x > 0)$$

$$\} \log_7 6x = a$$

$$a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4 \quad | \cdot 2a \quad (a \neq 0)$$

$$2a^5 - 4 = 3 - 8a$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$\log_7^4 y + 6 \frac{\log_7 7}{\log_7 y} = \frac{\log_7 7^5}{\log_7 y^2} - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2 \log_7 y} - 4 \quad (\text{можно, т.к. } y > 0)$$

$$\} \log_7 y = b$$

$$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4 \quad | \cdot 2b$$

$$2b^5 + 12 = 5 - 8b$$

$$\begin{cases} 2b^5 + 8b + 7 = 0 & (1) \\ 2a^5 + 8a - 7 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^5 + b^5 + 4(a+b) = 0 \\ (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 4(a+b) = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_7 6x + \log_7 y = a+b \\ \log_7(6xy) = a+b \\ \text{найдем все пары знач.} \\ a+b \end{array} \right\} \begin{cases} a+b = 0 \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(1) | (2) : b \leq 0 \quad (\text{имеем } (1) \text{ ?!}) \quad a > 0 \quad (\text{имеем } 2 \text{ ?!})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. Продолжение (стр 2/2)

$$\left. \begin{array}{l} a^4 > 0 \\ -a^3 \cdot b > 0 \\ a^2 b^2 > 0 \\ -a b^3 > 0 \\ b^4 > 0 \\ 4 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4 + 4 = 0$$

не имеет решений,

$$\Rightarrow a + b = 0$$

$$\log_7(6xy) = 0$$

$$\Rightarrow 6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

~~а = -b~~
~~2b^5 + 8b + 7 = 0~~
~~при b = -100~~
~~2b^5 + 8b + 7 < 0~~
~~при b = 0~~
~~2b^5 + 8b + 7 > 0~~
~~и между -100 и 0 есть~~
~~значение b, что 2b^5 + 8b + 7~~
~~т.к. 2b^5 + 8b + 7 - непрерыв. ф. и~~
~~⇒ можно подобрать такое y (она цел.)~~
~~при таком b a = -b~~
~~⇒ 2a^5 + 8a - 7 = 0 автомат.~~
~~воп.~~
~~⇒ такое x тоже есть.~~
~~⇒ xy = 1/6 ситуация возможна~~

Ответ: 1/6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6 (стр 1/1)

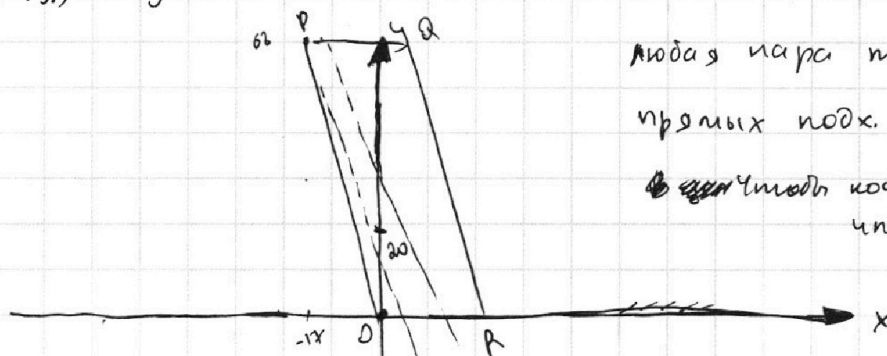
$$4x_2 \rightarrow 4x_1 + y_2 \rightarrow y_1 = 40$$

$$4x_2 + y_2 - 20 \rightarrow = -(4x_1 + y_1 - 20)$$

$$4x_2 + y_2 - 20 = a \quad 4x_1 + y_1 - 20 = -a$$

$(x_2, y_2) \in y = -4x + 20 + a$ — паралл. прямые, смм отст-во $(\cdot) (0; 20)$

$(x_1, y_1) \in y = -4x + 20 + a$



Любая пара точек по 2-х таким прямым подх.

~~и~~ учитывать коорд если целое, нуле, чтобы при $x=0$ был целый y

иначе через 4 ед. отрезка не будет целого y , а целых точек по x между A и B нет (?)

0) отступ 0 ($a=0$)

1) отступ 1 ($a=1$)

на таких прямых ~~всегда~~ всегда 18 целых точек

$18 \cdot 18 = 324$
на 1-й — на 2-й прямой
прямой

и всего м.б макс. отступ 20 (имеет 19 прямых или пар-мма)

$$324 \cdot 20 + 153 = 6480 + 153 = 6633$$

Ответ: 6633

$x=5 \quad y=0$

$x=-12 \quad y=68$

$x \in [-12; 5]$

18 точек

$$C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 9 \cdot 17 = 153$$

~~180~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

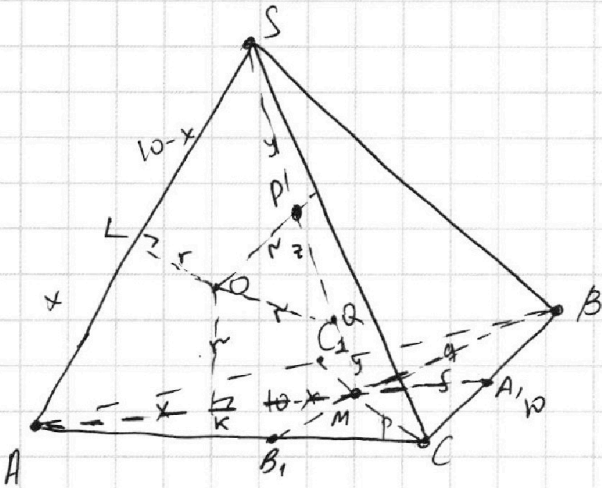
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7 (стр 1/2)



O — центр сферы r — радиус

$$OK \perp AM \quad OK = r$$

$$OL = r \quad OL \perp r$$

$$OP = OQ = r$$

$$\angle AL = x \Rightarrow LS = 10 - x$$

$\triangle ALO = \triangle AKO$ (катет r и
одна гипотен.)

$$\Rightarrow AK = x$$

$$SP = y = MQ \quad PQ = z$$

\triangle сеч. сферы пл-тью (AMS)
сфера \rightarrow окр-ть $LKPQ$
(смен.!) $S: LS^2 = SP \cdot SQ$

$$(10-x)^2 = y \cdot (y+z)$$

смен (!) $M: MK^2 = MQ \cdot MP$

$$MK^2 = y(y+z) = (10-x)^2$$

$$\Rightarrow MK = 10 - x$$

$$\Rightarrow AM = 10 \quad AM = \frac{2}{3} AA_1 \Rightarrow MA_1 = 5$$

$CA_1 = BA_1 = 5 = MA_1 \Rightarrow \triangle CMB$ — правоуг.

$$\angle MC = p \quad BM = q$$

$$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = 20$$

$$\frac{pq}{2}$$

$$\begin{cases} pq = 40 \\ p^2 + q^2 = 100 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} p = \sqrt{20} & q = \sqrt{80} \\ \text{или} & p = \sqrt{80} & q = \sqrt{20} \end{matrix}$$

(но q — длина больше нет
реш.)

$$\text{и } q = \sqrt{20} \quad p = \sqrt{80}$$

$$\Rightarrow BB_1 = \frac{3}{2} \cdot 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \quad CC_1 = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 1350 = 270 \cdot 5 = 270 \cdot 5 = 1350 \quad \text{— ответ 1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

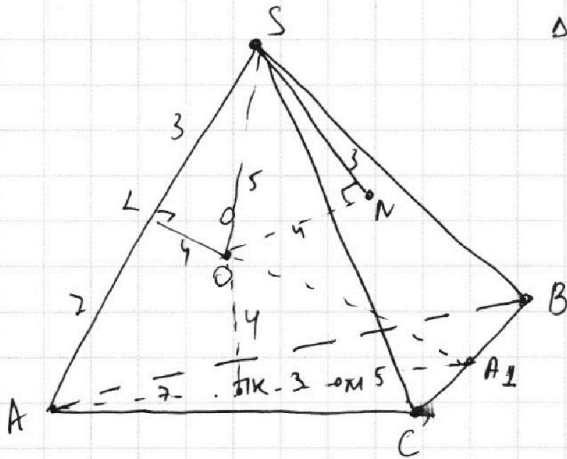
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7. Продолжение (стр 2/2)



$\triangle OSN$ - прямоугольник $ON=4$ $SN=3 \Rightarrow OS=5$

$\triangle LOS$ - прямоугольник $LS=5$ $LO=4 \Rightarrow SL=3$

$\Rightarrow AL=7 = AK$

Сфера кас. SBC и $ABC \Rightarrow$

\Rightarrow линия на биссектральной
пл-ти двугр \angle с ребром BC .

$\Rightarrow \angle(SBCA) = 2 \angle(OBCA)$

$\angle(OBCA) = \angle OAK$

$(KA \perp BC \Rightarrow OA \perp BC$

по теореме о 3-х перп.

(т.к. $OK \perp ABC$)

$OK=4$ $KA_1=8$ $\angle OAK =$

$= \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$

$\angle(SBCA) = 2 \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$

~~2 arctg~~ $2 \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$. + ответ по 2)

Ответ: 1) ~~1200~~

2) $2 \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$.

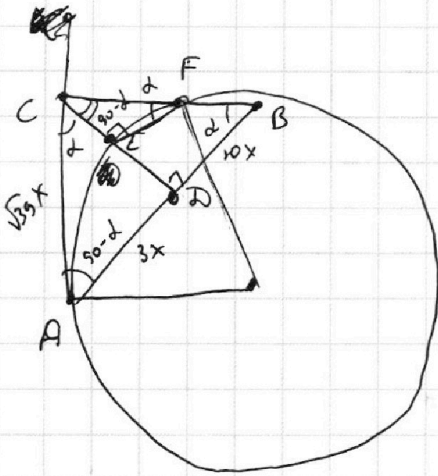
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$AB \parallel BDEF$

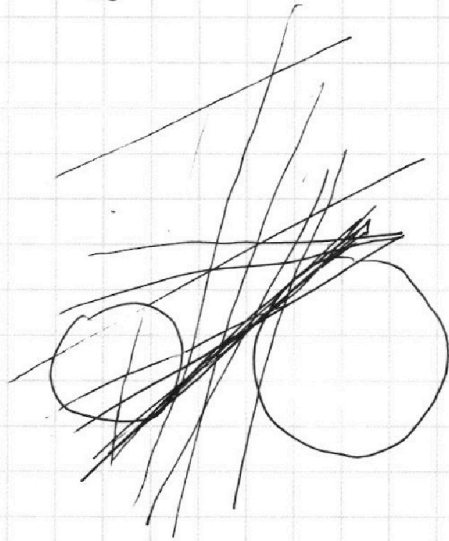
$$\frac{S_{ACD}}{S_{сек}}$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

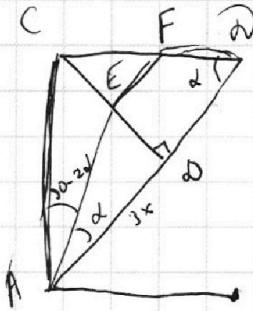
$$S_{ACD} = \frac{\sqrt{30}x \cdot 3x}{2}$$

$$30 + 9$$

$$\frac{3}{\sqrt{30}}$$



1
2
3
4
5
6
7



$$tg \alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$\frac{ED}{3x} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$ED = \frac{3x\sqrt{30}}{\sqrt{10}}$$

$$CE = \sqrt{30}x - \sqrt{30}x \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \sqrt{30}x \left(1 - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\sqrt{30}x$$

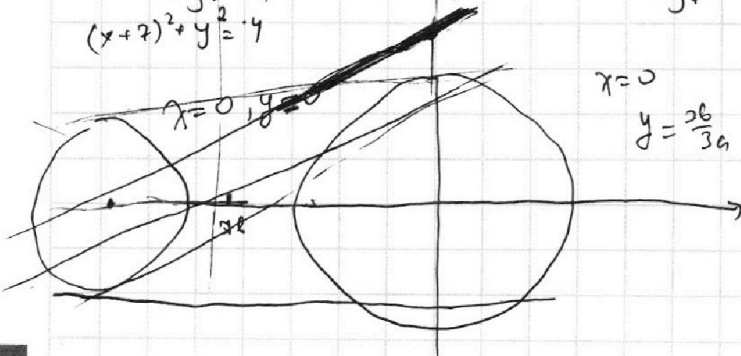
$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{DB} \quad 1 - \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{EF}{10x}$$

$$\frac{\log_7^4(6) + \log_7^4 x - 2 \log_7 7}{\log_7^4 6x} = \frac{\log_7 343}{\log_7 36x^2}$$

$$EF = \left(1 - \frac{3}{\sqrt{10}}\right) 10x = 10x - 3\sqrt{10}x$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4$$



$$x=0$$

$$y = \frac{26}{3a}$$

$$u=0$$

$$x$$

$$y = ?$$

$$x=26$$

$$y = \frac{-x+76}{3a}$$

$$y = \frac{-x}{3a} + \frac{26}{3a}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

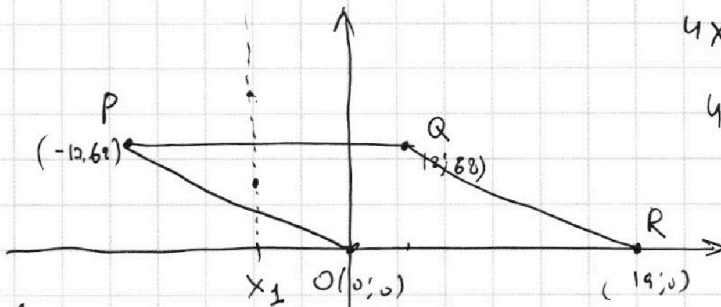
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4x_2^2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

$$f(x, y) = 4x - y - 20$$

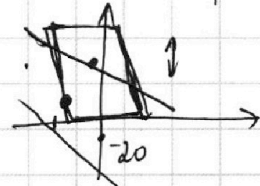
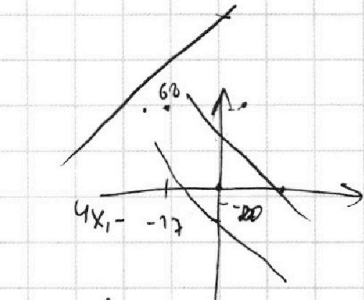
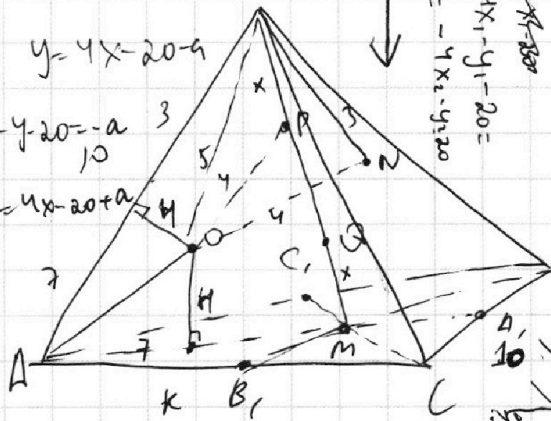
$$f(x_1, y_1) = -f(x_2, y_2)$$

$$4x - y - 20 = a$$

$$y = 4x - 20 - a$$

$$4x - y - 20 = -a$$

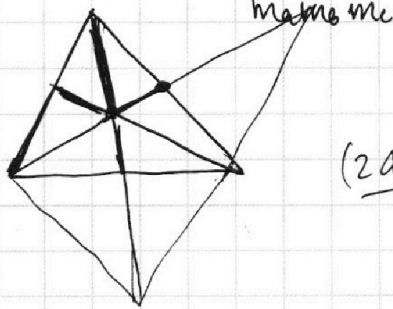
$$y = 4x - 20 + a$$



$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^3$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{9} a^3$$



$$(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$4a^4 + 4c^4 - 2a^2b^2 + 4a^2b^2 + 4b^2c^2 - 2b^4 - 2a^2c^2 - 2c^4 + b^2c^2$$

$$4a^4 - 2b^4 - 2c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 5b^2c^2 + 2a^2c^2$$

$$(4a^4 - 2b^4 - 2c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 5b^2c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$8a^4b^2 + 8a^4c^2 - 4a^6 - 4b^6 - 4b^4c^2 + 2a^2b^4 - 4b^2c^4 - 4b^2c^2$$

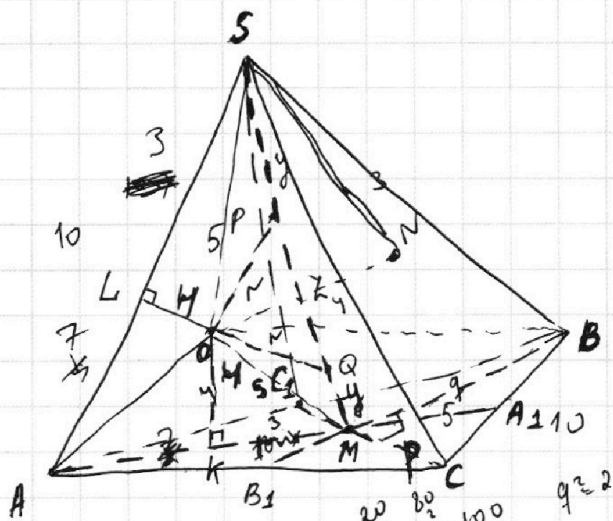
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 60$$

$$SA = BC = 10$$

см., мед., и площ

$$\begin{cases} \frac{1}{2} ab \sin \varphi = 60 \\ 2a^2 + 2b^2 - 100 = 225 \\ a^2 + b^2 = 500 \\ a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = 100 \\ ab \sin \varphi = 120 \\ 400 = 2ab \cos \varphi \end{cases}$$



$$\frac{2a^2 + 2b^2 - 100}{4} = 225$$

$$2a^2 + 2b^2 - 100 = 900$$

$$a^2 + b^2 = 500$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = 100$$

$$a^2 + \frac{1600}{a^2} = 100$$

$$a^4 + 1600 - 100a^2 = 0$$

$$\begin{aligned} 2ab \cos \varphi &= 400 \\ \frac{ab \sin \varphi}{2} &= 60 \end{aligned}$$

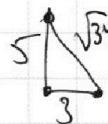
$$\frac{15 \cdot 10}{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{120}{200} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$2ab$$

$$\frac{ab}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = 60$$

$$ab = 40\sqrt{34}$$



$$\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$(a+b)^2 = 500 + 80\sqrt{34}$$

$$\frac{ab \cdot \frac{3}{\sqrt{34}}}{2} = 60$$

$$ab = 40\sqrt{34}$$

$$b = \frac{40}{\sqrt{34}}$$

$$\frac{10 \cdot 34^2 - 4 \cdot 16 \cdot 34}{34(170 - 64)}$$

$$34a^2 + \frac{1600}{34a^2} = 500$$

$$34a^4 + 1600 = 500 \cdot 34a^2$$

$$34t^2 - 500 \cdot 34t + 1600 = 0$$

$$\frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 1600}}{2}$$

$$\frac{100 \pm 10\sqrt{36}}{2}$$

$$\frac{100 \pm 60}{2}$$

$$34t^2 - 500 \cdot 34t + 1600 = 0$$

$$500 \cdot 34t \pm \sqrt{(500 \cdot 34)^2 - 4 \cdot 1600 \cdot 34}$$



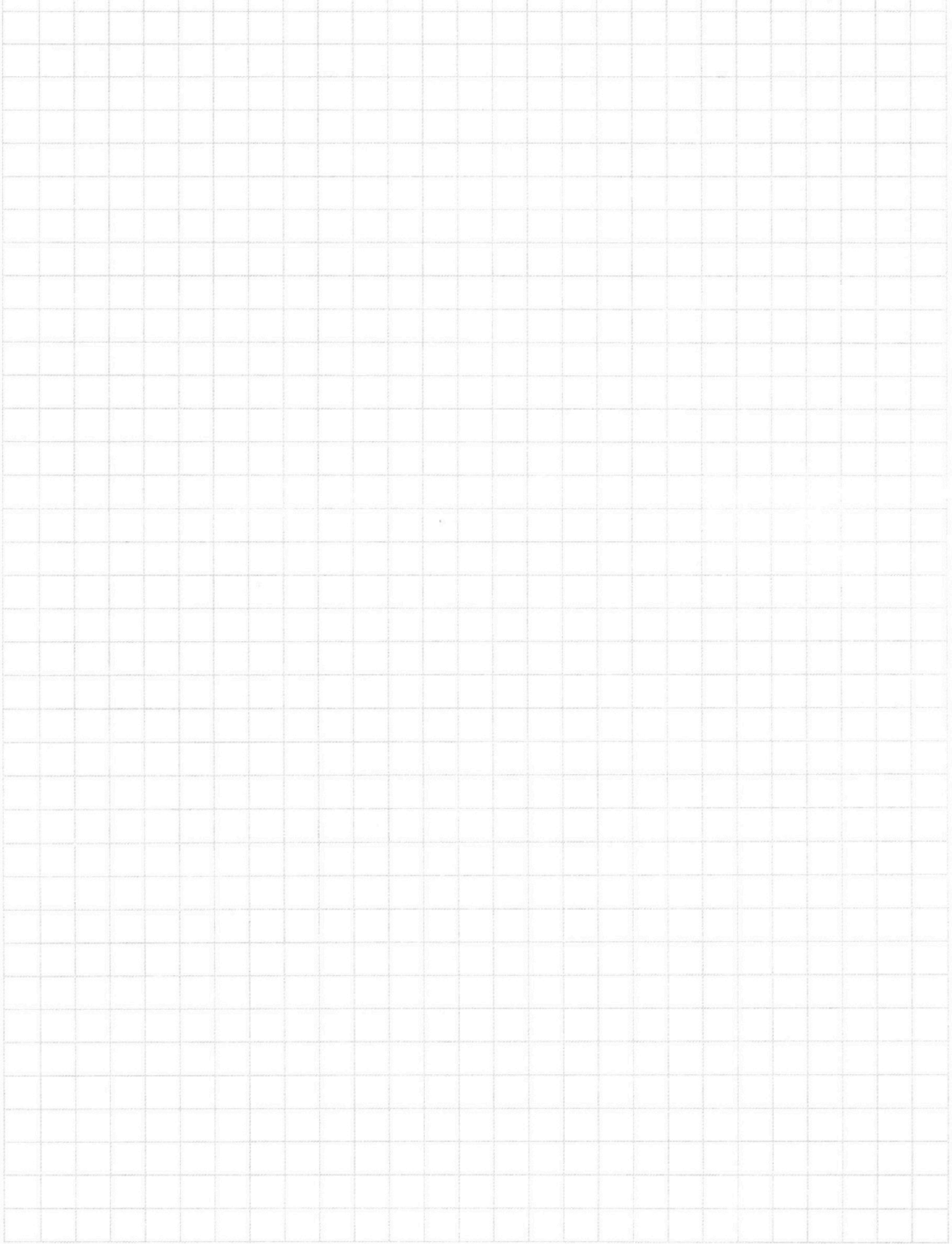
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

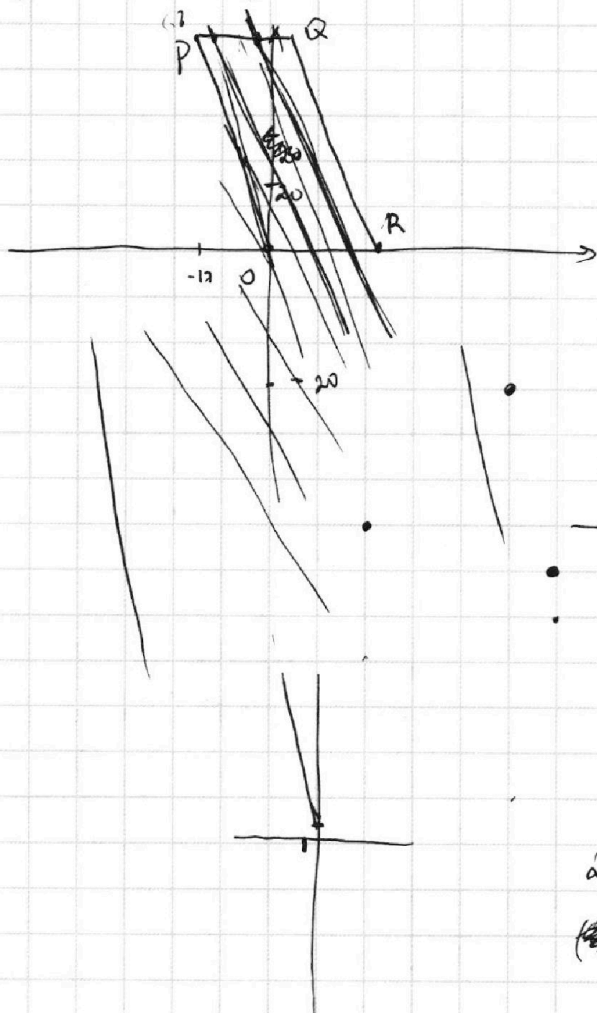
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x - y - 20 = a$$

$$y = 4x - 20 - a$$

$$4x - y - 20 = -a$$

$$y = 4x - 20 + a$$

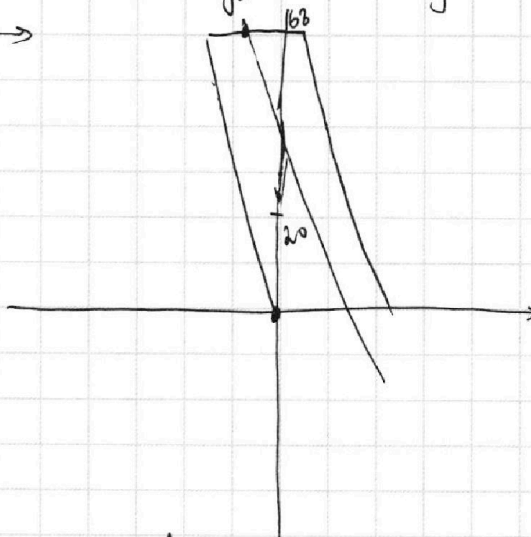


$$4x_2 + 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$4x_2 + y_2 - 20 + 4x_1 - y_1 - 20 = 0$$

$$4x_1 + y_1 - 20 = a \quad y_1 = -4x_1 + 20 + a$$

$$4x_2 + y_2 - 20 = -a \quad y_2 = -4x_2 + 20 - a$$



$$xy = \frac{1}{6}$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

~~$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$~~

